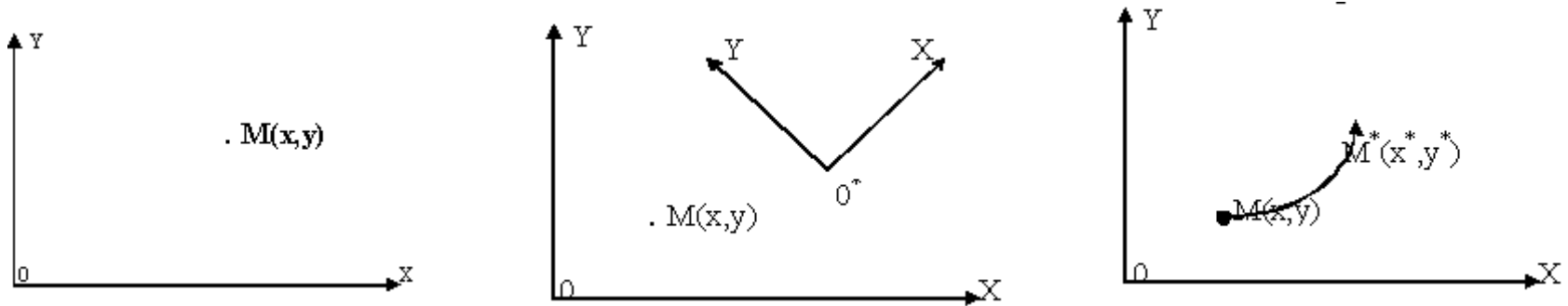


АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

План

- Аффинные преобразования
- Вспомогательные векторные алгоритмы.

