

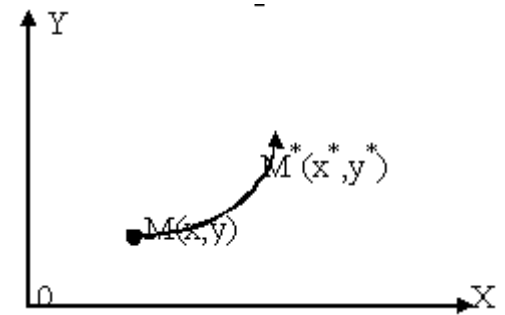
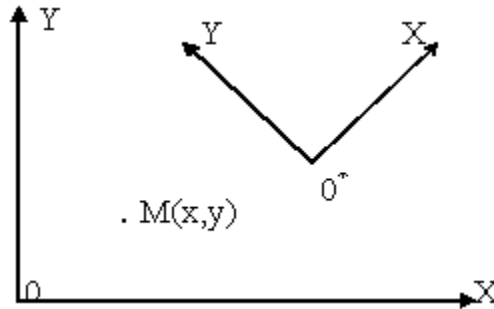
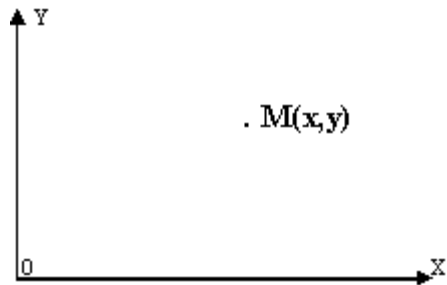
# **АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ**

