

Кривые и поверхности

Сплайны

Представление кривых на плоскости

- явный способ (explicit curves)

$$y = f(x)$$

$$y = \sin(x)$$

- неявный способ (implicit)

$$f(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

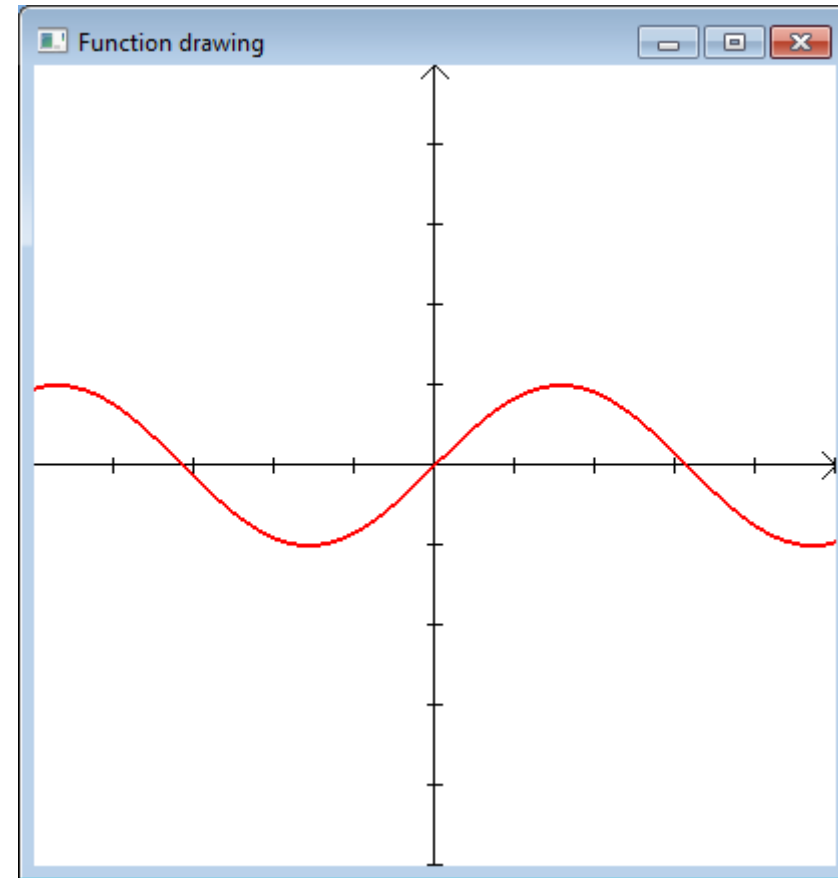
- параметрический способ (parametric curves)

$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

Явный способ (explicit curves)

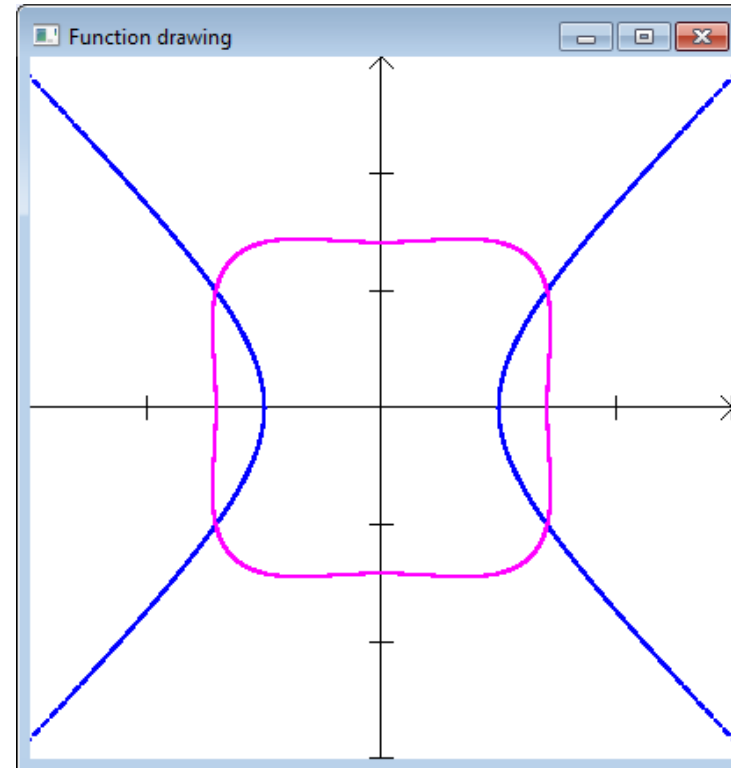
```
x = MinX;  
MoveTo (x, F(x));  
while (x <= MaxX)  
{  
    LineTo (x, F(x));  
    x = x + Step;  
}
```



— $y = \sin(x)$

Неявный способ (implicit)

```
y = MinY;  
while (y <= MaxY)  
{  
  x = MinX;  
  while (x <= MaxX)  
  {  
    f = F(x, y);  
    SetPixel(x, y);  
    x = x + Step;  
  }  
  y = y + StepY;  
}
```

