Предварительные сведения

В дальнейшем, если не оговорено противное, слово «число» будет означать *комплексное* число. Множество всех вещественных (комплексных) чисел, как обычно, будем обозначать через $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Для комплексного числа z запись $z = a + bi$ всегда будет означать, что числа a и b являются вещественными.

Мы будем рассматривать функции вещественной переменной, принимающие комплексные значения. Для таких функций понятия предела, непрерывности и дифференцируемости вводятся совершенно аналогично используемым в курсе математического анализа.

Приведем для примера определение предела последовательности *комплексных* чисел.

Определение. Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ комплексных чисел сходится к комплексному числу a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N(= N(\varepsilon))$, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Числа последовательности комплексных чисел запишем в виде $a_n = u_n + iv_n$. Тогда сходимость комплексной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ равносильна сходимости двух последовательностей вещественных чисел $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Это легко следует из такой оценки: для произвольного комплексного числа $u + vi$

$$\max\{|u|,|v|\} \leq |u + vi| \leq \sqrt{2} \cdot \max\{|u|,|v|\}.$$

Для этого случая справедливы основные свойства пределов (кроме свойств, связанных с неравенствами, поскольку для комплексных чисел отношения «больше» и «меньше» не вводятся).

По аналогии вводятся понятия предела функции и производной функции. Отметим, что если функция f определена в окрестности U точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеет вид $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in U$, где функции u и v принимают вещественные значения, то существование производной функции f в точке x_0 равносильно существованию производных функций u и v в этой точке, и тогда $f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0)$. Для производных комплекснозначных функций остаются в силе основные свойства производных из курса математического анализа (производная суммы и произведения функций, производная многочлена с комплексными коэффициентами).

Приведем также определение экспоненциальной функции с комплексным показателем. Если $z = a + bi$, то полагают $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$. Из этого определения следует, что $|e^{a+bi}| = e^a$ и, следовательно, экспоненциальная функция комплексного аргумента нигде не обращается в ноль.

Введенная функция сохраняет основное свойство показательной функции: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ для любых z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Действительно,

$$e^{a+bi}e^{c+di} = e^a(\cos b + i\sin b)e^c(\cos d + i\sin d) =$$
$$= e^{a+c}(\cos(b+d) + i\sin(b+d)) = e^{(a+c)+i(b+d)}.$$

Для произвольного $\alpha \in \mathbb{C}$ имеет место равенство $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$. Действительно, пусть $\alpha = a + bi$. Тогда

$$(e^{\alpha x})' = (e^{ax}(\cos bx + i\sin bx))' =$$
$$= ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + e^{ax}(-b\sin bx + ib\cos bx) =$$
$$= e^{ax}((a+bi)\cos bx + i(a+bi)\sin bx)) =$$
$$= (a+bi)e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = \alpha e^{\alpha x}.$$

Замечание. Экспоненциальную функцию комплексного аргумента можно ввести следующей формулой:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Здесь в правой части находится ряд с комплексными членами, который сходится для всех значений $z \in \mathbb{C}$. Можно доказать, что такое определение равносильно предыдущему.

Напомним некоторые определения и утверждения теории многочленов.

Говорят, что ненулевой многочлен $f(x)$ делит многочлен $g(x)$ если существует такой многочлен $h(x)$, что $g(x) = f(x)h(x)$ для всех x. Сокращенно наличие такого соотношения обозначается так: $f(x) \mid g(x)$.

Кратностью корня α многочлена f называется такое натуральное число k, что

$$(x-\alpha)^k \mid f(x), \quad (x-\alpha)^{k+1} \nmid f(x).$$

Эти условия равносильны выполнению соотношений

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

В частности, для простого корня ($k = 1$) $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

Многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами имеет точно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Отсюда, в частности, следует, что если многочлен $p(x)$ тождественно равен нулю на некотором промежутке[1], то этот многочлен является нулевым. Действительно, множество точек любого промежутка является бесконечным, а ненулевой многочлен может обращаться в ноль только в конечном множестве точек.