Компьютерная графика

# План

- Аффинные преобразования
- Вспомогательные векторные алгоритмы

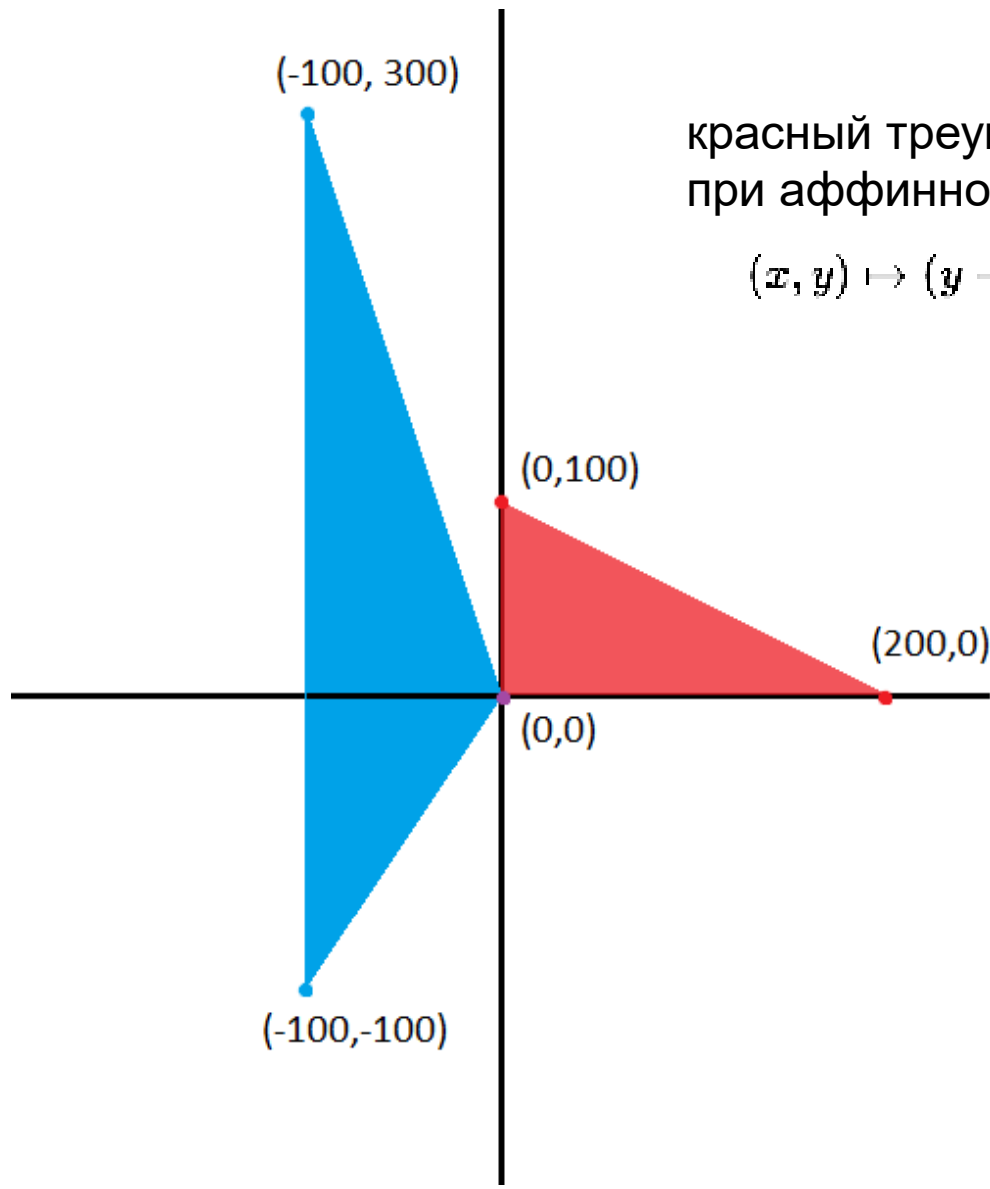
# Переход



от одной прямолинейной системы координат к другой описывается следующими соотношениями:

$$x^* = \alpha x + \beta y + \lambda, \quad y^* = \gamma x + \delta y + \mu, \quad (*)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — произвольные числа, связанные неравенством  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ .



красный треугольник переходит в синий при аффинном преобразовании

$$(x, y) \mapsto (y - 100, 2 \cdot x + y - 100)$$

# Аффинное преобразование (из википедии)

(от лат. *affinis* —соприкасающийся, близкий, смежный) — отображение плоскости или пространства в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые, пересекающиеся в пересекающиеся, скрещивающиеся в скрещивающиеся.

# Преобразование плоскости называется **аффинным**

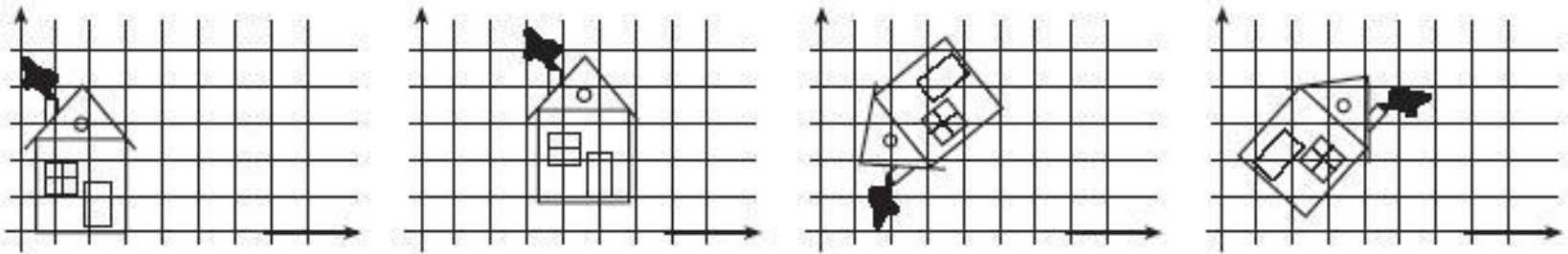
- если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.
- Преобразование (отображение) называется **взаимно однозначным** (биективным), если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

# Аффинные преобразования

- Движения
- Растяжения и сжатия относительно прямой

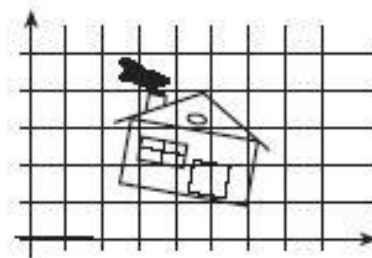
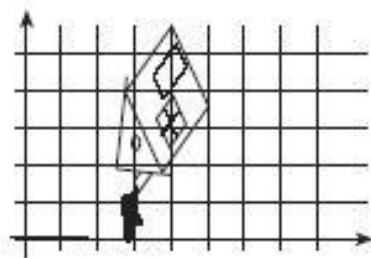
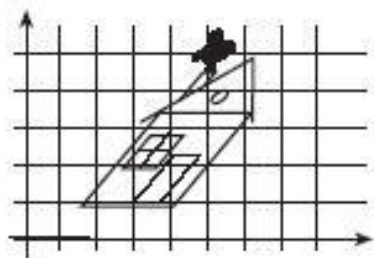
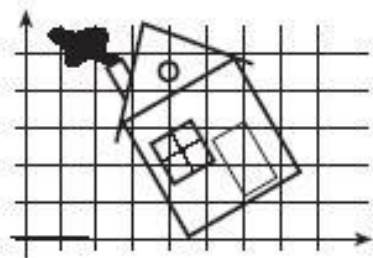
# Движения