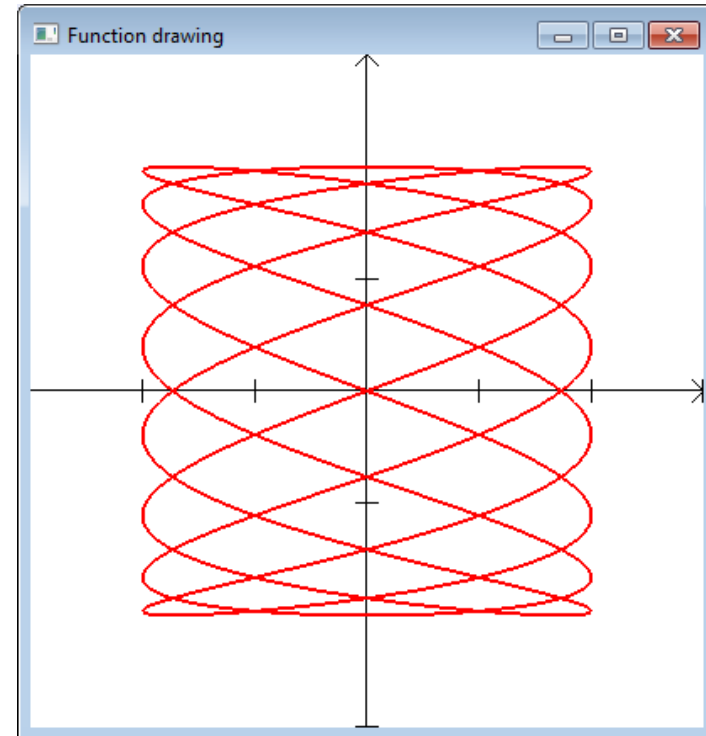


— $x^2 - y^2 - 1 = 0$

— $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2 = 0$

Параметрический способ (parametric curves)

```
t = A;  
x = Fx(t);  
y = Fy(t);  
MoveTo(x, y);  
while (t <= B)  
{  
    x = Fx(t);  
    y = Fy(t);  
    LineTo(x, y);  
    t = t + Step;  
}
```



— $\left\{ \begin{array}{l} f_x(t) = 2 \cdot \sin(8 \cdot t) \\ f_y(t) = 2 \cdot \sin(3 \cdot t) \end{array} \right.$

Кривые Безье или Кривые Бернштейна-Безье

60-е годы XX века

- Пьер Безье (Pierre Bézier) из автомобилестроительной компании «Рено»
- Поль де Кастельжо (Paul de Faget de Casteljaou) из компании «Ситроен»
- Сергей Натанович Бернштейн

Пьер Безье (Pierre Bézier)

Французский инженер и
патентообладатель кривых Безье и поверхностей Безье

1962 год

В компании Рено
(1933 - 1975)
разработал
компьютерную
систему
проектирования
UNISURF,
предназначенную для
проектирования
кузовов автомобилей.



В 1985 году
получил награду от
ACM SIGGRAPH за
пожизненный вклад
в компьютерную
графику и
интерактивную
технику.

1 сентября 1910 г - 25 ноября 1999 г. (89 лет)

Поль де Кастельжо

1959

Производственная
тайна до конца
1960-х



Рекурсивный способ
определения кривых
(алгоритм де Кастельжо)

19 ноября 1930

Бернштейн, Сергей Натанович

советский математик

Кривые Безье –
частный случай
многочленов
Бернштейна,
описанных
Сергеем
Натановичем
Бернштейном в
1912 году



При доказательстве
аппроксимационной
теоремы
Вейерштрасса
Бернштейном были
построены полиномы,
оказавшиеся
полезными в самых
разных областях
математики. Теперь
их называют
полиномами
Бернштейна.

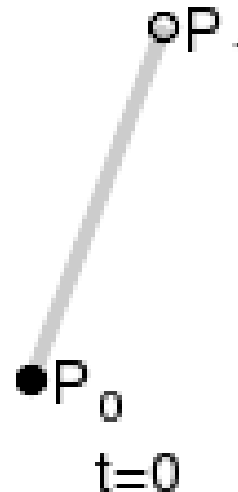
5 марта 1880 — 26 октября 1968

Кривые Безье (Pierre Bézier): линейные

- Линейная интерполяция между конечными точками

$$B = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$t \in [0, 1]$$



Кривые Безье: квадратичные

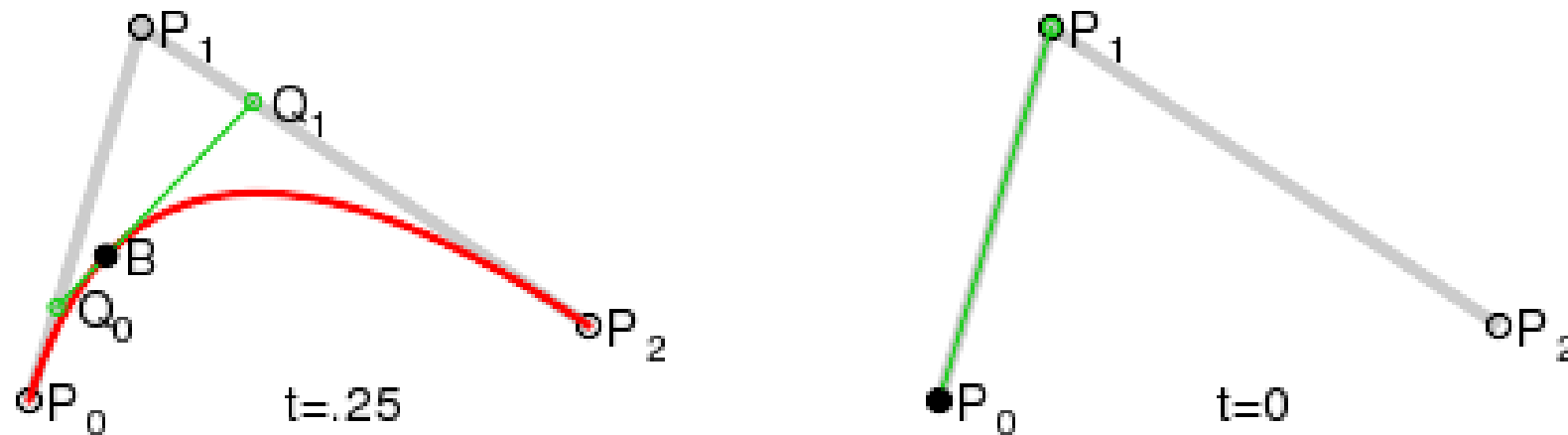
- Композиция нескольких линейных кривых:

$$Q_0 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_1 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