Переход от одной прямолинейной системы координат

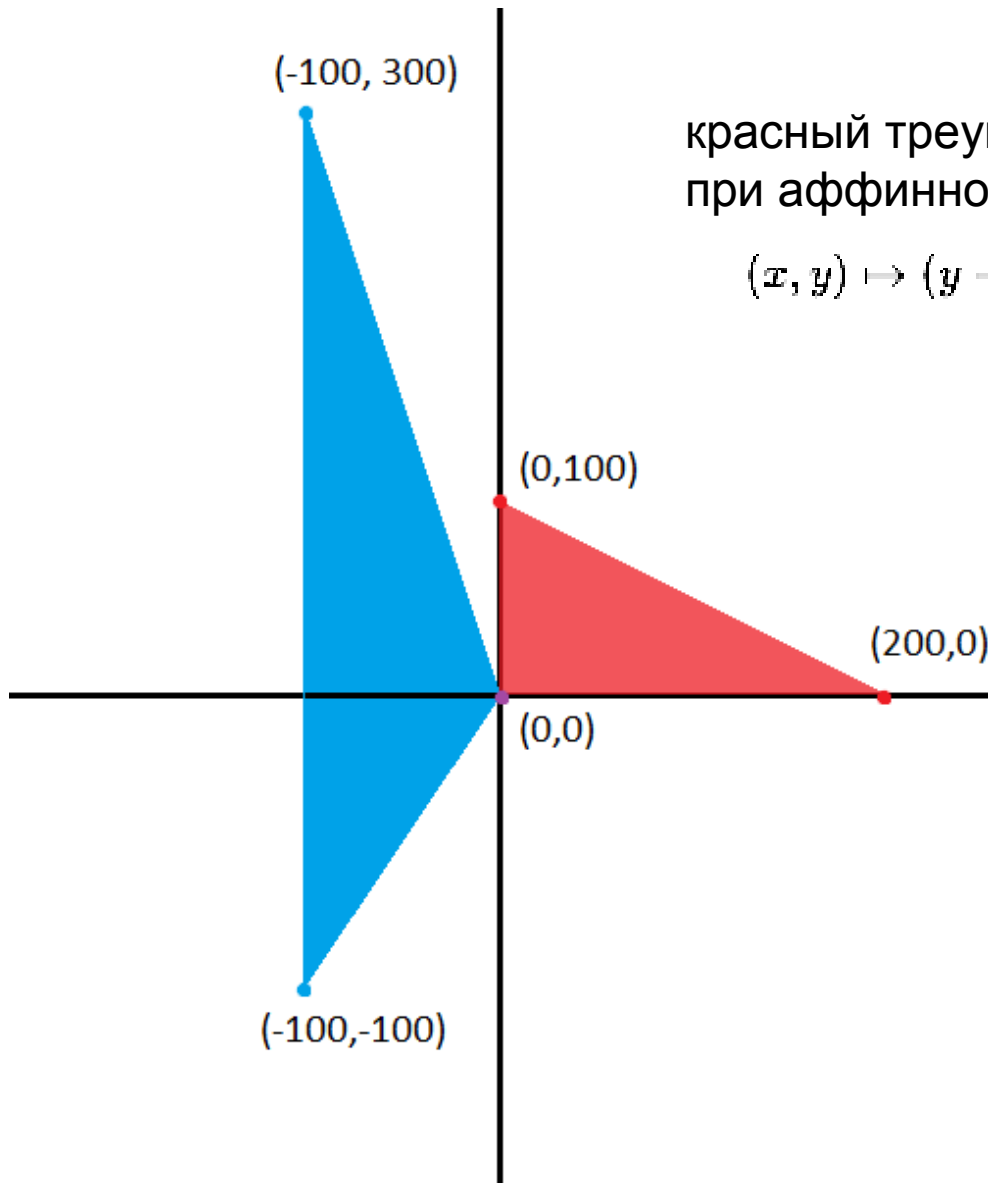


к другой описывается следующими соотношениями:

$$x^* = \alpha x + \beta y + \lambda, \quad y^* = \gamma x + \delta y + \mu, \quad (*)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные числа, связанные неравенством

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$



красный треугольник переходит в синий при аффинном преобразовании

$$(x, y) \mapsto (y - 100, 2 \cdot x + y - 100)$$

Аффинное преобразование (из википедии)

(иногда **Афинное преобразование**, от лат. *affinis* —соприкасающийся, близкий, смежный) — отображение плоскости или пространства в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые, пересекающиеся в пересекающиеся, скрещивающиеся в скрещивающиеся.

Преобразование плоскости называется **аффинным**

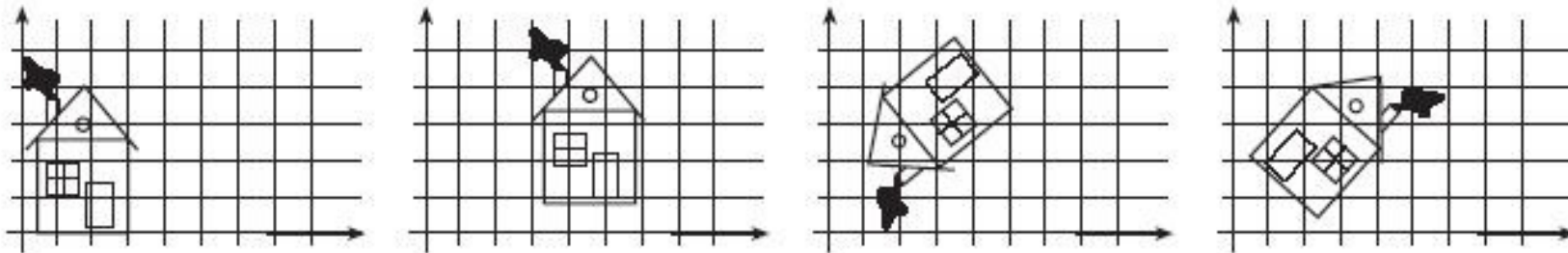
- если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.
- Преобразование (отображение) называется **взаимно однозначным** (биективным), если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

Аффинные преобразования

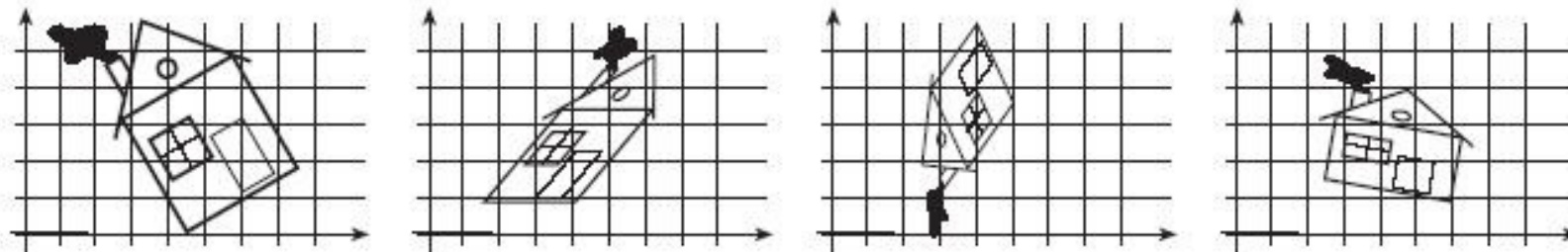
- Движения
- Растяжения и сжатия относительно прямой

Движения

- это такие преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно параллельные переносы, повороты, различные симметрии и их комбинации.