- это такие преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно параллельные переносы, повороты, различные симметрии и их комбинации.





# Растяжения и сжатия относительно прямой



# Свойства аффинных преобразований

- Композиция аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование.
- Преобразование, обратное к аффинному, есть снова аффинное преобразование.
- Отношение площадей сохраняется.
- Отношение длин отрезков на прямой сохраняется.

# Базовые аффинные преобразования

- Поворот вокруг начала координат на угол  $\varphi$
- Растяжение/Сжатие
- Отражение
- Перенос

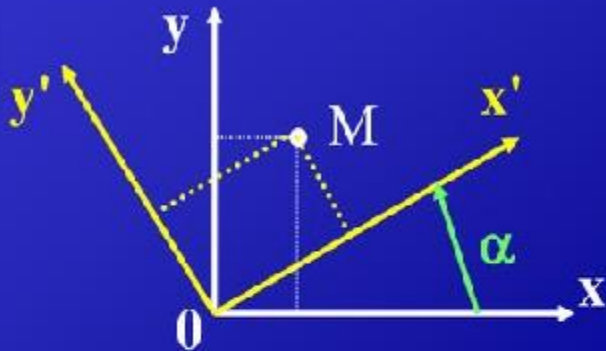
# Определение

Аффинное преобразование  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть преобразование вида

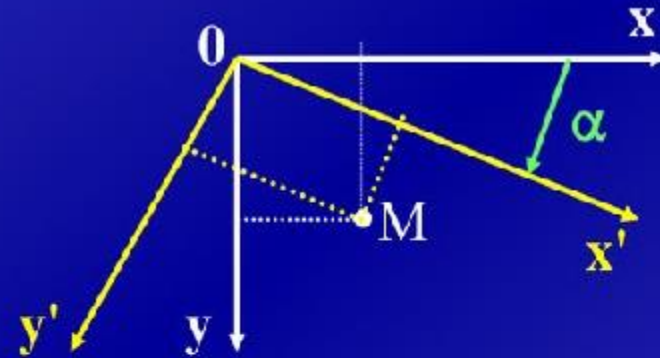
$$f(x) = M \cdot x + v,$$

где  $M$  — обратимая матрица и  $v \in \mathbb{R}^n$ .

## 1. Поворот.



$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Обратное преобразование:**

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Растяжение-сжатие осей координат.

$$\begin{cases} x' = x / k_x \\ y' = y / k_y \end{cases}$$



В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Пример:*

*$k_x = -1$  соответствует  
зеркальному отражению  
относительно оси  $y$ .*

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' k_x \\ y = y' k_y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. Параллельный сдвиг координат.

$$\begin{cases} x' = x - dx \\ y' = y - dy \end{cases}$$

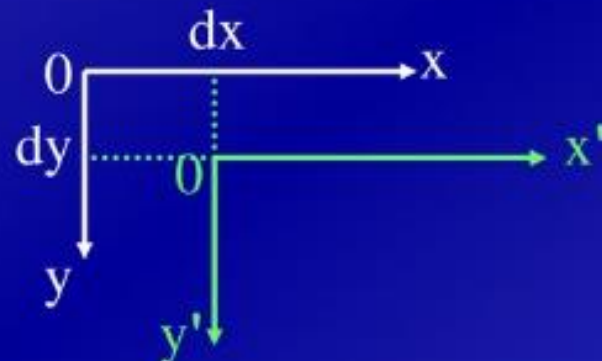
В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -dx & -dy & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' + dx \\ y = y' + dy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}$$