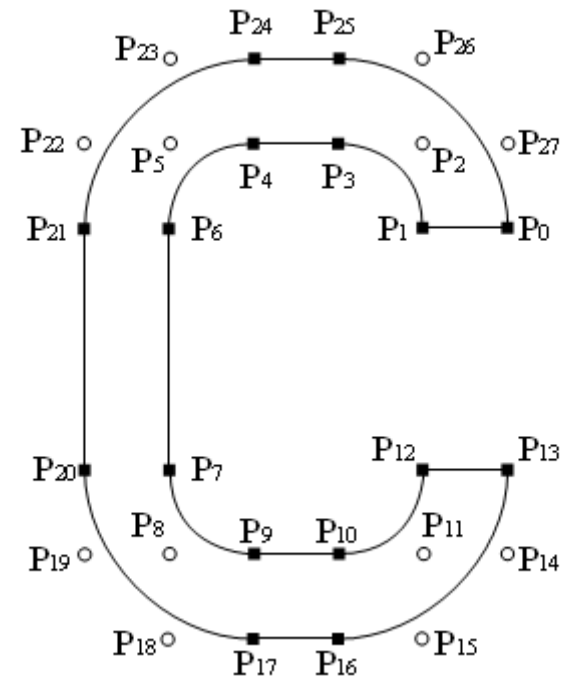
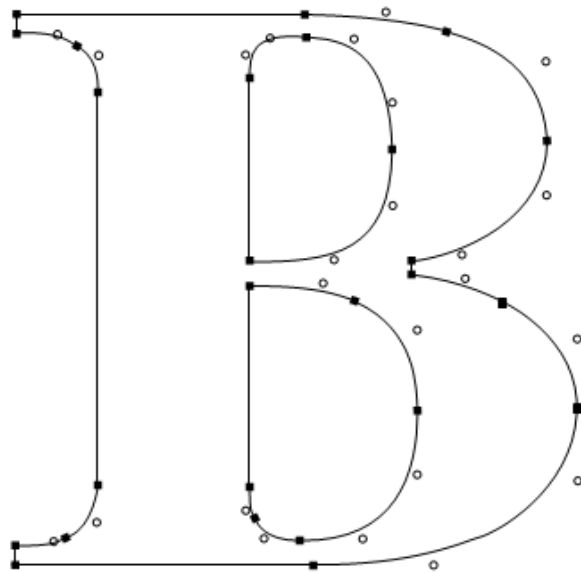
$$B = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t = P_0 \cdot (1-t)^2 + 2 \cdot P_1 \cdot (1-t) \cdot t + P_2 \cdot t^2$$

$$t \in [0, 1]$$



Применение квадратичных кривых Безье

- в шрифтах TrueType
- в SWF файлах



Кривые Безье: кубические

- Кубические кривые Безье

$$Q_0 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_1 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

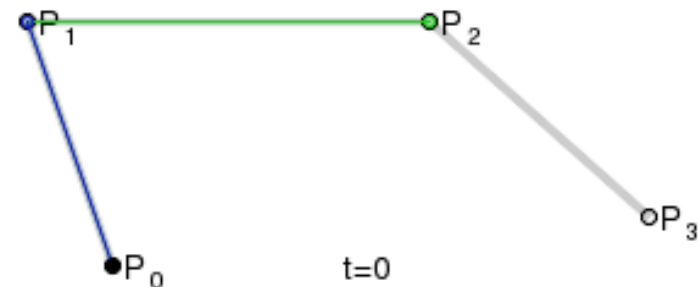
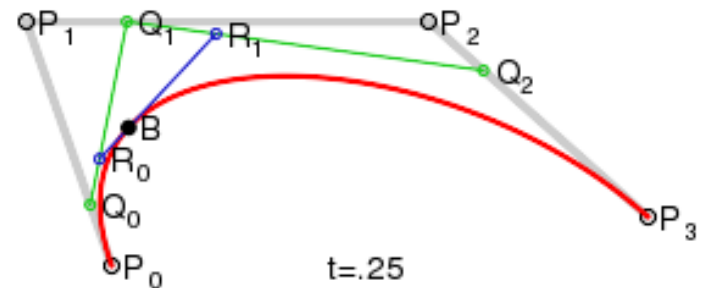
$$Q_2 = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$

