«Теория алгоритмов»

ЮФУ, мехмат, 2.8–9 (ФИИТ), 2016/2017 учебный год, весенний семестр

Программа курса

Введение. Возникновение и предмет теории алгоритмов. Неформальное понятие алгоритма, свойства алгоритмов. Типы вычислительных задач, проблема разрешения, символьные вычисления (алфавит, слова, языки). Неформальное понятие вычислимой функции.

Модели вычислений. Бестиповое λ-исчисление: синтаксис, свободные и связанные переменные, α-эквивалентность термов, подстановка. Вычисление в λ-исчислении: β-редукция, нормальная форма терма. Теорема Чёрча—Россера, следствие, стратегии редукции. Программирование в λ-исчислении: логические значения и операции, нумералы Чёрча, арифметические операции, неподвижные точки и рекурсия, комбинатор неподвижной точки. Комбинаторная логика: базовые комбинаторы, преобразование λ-терма к SK-базису.

Машина Тьюринга: формальное определение, компоненты, конфигурации, запись переходов, машины-преобразователи и машины-распознаватели. Язык машины Тьюринга, задача распознавания языка, рекурсивно-перечислимые и рекурсивные языки. Вариации конструкции машин Тьюринга: память в состоянии, составные символы (многодорожечные ленты) и ограничение алфавита, многоленточные машины и их эквивалентность одноленточным, время имитации, забывающие машины, машины с полулентами, многоленточные машины со специализированными лентами. Недетерминированные машины Тьюринга, их эквивалентность детерминированным, время имитации.

Машины с неограниченными регистрами: алфавит, регистры, инструкции и их семантика, программы, порядок вычисления, частично вычислимые функции, примеры, расширение инструкций. Композиция функций и её реализация. Примитивная рекурсия и её реализация. Оператор неограниченного поиска и его реализация.

Эквивалентность моделей вычислений и тезис Чёрча—Тьюринга, полные по Тьюрингу языки программирования.

Теория вычислимости. Множества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$, задачи теории вычислимости. Множество примитивно рекурсивных функций $\mathcal{PR}$. Подстановки Гржегорчика. Примеры примитивно рекурсивных функций. Теоремы о вложении $\mathcal{PR} \subset \mathcal{R}$ и замкнутости $\mathcal{R}$. Рекурсивные и примитивно рекурсивные отношения ($\mathcal{R}_*$ и $\mathcal{PR}_*$): определение, связь между функциями и отношениями, замкнутость относительно логических операций, пример. Подстановка в отношениях, следствие о графиках примитивно рекурсивной и рекурсивной функций. Ограниченная квантификация и замкнутость $\mathcal{PR}_*$ и $\mathcal{R}_*$ относительно неё. Оператор ограниченного поиска и замкнутость $\mathcal{PR}$ и $\mathcal{R}$ относительно него. Примеры: рекурсивность некоторых числовых функций. Кодирование и декодирование числовых последовательностей. Кодирование инструкций и регистровых машин в целом. Проверка кода регистровой машины. Конфигурации вычисления и переходы между ними: формальное определение, проверка возможности перехода между конфигурациями. Завершающееся вычисление и его код. Нормализация регистровой машины, проверка соответствия вычисления машине (предикат Comp). Предикат Клини и теорема Клини о нормальной форме, теоретико-числовая характеризация множества частично вычислимых функций. Универсальная машина, всюду неопределённые машины. Перечисление всех частично рекурсивных функций в нотации Роджерса.

Полурекурсивные отношения: определение, эквивалентные условия, график частично рекурсивной функции. Понятие задачи, разрешимость, неразрешимость и полурекурсивность, теорема о задаче и её дополнении. Проблема останова как пример неразрешимой задачи. Свойства замкнутости множества полурекурсивных отношений. Сводимость и примеры неразрешимых задач.

Неразрешимость за пределами теории алгоритмов: проблема разрешения и первая теорема Гёделя о неполноте, проблема соответствий Поста, проблема смертности во множестве квадратных матриц, десятая проблема Гильберта.

Теория сложности. Полиномиальная и экспоненциальная сложность вычислений, классы DTIME, P и EXP. Класс NP (определение через сертификаты), примеры задач из класса NP. Соотношение между классами P, NP и EXP. Альтернативное определение класса NP (через недетерминированную машину Тьюринга), эквивалентность определений.

Полиномиальная сводимость по Карпу, NP-трудные и NP-полные задачи. NP-полные проблемы, метод доказательства NP-полноты. Задача SAT, теорема Кука—Левина. NP-полнота задач CSAT и 3-SAT. NP-полнота задачи 0/1-целочисленного программирования. Примеры NP-полных задач на графах: задача о независимом множестве, задачи о существовании гамильтонова пути в ориентированном и неориентированном графах, задача о гамильтоновом цикле в неориентированном графе, задача коммивояжёра (в версии «да/нет»).

Класс PSPACE и теорема о вложении PSPACE в EXP. Класс NPSPACE и теорема Сэвитча о равенстве классов PSPACE и NPSPACE. Понятие о PSPACE-полноте, PSPACE-полная задача (полностью квантифицированная булева формула).

Литература

1. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2008. — 528 с.
2. Tourlakis G. Theory of Computation. — Wiley, 2012.
3. Arora S., Barak B. Computational Complexity: A Modern Approach. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.