# Однородные координаты точки

- Однородными координатами точки называется любая тройка одновременно не равных нулю чисел  $x_1, x_2, x_3$ , связанных с заданными числами  $x$  и  $y$  следующими соотношениями:
- $x_1 / x_3 = x, \quad x_2 / x_3 = y.$



# Произвольная матрица аффинного преобразования

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

- A. Матрица вращения (rotation) ¶

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ¶$$

- B. Матрица растяжения /сжатия (dilatation). ¶

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ¶$$

- C. Матрица отражения (reflection). ¶

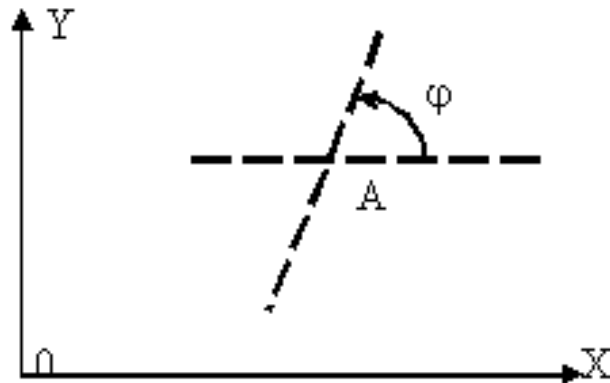
$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ¶$$

- D. Матрица переноса (translation). ¶

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix} ¶$$

# Пример1

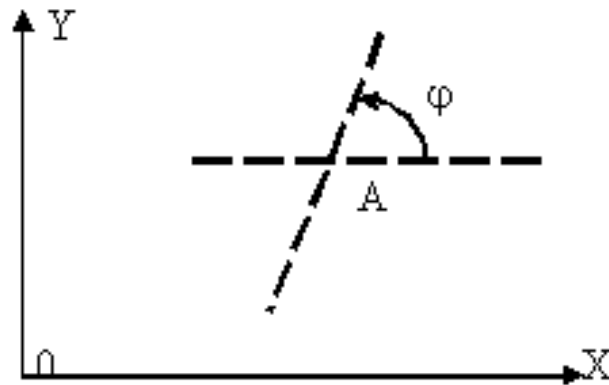
- Построить матрицу поворота вокруг точки  $A(a, b)$  на угол  $\varphi$



# Решение

- **1-й шаг.** Перенос на вектор  $A(-a, -b)$  для совмещения центра поворота с началом координат.

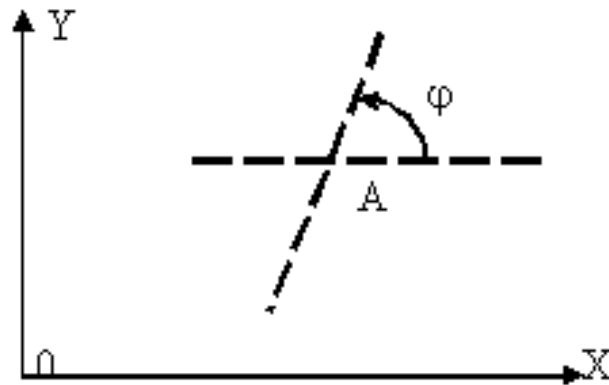
$$[T_{-a}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$



# Решение

- **2-й шаг.** Поворот на угол  $\varphi$ .

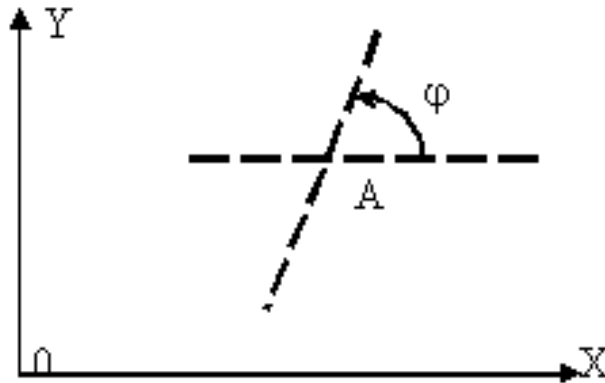
$$[R_{\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Решение

**3-й шаг.** Перенос на вектор  $A(a,b)$  для возвращения центра поворота в прежнее положение

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$



# Итоговая матрица

$$[T_{-a}] [R_{\varphi}] [T_a]$$

$$[T_{-a}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$(x^* \ y^* \ 1) = (x \ y \ 1) \times \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -a \times \cos(\varphi) + b \times \sin(\varphi) + a & -a \times \sin(\varphi) - b \times \cos(\varphi) + b & 1 \end{bmatrix}$$

## Пример 2

- Построить матрицу растяжения с коэффициентами растяжения  $\alpha$  вдоль оси абсцисс и  $\beta$  вдоль оси ординат и с центром в точке  $A(a, b)$ .