---

[1] Говоря «промежуток», мы, разумеется, исключаем из рассмотрения отрезок, начало которого совпадает с его концом.

Нам потребуется следующее утверждение. Если многочлен с вещественными коэффициентами имеет *невещественный* корень $\alpha+\beta i$, то он имеет корень $\alpha-\beta i$ той же кратности.

Говорят, что многочлен f, записанный в виде

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n,$$

имеет *формальную* степень n. Здесь не делается никаких предположений о значении коэффициента a_0. Отметим, что эта характеристика определяется не самим многочленом, а способом его записи. Например, многочлены $x+2$, $0\cdot x^2+x+2$, $0\cdot x^3+0\cdot x^2+x+2$ имеют формальные степени 1, 2 и 3 соответственно.

Напомним также следующие факты из курса алгебры.

Квадратная однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы равен нулю.

Квадратная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

является определенной (то есть имеет единственное решение) в том и только том случае, когда определитель ее основной матрицы отличен от нуля. Это утверждение называется *теоремой Крамера.*

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где α_1, α_2, …, α_n — произвольные числа, называется *определителем Вандермонда.*

Определитель Вандермонда отличен от нуля тогда и только тогда, когда, все числа α_1, α_2, …, α_n попарно различны.

Основные определения

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение следующего вида:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x).$$

Будем предполагать, что все функции a_i и правая часть f определены и непрерывны на некотором промежутке I, который считается фиксированным. Кроме того, всегда предполагается, что функция a_0 не обращается в ноль на промежутке I, так что, деля обе части уравнения на a_0, можно было бы ограничиться случаем $a_0(x) \equiv 1$.

Сделаем некоторые уточнения. Обозначим через F_n множество всех функций, определенных на промежутке I и имеющих на этом промежутке непрерывные производные вплоть до порядка n включительно[1]. Множество F_n является линейным пространством относительно операций сложения функций и умножения функции на число. Решение рассматриваемого уравнения будем искать в пространстве F_n. На множестве F_n определим *дифференциальный оператор* L, действующий по формуле

$$\begin{gathered}(Ly)(x) = a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \\ + \cdots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x), \quad x \in I.\end{gathered}$$

Оператор L действует из пространства F_n в пространство функций, определенных и непрерывных на промежутке I.

Замечание. Иногда оператор рассматриваемого вида записывают следующим образом:

$$L = a_0\frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n.$$

Оператор L является линейным: легко проверить, что для любых функций u, $v \in F_n$ и любых чисел α, β имеет место равенство

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv.$$

Рассматриваемое дифференциальное уравнение будем записывать в виде $Ly = f$. Если функция f является тождественно нулевой, это уравнение называют *однородным*. В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

Приведем теперь некоторые простые утверждения о решениях рассматриваемого дифференциального уравнения. Говоря о решениях неоднородного уравнения, мы имеем в виду решения уравнения с фиксированной правой частью.

[1] Промежуток I считается фиксированным, поэтому зависимость F_n от I мы не отмечаем.

1°. *Линейная комбинация решений однородного уравнения также является решением этого уравнения.*

Предположим, что y, $z \in F_n$, $Ly = 0$, $Lz = 0$. Тогда для произвольных α, $\beta \in \mathbb{C}$ $L(\alpha y + \beta z) = \alpha Ly + \beta Lz = 0$.

Замечание. Это утверждение может быть переформулировано следующим образом: множество решений однородного линейного уравнения является подпространством линейного пространства F_n.

2°. *Разность двух решений неоднородного уравнения является решением однородного уравнения.*

Действительно, из соотношений $Ly = f$, $Lz = f$ получаем:

$$L(y - z) = Ly - Lz = f - f = 0.$$

3°. *Сумма решений неоднородного и однородного уравнений является решением неоднородного уравнения.*

Предположим, что $Ly = f$, $Lz = 0$. Тогда $L(y + z) = Ly + Lz = f$.