Растяжения и сжатия относительно прямой



Свойства аффинных преобразований

- Композиция аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование.
- Преобразование, обратное к аффинному, есть снова аффинное преобразование.
- Отношение площадей сохраняется.
- Отношение длин отрезков на прямой сохраняется.

Базовые аффинные преобразования

- Поворот вокруг начала координат на угол φ
- Растяжение/Сжатие
- Отражение
- Перенос

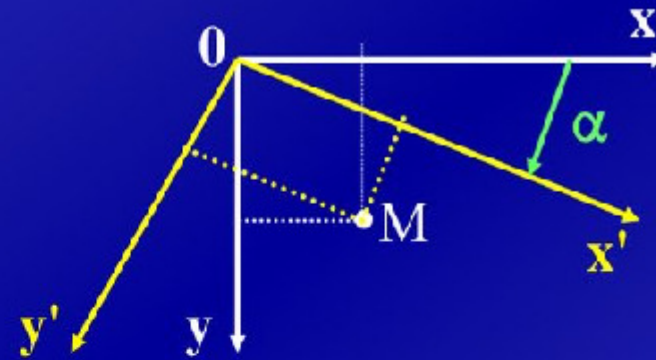
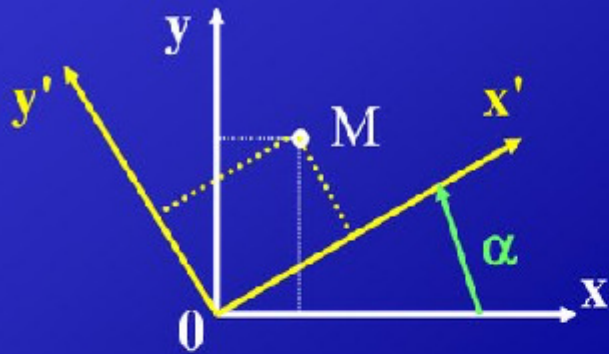
Определение

Аффинное преобразование $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть преобразование вида

$$f(x) = M \cdot x + v,$$

где M — обратимая матрица и $v \in \mathbb{R}^n$.

3. Поворот.



$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Растяжение-сжатие осей координат.

$$\begin{cases} x' = x / k_x \\ y' = y / k_y \end{cases}$$



В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример:

*$k_x = -1$ соответствует
зеркальному отражению
относительно оси y .*

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' k_x \\ y = y' k_y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Параллельный сдвиг координат.

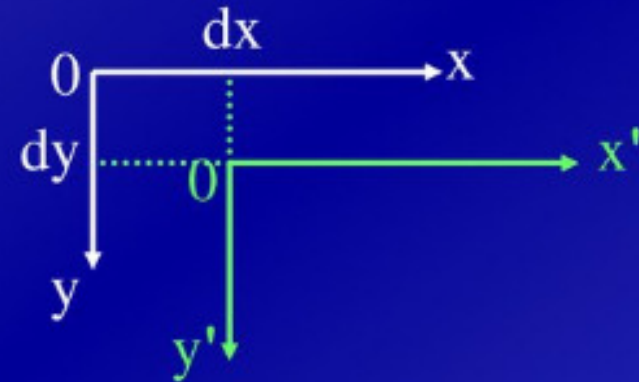
$$\begin{cases} x' = x - dx \\ y' = y - dy \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -dx & -dy & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' + dx \\ y = y' + dy \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}$$



Однородные координаты точки

- Однородными координатами этой точки называется любая тройка одновременно не равных нулю чисел x_1, x_2, x_3 , связанных с заданными числами x и y следующими соотношениями:
- $x_1 / x_3 = x, \quad x_2 / x_3 = y.$

Произвольная матрица аффинного преобразования

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

- A. Матрица вращения (rotation) ¶

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ¶$$

- B. Матрица растяжения /сжатия (dilatation). ¶

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ¶$$

- C. Матрица отражения (reflection). ¶

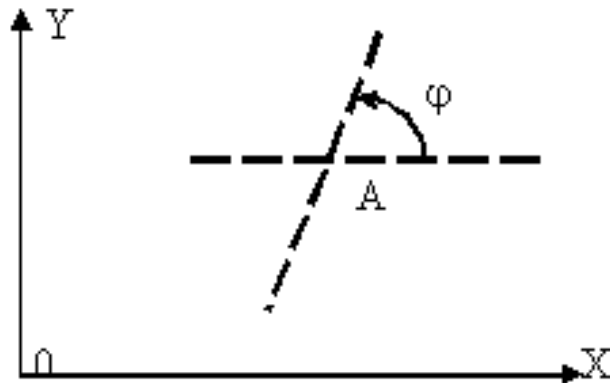
$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ¶$$