# Решение

- **1-й шаг.** Перенос на вектор  $-A(-a, -b)$  для совмещения центра растяжения с началом координат

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

- **2-й шаг.** Растяжение вдоль координатных осей с коэффициентами  $\alpha$  и  $\delta$  соответственно.

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **3-й шаг.** Перенос на вектор  $A(a, b)$  для возвращения центра растяжения в прежнее положение.

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Итоговая матрица

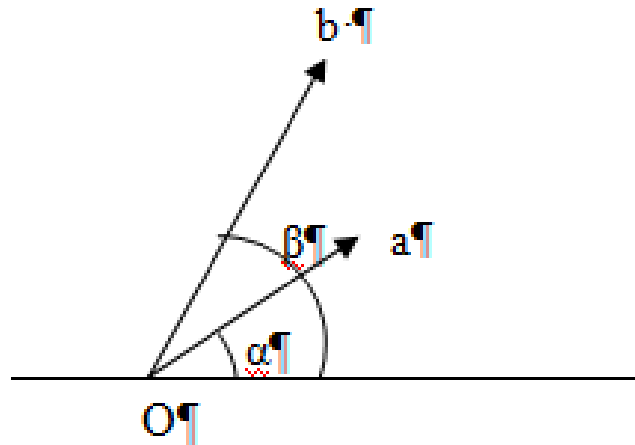
$$(x^* \quad y^* \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \times \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ (1-\alpha) \times a & (1-\delta) \times b & 1 \end{bmatrix}$$

# Вспомогательные векторные алгоритмы

- **Определить, где находится точка: справа или слева от ребра. (Ребро должно быть направленным.)**

# Определить, где находится точка: справа или слева от ребра

- Ребро должно быть направленным.



Точка  $b$  находится слева, если  $\sin(\beta - \alpha) > 0$ , то есть  $(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) > 0$

# Определить, где находится точка: справа или слева от ребра

- Обозначим:  $x_b, y_b, x_a, y_a$  – координаты точек. Из курса геометрии:  
 $\sin \beta = y_b/|b|$  ,  $\cos \alpha = x_a/|a|$  ,  $\cos \beta = x_b/|b|$  ,  $\sin \alpha = y_a/|a|$

$$\sin(\beta - \alpha) = (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha), \text{ и}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \sin \alpha = \frac{a_y}{|a|}, \cos \beta = \frac{b_x}{|b|}, \sin \beta = \frac{b_y}{|b|}, \text{ то}$$

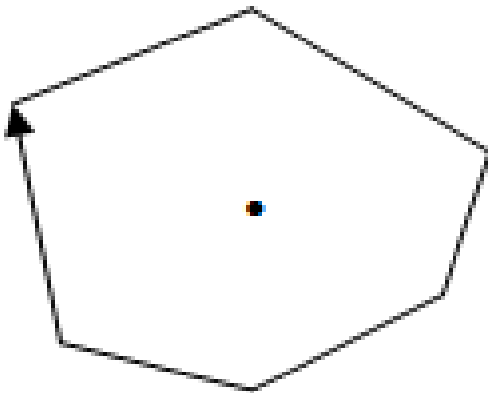
$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{\|a\| \|b\|} (x_a y_b - x_b y_a).$$

Получили условие:

если  $y_b \cdot x_a - x_b \cdot y_a > 0 \Rightarrow b$  **слева** от  $Oa$

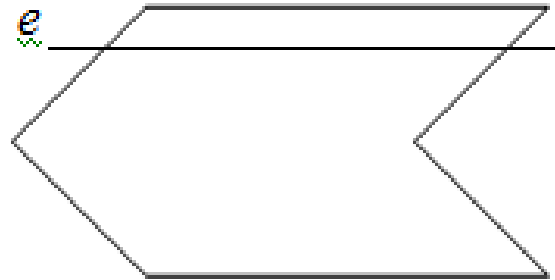
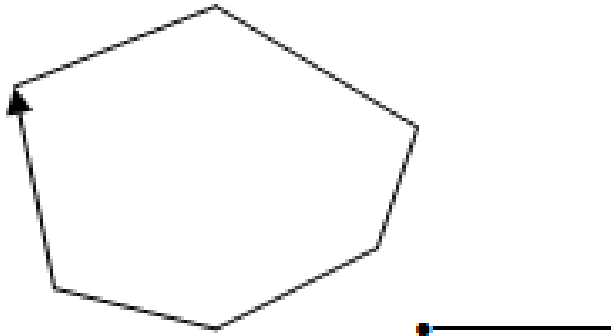
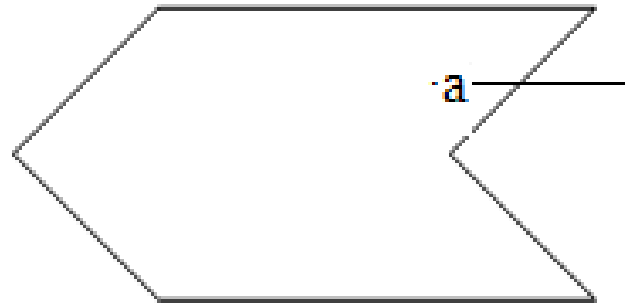
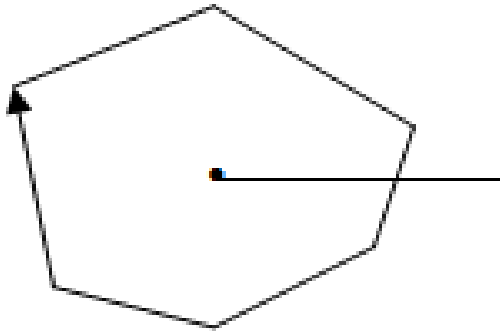
если  $y_b \cdot x_a - x_b \cdot y_a < 0 \Rightarrow b$  **справа** от  $Oa$

# Проверить, принадлежат ли точки выпуклому полигону

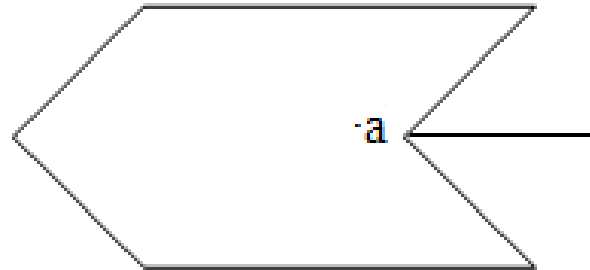
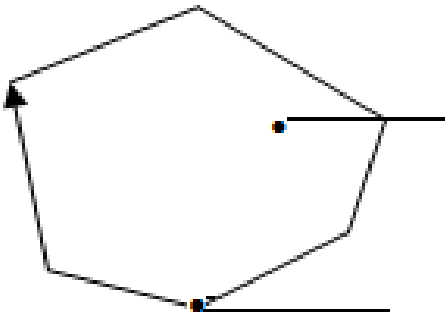