4°. *Пусть* y_0 *— фиксированное решение неоднородного уравнения. Если* z *пробегает множество всех решений однородного уравнения, то функции* $y_0 + z$ *пробегают множество всех решений неоднородного уравнения.*

В силу свойства 3°, сумма $y_0 + z$ является решением неоднородного уравнения. При этом могут быть получены *все* решения неоднородного уравнения. Действительно, выберем его произвольное решение y. В силу свойства 2°, функция $z = y - y_0$ является решением однородного уравнения. Остается заметить, что $y = y_0 + z$.

Напомним, что общим решением дифференциального уравнения называется совокупность всех его решений. В этом контексте каждое отдельное решение принято назвать *частным*. Тогда свойство 4° иногда формулируется так: *общее решение неоднородного дифференциального уравнения является суммой его частного решения и общего решения однородного уравнения.*

Рассмотрим *задачу Коши* для уравнения $Ly = f$. Требуется найти функцию $y \in F_n$, удовлетворяющую уравнению $Ly = f$ и дополнительным условиям: $y(x_0) = \alpha_0$, $y'(x_0) = \alpha_1$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$. Здесь $x_0 \in I$, α_0, α_1, …, α_{n-1} — комплексные числа.

Известно, что эта задача Коши имеет *единственное* решение. На этот важный факт, который мы приводим без доказательства, в дальнейшем будем неоднократно ссылаться, называя его *теоремой единственности решения задачи Коши.*

Однородное дифференциальное уравнение

В случае конечномерных линейных пространств вводится понятие *базиса*. Это такая система векторов, что любой элемент линейного пространства может быть единственным образом представлен в виде их линейной комбинации. Оказывается, что аналогичный факт имеет место для множества решений однородного уравнения.

Определение. Говорят, что функции y_1, y_2, …, y_n, определенные на промежутке I, линейно зависимы на этом промежутке, если существуют такие числа c_1, c_2, …, c_n, не все равные нулю, что

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=0$$

для всех $x\in I$. Если это соотношение тождественно выполняется только в случае $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, эти функции называются линейно независимыми на промежутке I.

Замечание. Приведенное определение содержит обычные определения линейной зависимости и независимости, примененные к линейному пространству всех функций, определенных на промежутке I.

Пример. Функции $y_0(x)\equiv 1$, $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, …, $y_n(x)=x^n$ линейно независимы на любом промежутке I. Действительно, рассмотрим соотношение

$$c_0y_0(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)=0,\quad x\in I,$$

то есть

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n=0,\quad x\in I,$$

многочлен $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n$ тождественно обращается в ноль на промежутке I и, следовательно, является нулевым, $c_i=0$, $i=0$, 1, …, n.

Пример. Пусть a, $b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$. Тогда функции $y(x)=e^{ax}$ и $z(x)=e^{bx}$ линейно независимы на любом промежутке I. Действительно, предположим, что для некоторых констант A, $B\in\mathbb{C}$ имеет место равенство $Ae^{ax}+Be^{bx}=0$ для всех $x\in I$. Умножая обе части этого соотношения на e^{-bx}, получаем, что $Ae^{(a-b)x}+1\equiv 0$. Дифференцируя обе части тождества по x, находим, что $A(a-b)e^{(a-b)x}\equiv 0$. Учитывая, что $a-b\neq 0$ и экспоненциальная функция нигде не обращается в ноль, отсюда выводим, что $A=0$. Следовательно, $Be^{bx}\equiv 0$, и тогда $B=0$.

В дальнейшем утверждение из последнего примера будет существенно обобщено.

Предположим, что y_1, y_2, …, $y_n\in F_{n-1}$. Определитель

$$\mathcal{W}(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x\in I,$$

называется *определителем Вронского.*[1]

Замечание 1. Разумеется, функция $\mathcal{W}(x)$ зависит от выбранных функций y_i, то есть более точной была бы запись вида $\mathcal{W}(y_1,y_2,\dots,y_n;x)$, однако мы, как правило, будем использовать приведенное выше сокращенное обозначение, считая, что функции y_i определены в контексте.