$$R_0 = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t$$

$$R_1 = Q_1 \cdot (1-t) + Q_2 \cdot t$$

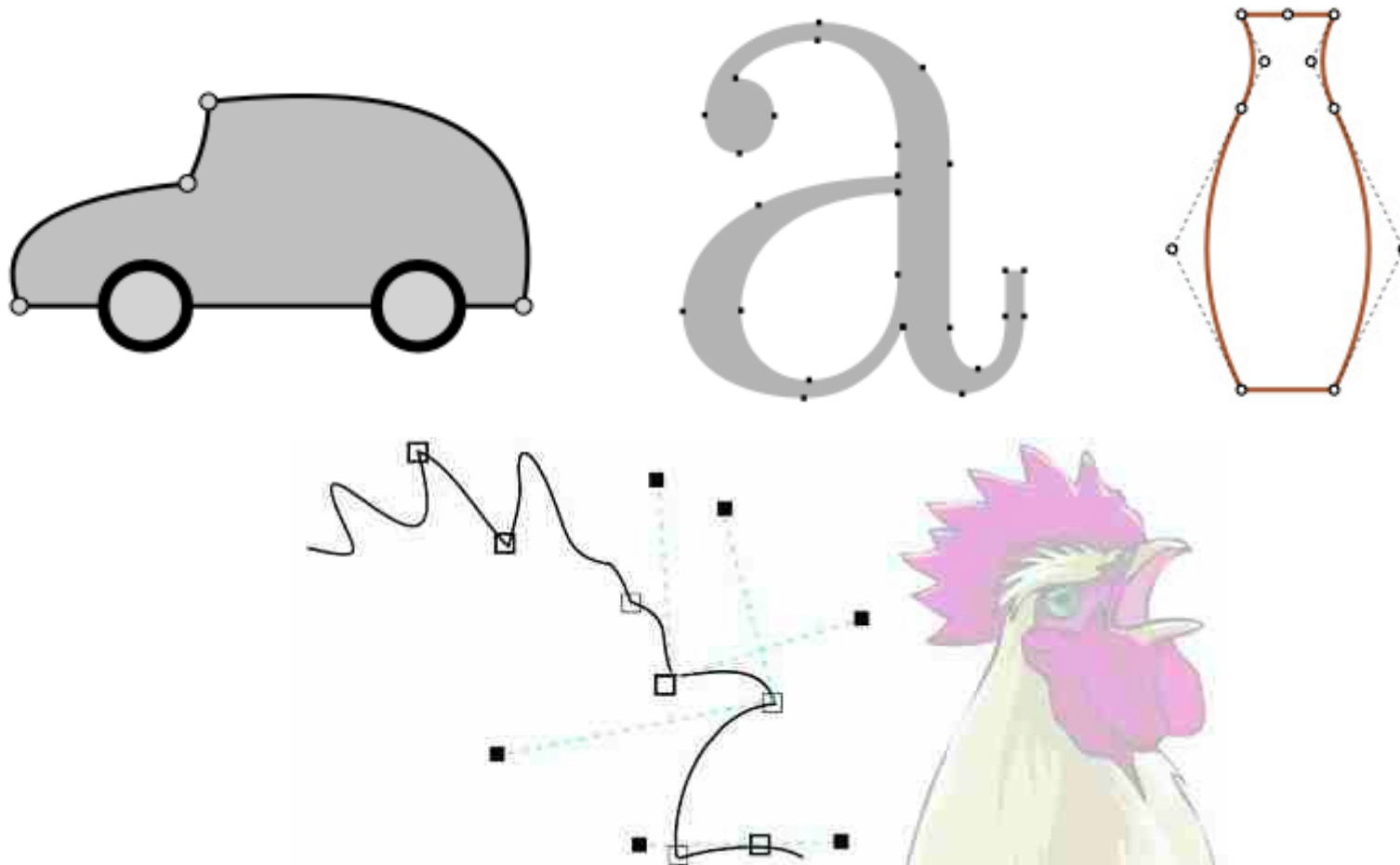
$$B = R_0 \cdot (1-t) + R_1 \cdot t =$$

$$= P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3$$

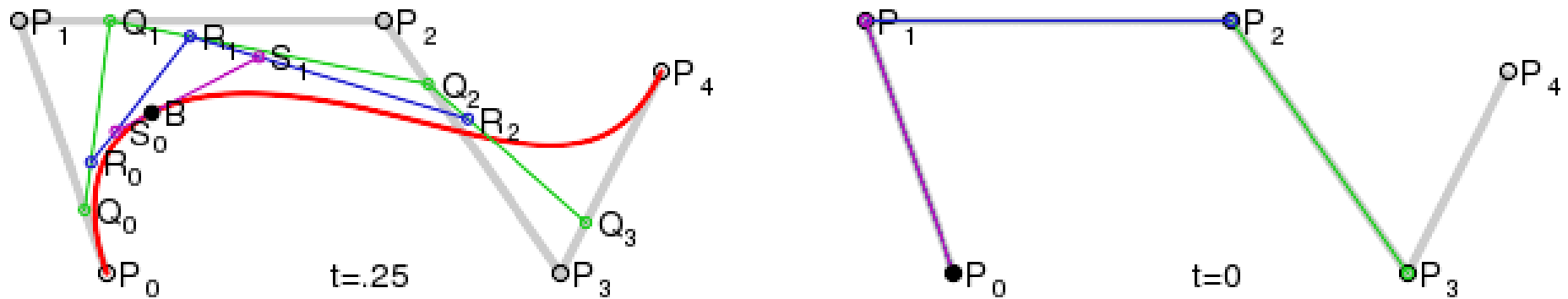


$$t \in [0, 1]$$

Применение кривых Безье



Кривые Безье: старшие степени



$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)$$

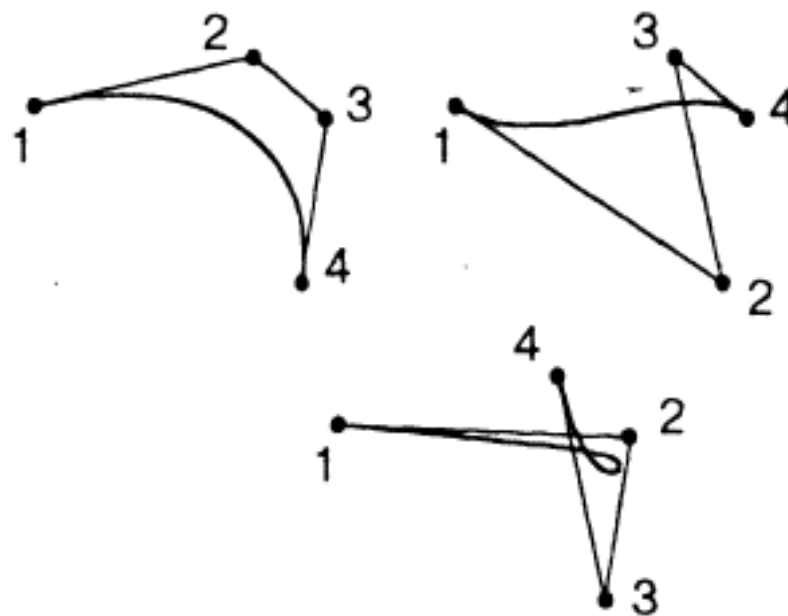
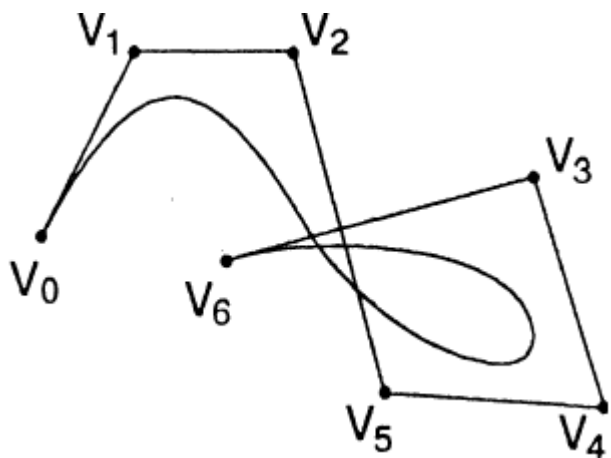
$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

полином Бернштейна

$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

число сочетаний

Свойства кривых Безье