Всегда справа от ребра

# Проверить, принадлежат ли точки полигону – метод лучей

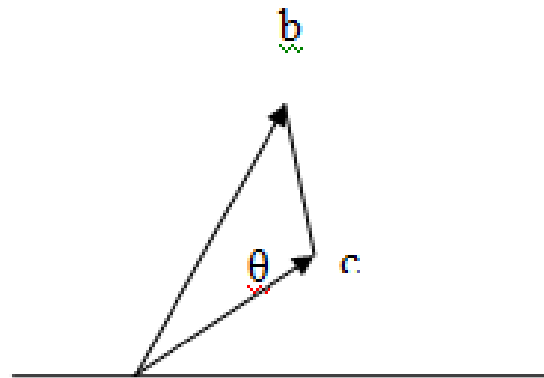
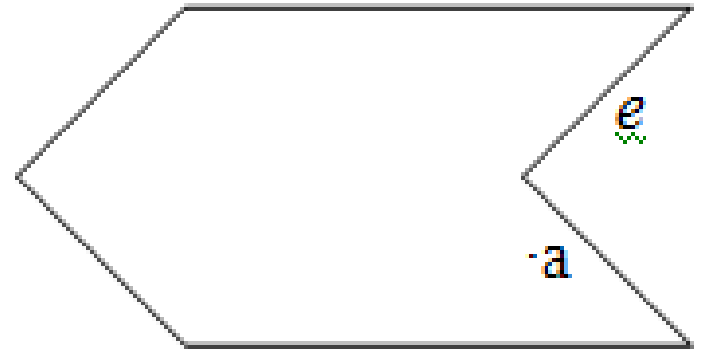
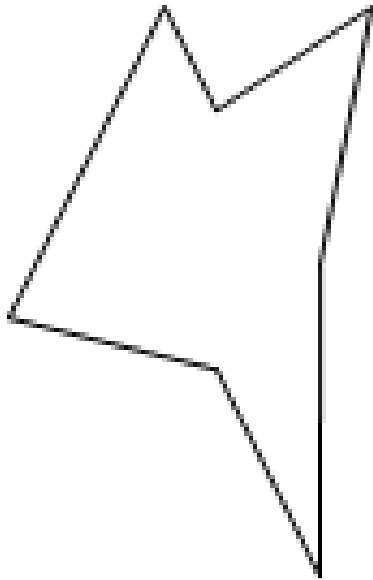


# Проверить, принадлежат ли точки полигону – метод лучей





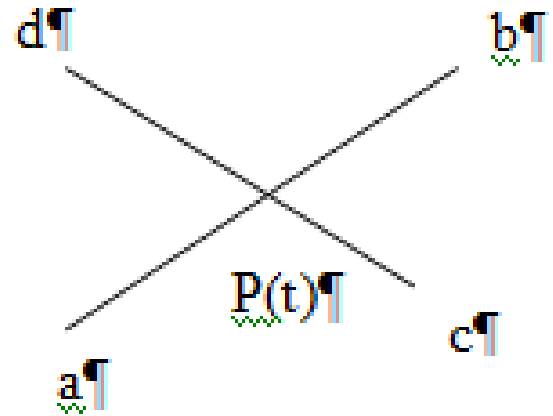
# Проверить, принадлежат ли точки произвольному полигону – метод углов.



# Проверить, пересекаются ли прямые

- Можно использовать способ определения прямых через параметрические уравнения.
- Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$P(t) = (1-t)a + tb \quad \text{или} \quad P(t) = a + t(b-a)$$



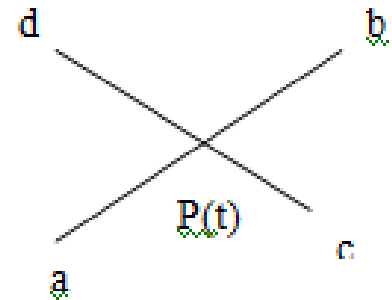
Если прямая линия  $ab$  описывается уравнением  $P(t) = a + t(b-a)$ , то будем искать значение  $t$  такое, что прямые линии  $ab$  и  $cd$  пересекаются в точке  $P(t)$ .

# Определение точки пересечения двух прямых

- Поскольку вектор  $P(t)-c$  должен совпадать с прямой линией  $cd$ , то и вектор  $P(t)-c$  и прямая линия  $cd$  должны быть перпендикулярны одному и тому же вектору  $n$
- Векторы  $(p(t)-c)$  и  $(d-c)$  – параллельны и коллинеарны
- Если вектор  $n$  – нормаль к  $dc$ , то чтобы узнать координаты  $n$  нужно в уравнении прямой заменить  $(x,y)$  на  $(-y, x)$ .

$$n(p(t) - c) = 0;$$

$$a \cdot b \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0, \text{ если, и только если } \theta \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 90 \text{ градусов.}$$



# Определение точки пересечения двух прямых

Следовательно, на основании теоремы о скалярном произведении нам необходимо решить относительно  $t$  уравнение

$$n(P(t) - c) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде

$$n(a+t(b-a)-c)=0.$$

Учитывая основные свойства скалярного произведения, получим

$$n \cdot (a-c) + n \cdot (t(b-a)) = 0.$$

Выводя за скобки параметр  $t$ , имеем

$$n \cdot (a-c) + t [n(b-a)] = 0.$$

Откуда следует

$$t = -\frac{n \cdot (a-c)}{n \cdot (b-a)}, \quad n \cdot (b-a) \neq 0.$$