

На каждой странице будет подсказка по решению некоторой части задачи. Попробуйте прочесть одну подсказку и решить задачу. Если не выходит, переходите на следующую страницу.

Формально, в задаче требуется найти путь наибольшей пропускной способности  $D$  раз. При этом нужно учитывать необходимость получения лексикографического минимума среди набора одинаковых путей наибольшей пропускной способности.

Проблема 1. Как обрабатывать запросы Аналитического Центра?

Отсортируем запросы в порядке возрастания дня, в который этот запрос надо выполнить. В процессе моделирования  $D$  дней достаточно ответить на все запросы для текущего дня и запомнить номер последнего запроса текущего дня. Тогда при моделировании следующего дня, легко определить очередной по времени запрос. Таким образом, поиск нужных запросов займет  $O(1)$ . После окончания моделирования отсортируем запросы в порядке, в котором они указаны в исходном файле и выведем в выходной файл. Итого, работа с запросами займет  $O(Q \log Q)$ .

Если запросы не сортировать, то обработка запросов займет  $O(Q \cdot D)$ . Вообще говоря, при заданных ограничениях и то и то другое решение должно занимать примерно одинаковое время.

Проблема 2. Найти путь наибольшей пропускной способности.

Решение можно найти в конспекте. Коротко: построить правильную нумерацию, перебрать вершины в порядке правильной нумерации и посчитать наибольшую пропускную способность путей, проходящих через каждую из входящих дуг.

Теперь осталось понять, что делать, если путей наибольшей пропускной способности несколько.

Проблема 3. Как определять лексикографически наименьший путь?

Для этого имеет смысл отсортировать списки смежностей каждой вершины в порядке возрастания оригинальных номеров вершин. Рассмотрим пример. Из вершины 0 выходит три дуги: (0,1), (0,2), (0,3). Запустив алгоритм, описанный в решении проблемы 1, стало известно, что по дугам (0,2) и (0,3) проходят пути максимальной пропускной способности, а по дуге (0,1) нет. Первая дуга, которая помечена как дуга, по которой проходит путь наибольшей пропускной способности, будет принадлежать лексикографически наименьшему пути. Т.к. дуги отсортированы по номеру концевой вершины. В нашем примере, это дуга (0,2).

Стоит помнить, что после топологической сортировки, нумерация будет отличаться от оригинальной, а сортировать необходимо именно в порядке оригинальной нумерации.

Теперь осталось понять, как сделать так, чтобы нужные дуги в списках смежностей не приходилось искать за  $O(N)$ . А то можно не уложиться в таймлимит.

Проблема 4. Как решить задачу за приемлемое время?

Рассмотрим один из вариантов решения, укладывающихся в таймлимит. Задачу можно решить за  $O(Q \log Q + M + D * M)$  следующим способом:

1. Сортируем запросы.
2. Инвертируем исходный граф и сортируем его списки смежности в лексикографическом порядке.
3. Запускаем топологическую сортировку на полученном графе.
4. Моделируем  $D$  дней и в процессе моделирования отвечаем на запросы.
5. Выводим ответы на запросы в нужном порядке.

Если искать путь наибольшей пропускной способности для оригинального графа, то пути будут сохраняться в порядке «от конца к началу». Инвертировав граф, мы обеспечим хранение путей в массиве предшествования в порядке «от начала к концу». Остается учесть, что пути, найденные позже (а значит лексикографически большие), не должны затирать пути, найденные раньше. Тогда при восстановлении пути от начала к концу, мы всегда будем получать лексикографически меньший. При таком подходе на моделирование одного дня будет уходить  $O(M+P)$ , где  $P$  количество дуг в найденном пути наибольшей пропускной способности.