- D. Матрица переноса (translation). ¶

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix} ¶$$

Пример1

- Построить матрицу поворота вокруг точки $A(a, b)$ на угол φ



Решение

- **1-й шаг.** Перенос на вектор $A(-a, -b)$ для совмещения центра поворота с началом координат.

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

- **2-й шаг.** Поворот на угол φ .

$$[R_{\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **3-й шаг.** Перенос на вектор $A(a, b)$ для возвращения центра поворота в прежнее положение

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

Итоговая матрица

$$[T_{-a}] [R_{\varphi}] [T_a]$$

$$(x^* \ y^* \ 1) = (x \ y \ 1) \times \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -a \times \cos(\varphi) + b \times \sin(\varphi) + a & -a \times \sin(\varphi) - b \times \cos(\varphi) + b & 1 \end{bmatrix}$$

Пример 2

- Построить матрицу растяжения с коэффициентами растяжения α вдоль оси абсцисс и β вдоль оси ординат и с центром в точке $A(a, b)$.

Решение

- **1-й шаг.** Перенос на вектор $-A(-a, -b)$ для совмещения центра растяжения с началом координат

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

- **2-й шаг.** Растяжение вдоль координатных осей с коэффициентами α и δ соответственно.

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **3-й шаг.** Перенос на вектор $A(a, b)$ для возвращения центра растяжения в прежнее положение.

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Итоговая матрица

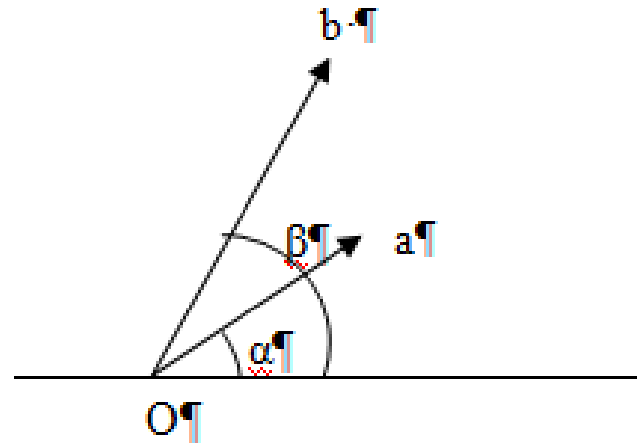
$$(x^* \quad y^* \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \times \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ (1-\alpha) \times a & (1-\delta) \times b & 1 \end{bmatrix}$$

Вспомогательные векторные алгоритмы.

- **Определить, где находится точка: справа или слева от ребра.** (Ребро должно быть направленным.)

Определить, где находится точка: справа или слева от ребра.

- Ребро должно быть направленным.



Точка b находится слева, если $\sin(\beta - \alpha) > 0$, то есть $(\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) > 0$

Определить, где находится точка: справа или слева от ребра.

- Обозначим: b_x, b_y, a_x, a_y – координаты точек. Из курса геометрии известно, что:

$$\sin \beta = b_y / |b|, \cos \alpha = a_x / |a|, \cos \beta = b_x / |b|, \sin \alpha = a_y / |a|$$

- Ясно, что знаменатели не влияют на знак выражения, так как там стоят модули. Значит, получили условие:

- если $b_y a_x - b_x a_y > 0 \Rightarrow b$ слева от Oa

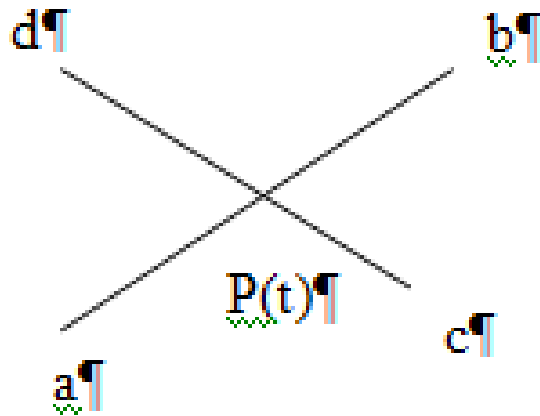
- если $b_y a_x - b_x a_y < 0 \Rightarrow b$ справа от Oa

$$\sin(\beta - \alpha) = (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha), \text{ и}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \sin \alpha = \frac{a_y}{|a|}, \cos \beta = \frac{b_x}{|b|}, \sin \beta = \frac{b_y}{|b|}, \text{ то}$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{\|a\| \|b\|} (x_a y_b - x_b y_a).$$

Проверить, пересекаются ли прямые



- Можно использовать способ определения прямых через параметрические уравнения.
- Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:
 $P(t) = a + t(b-a)$.