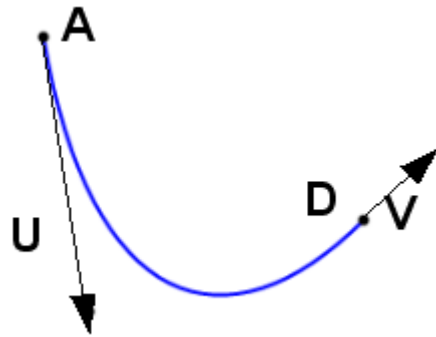


Кубические кривые Безье: матричная запись

$$\begin{aligned} B(t) &= P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3 = \\ &= t^3 \cdot (-P_0 + 3 \cdot P_1 - 3 \cdot P_2 + P_3) + t^2 \cdot (3 \cdot P_0 - 6 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2) + \\ &\quad t \cdot (-3 \cdot P_0 + 3 \cdot P_1) + P_0 = \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = VMT = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Кубические сплайны Эрмита



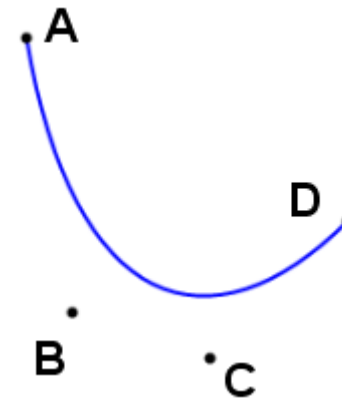
$$B = A + (U/3)$$

$$C = D - (V/3)$$

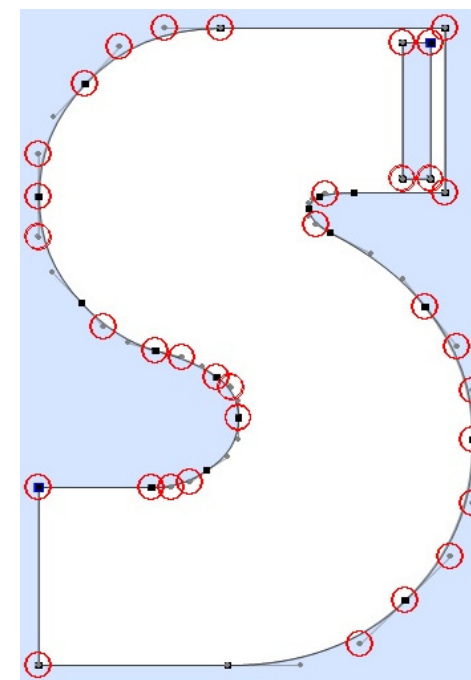
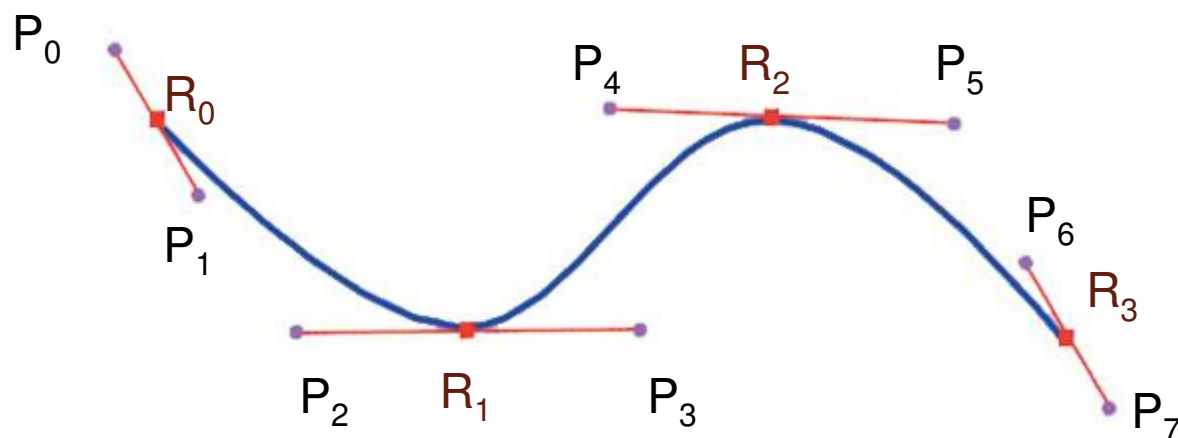
Обратное преобразование:

$$U = 3(B - A)$$

$$V = 3(D - C)$$



Составная кубическая кривая Безье



Составная кубическая кривая Безье

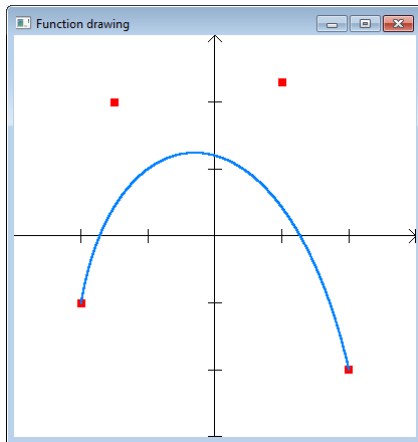
$V_0, V_1, \dots, V_{m-1}, V_m$ Точки составной кривой Безье

$V_{3i-1}, V_{3i}, V_{3i+1}$ Каждые 3 точки лежат на одной прямой

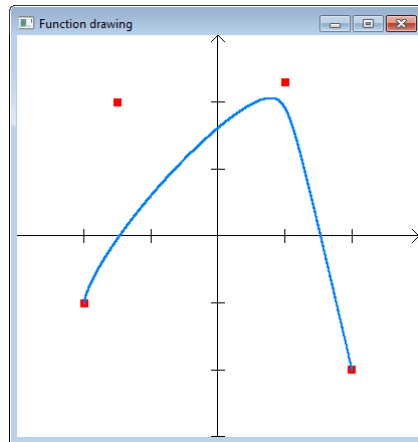
$$V_2^{i-1}, V_3^{i-1} = V_0^i, V_1^i$$

Рациональные кривые Безье

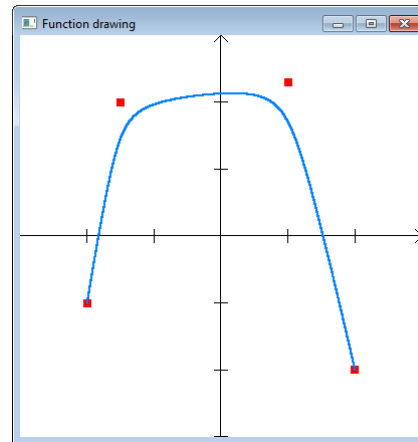
$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$



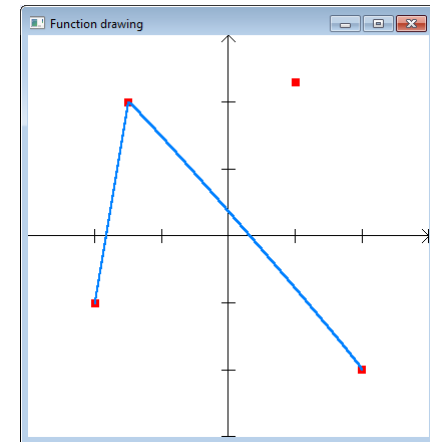
$w=(1, 1, 1, 1)$



$w=(1, 1, 10, 1)$



$w=(1, 30, 30, 1)$



$w=(1, 1000, 1, 1)$

В-сплайны

- В-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье:
 - во-первых, степень полинома В-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями);
 - во-вторых, В-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой.
- Платой за это является бОльшая сложность В-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

B-сплайны

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = VMT = (P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Неоднородный рациональный B-сплайн, NURBS

- В 1960-х было установлено, что неравномерные рациональные B-сплайны являются обобщением сплайнов Безье, которые могут быть определены как равномерные рациональные B-сплайны.
- Первой работой с упоминанием NURBS стала диссертация Кена Версприлла (Ken Versprille), аспиранта Сиракузского университета в Нью-Йорке [Versprille 1975].
- Интерактивная отрисовка кривых и поверхностей NURBS в реальном времени стала впервые доступна на рабочих станциях Silicon Graphics в 1989 году

Maya, 3ds Max, Blender

Представление поверхностей

$$z = f(x, y)$$

- явный способ (explicit curves)

$$f(x, y, z) = 0$$

- неявный способ (implicit)