Проверить, пересекаются ли прямые

- Пусть у нас есть 2 прямые: ab и cd .
- Векторы $(p(t)-c)$ и $(d-c)$ – параллельны и коллинеарны.
- Если вектор n – нормаль к dc , то чтобы узнать координаты p нужно в уравнении прямой заменить (x,y) на $(-y, x)$.

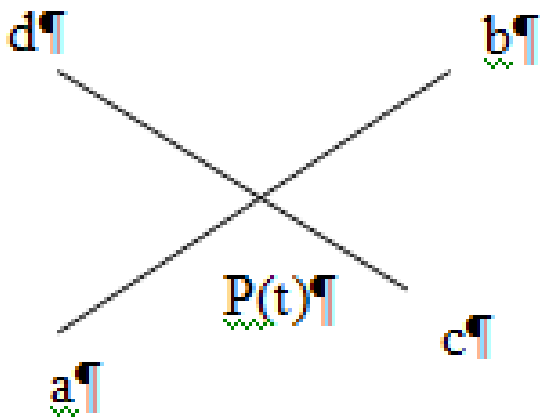
$$n(p(t) - c) = 0;$$

- Скалярное произведение >0 , если $\alpha < 90$ градусов, и скалярное произведение <0 , если $\alpha > 90$ градусов.