$$\vec{P} = \vec{F}(u, v)$$

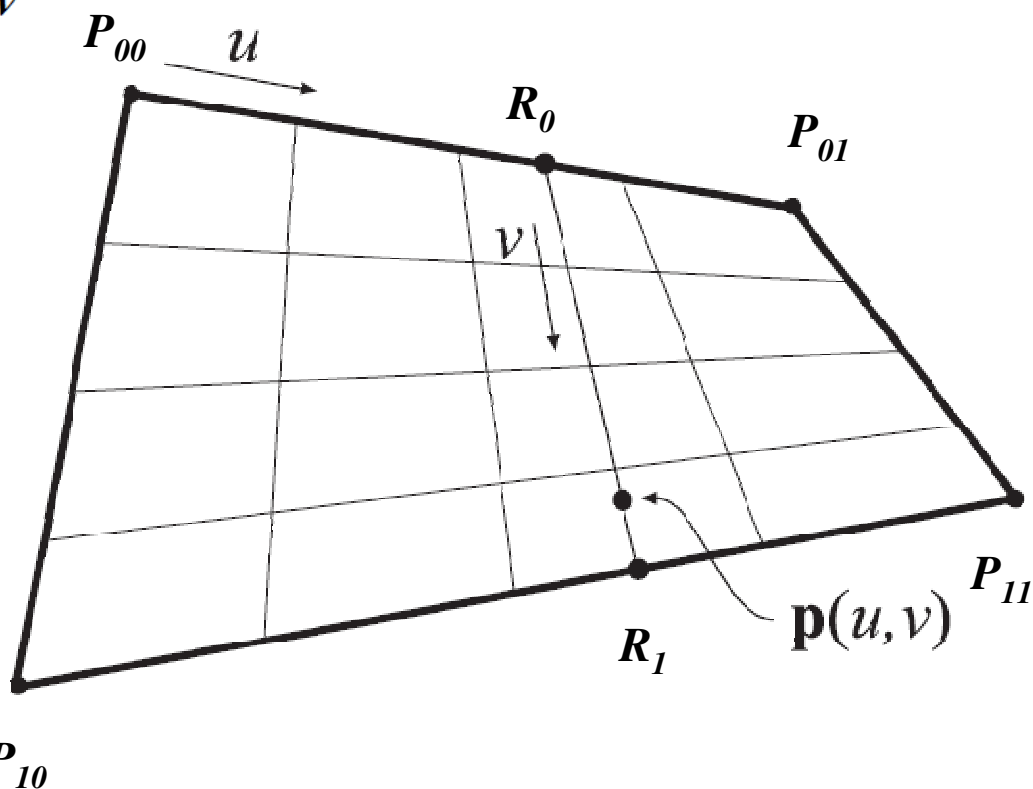
- параметрический способ (parametric curves)

Поверхности Безье: билинейные

$$R_0 = P_{00} \cdot (1 - u) + P_{01} \cdot u$$

$$R_1 = P_{10} \cdot (1 - u) + P_{11} \cdot u$$

$$P(u, v) = R_0 \cdot (1 - v) + R_1 \cdot v$$

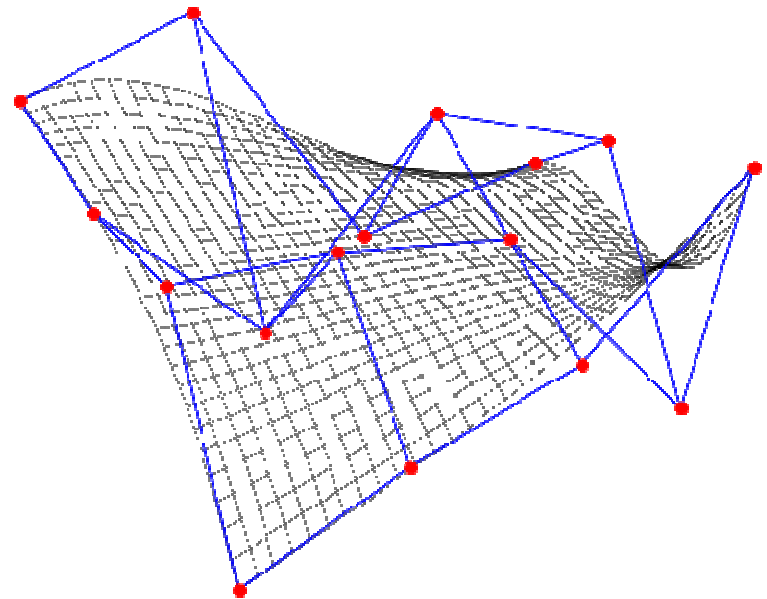


Поверхности Безье (общий случай)

$$B(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot \mathbf{b}_{j,m}(u) \cdot \mathbf{b}_{i,n}(v), \quad u, v \in [0, 1]$$

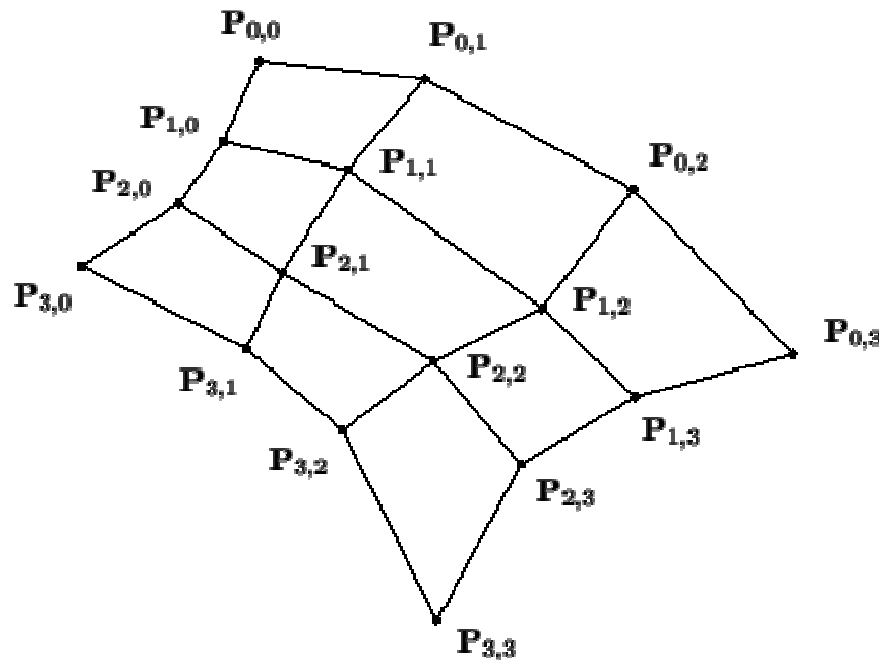
$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$



Бикубическая поверхность Безье

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = UM^T P M V = \begin{pmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бикубическая поверхность Безье: сопряжение

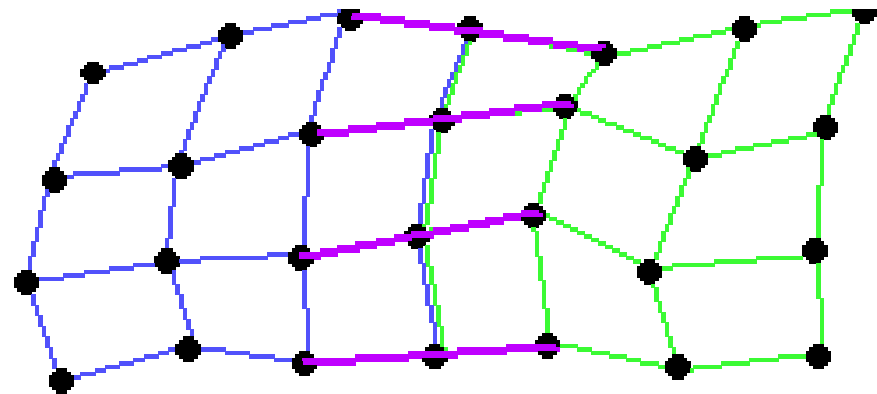
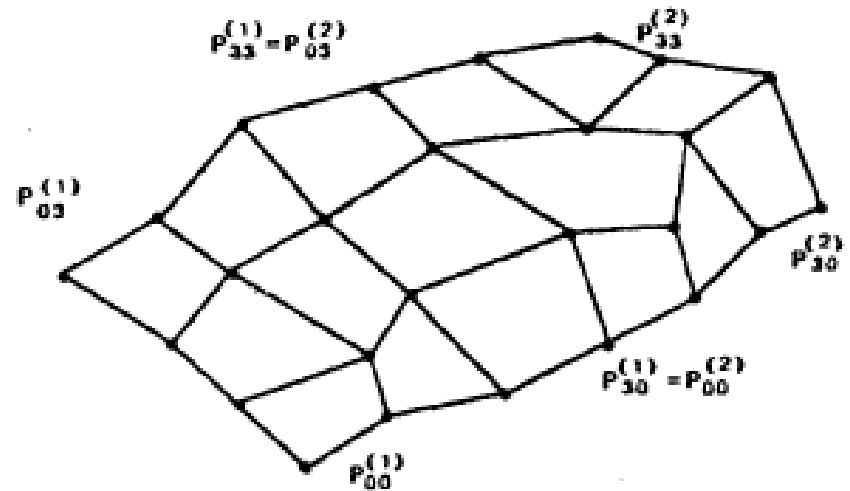
$$P_{ij}^1, i = 0,1,2,3; j = 0,1,2,3$$

$$P_{ij}^2, i = 0,1,2,3; j = 0,1,2,3$$

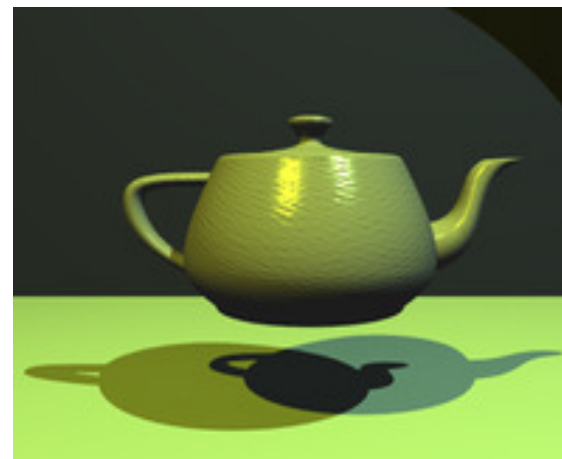
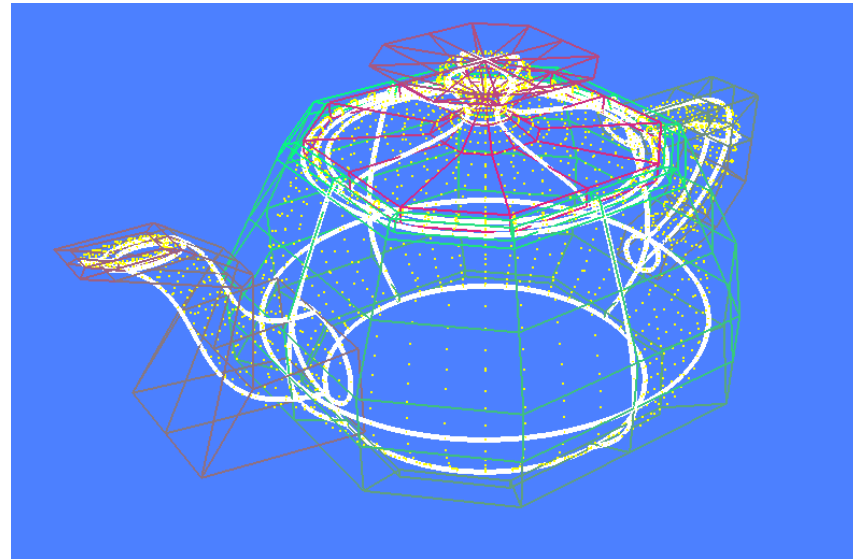
$$P_{3j}^1 = P_{0j}^2, j = 0,1,2,3$$

$$P_{2j}^1, P_{3j}^1 = P_{0j}^2, P_{1j}^2, j = 0,1,2,3$$

$$\frac{|P_{2j}^1 P_{3j}^1|}{|P_{0j}^2 P_{1j}^2|}, j = 0,1,2,3$$



Бикубическая поверхность Безье: пример



NURBS – поверхности