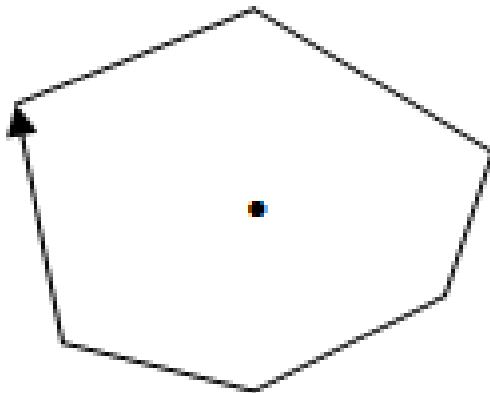
$$n(a+t(b-a)-c)=0;$$

$$n(a-c)+tn(b-a)=0;$$

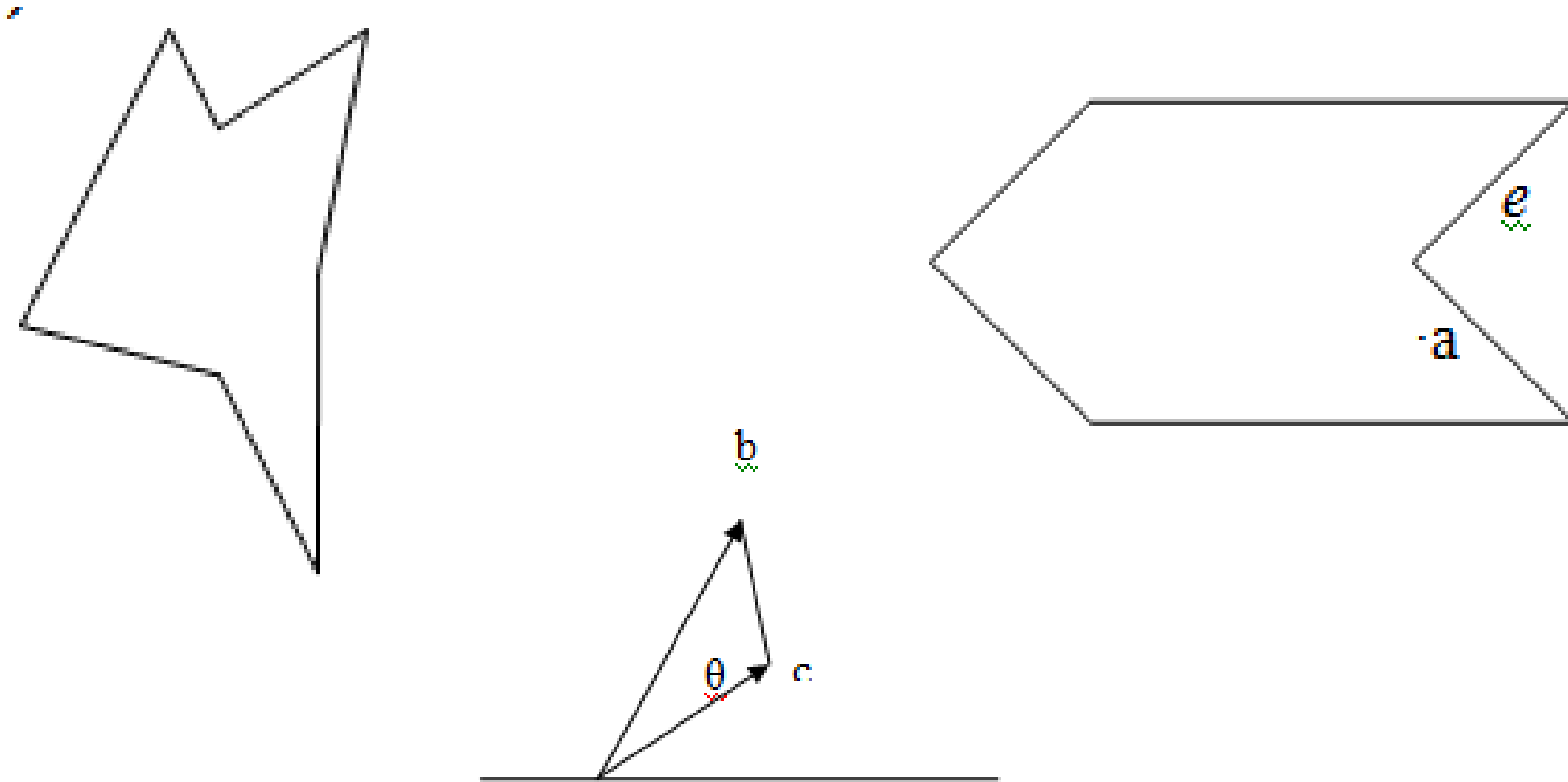
$$\Rightarrow t = -n(a-c)/n(b-a).$$



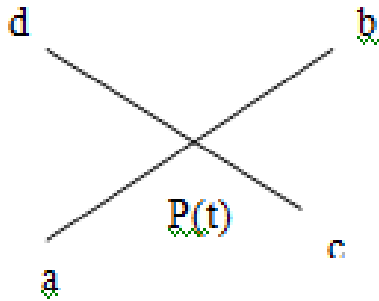
Проверить, принадлежат ли точки
полигону – метод лучей.



Проверить, принадлежат ли точки
произвольному полигону – метод углов.



Определение точки пересечения двух прямых

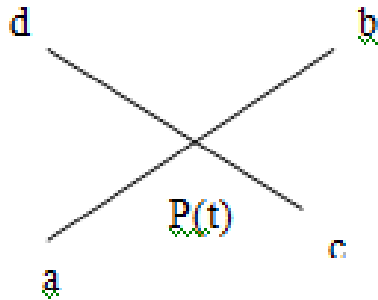


$$P(t) = a + t(b-a).$$

Заметим, что два вектора a и b перпендикулярны, если, и только если $\|a-b\| = \|b-a\|$.

$$a \cdot b \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0, \text{ если, и только если } \theta \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 90 \text{ градусов.}$$

Определение точки пересечения двух прямых



Если прямая линия ab описывается уравнением $P(t) = a + t(b-a)$, то будем искать значение t такое, что прямые линии ab и cd пересекаются в точке $P(t)$.

Поскольку вектор $P(t)-c$ должен совпадать с прямой линией cd , то и вектор $P(t)-c$ и прямая линия cd должны быть перпендикулярны одному и тому же вектору n

Определение точки пересечения двух прямых

Следовательно, на основании теоремы о скалярном произведении нам необходимо решить относительно t уравнение

$$n(P(t) - c) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде

$$n(a+t(b-a)-c)=0.$$

Учитывая основные свойства скалярного произведения, получим

$$n \cdot (a-c) + n \cdot (t(b-a)) = 0.$$

Выводя за скобки параметр t , имеем

$$n \cdot (a-c) + t [n(b-a)] = 0.$$

Откуда следует

$$t = - \frac{n \cdot (a-c)}{n \cdot (b-a)}, \quad n \cdot (b-a) \neq 0.$$