Замечание 2. Легко проверить, что функция $\mathcal{W}(x)$ является непрерывной на промежутке I.

Лемма 1. *Если функции y_1, y_2, ..., $y_n\in F_{n-1}$ линейно зависимы на промежутке I, то $\mathcal{W}(x)\equiv 0$ на I.*

Доказательство. Предположим, что константы C_1, C_2, …, C_n не все равны нулю, и выполняется равенство

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x)=0, \quad x\in I. \tag{1}$$

Последовательно дифференцируя обе части этого соотношения $n-1$ раз, получаем, что для любого $x\in I$

$$\begin{aligned} C_1y_1'(x) &+ C_2y_2'(x) &+\dots+C_ny_n'(x) &= 0,\\ C_1y_1''(x) &+ C_2y_2''(x) &+\dots+C_ny_n''(x) &= 0,\\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\ C_1y_1^{(n-1)}(x) &+ C_2y_2^{(n-1)}(x) &+\dots+C_ny_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Приведенные n тождественных соотношений (1) и (2) означают, что при любом $x\in I$ однородная система линейных уравнений с основной матрицей

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

имеет нетривиальное решение C_1, C_2, …, C_n. Следовательно, определитель такой системы равен нулю, то есть $\mathcal{W}(x)\equiv 0$, $x\in I$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть y_1, y_2, ..., $y_n\in F_n$ —решения однородного уравнения $Ly=0$. Если $\mathcal{W}(x_0)=0$ для некоторой точки $x_0\in I$, то функции y_1, y_2, ..., y_n линейно зависимы на промежутке I.*

---

[1] Польский математик Ю. Гёне-Вронский (1778–1853).

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ C_1 y_1''(x_0) + C_2 y_2''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2^{(n-1)} y_2(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

с неизвестными C_1, C_2, …, C_n. Определитель основной матрицы этой системы по условию равен нулю. Следовательно, система имеет нетривиальное решение $C_1 = \alpha_1$, $C_2 = \alpha_2$, …, $C_n = \alpha_n$. Рассмотрим функцию

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x), \quad x \in I.$$

Эта функция является линейной комбинацией решений однородного уравнения и, следовательно, будет решением этого уравнения. Из первого уравнения системы (3) следует, что

$$y(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0.$$

Аналогично из остальных уравнений этой системы получаем равенства $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Остается заметить, что *тривиальное* решение $y_0(x) \equiv 0$, $x \in I$, удовлетворяет таким же условиям: $y_0(x_0) = 0$, $y_0'(x_0) = 0$, …, $y_0^{(n-1)}(x_0) = 0$. В силу теоремы единственности решения задачи Коши для рассматриваемого уравнения, функции y и y_0 совпадают на промежутке I, то есть $y \equiv 0$ на промежутке I,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть y_1, y_2, ..., $y_n \in F_n$ — решения однородного уравнения $Ly = 0$, $\mathcal{W}(x)$ — определитель Вронского. Тогда выполняется одно и только одно из условий:*

1) *функция $\mathcal{W}(x)$ нигде не обращается в ноль на промежутке I, и решения y_1, y_2, ..., y_n линейно независимы на промежутке I;*

2) *$\mathcal{W}(x) \equiv 0$, $x \in I$, и решения y_1, y_2, ..., y_n линейно зависимы на промежутке I.*

Это утверждение является непосредственным следствием лемм 1 и 2.

Пример. Пусть α_1, α_2, …, α_n — попарно различные комплексные числа. Покажем, что функции $y_1(x) = e^{\alpha_1 x}$, $y_2(x) = e^{\alpha_2 x}$, …, $y_n(x) = e^{\alpha_n x}$ линейно независимы на промежутке I.

Для произвольной точки $x \in I$ из соотношений $y_1^{(k)}(x) = \alpha_1^k e^{\alpha_1 x}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ и аналогичных соотношений для остальных функций рассматриваемого семейства, получаем:

$$\mathcal{W}(x)=e^{\alpha_1 x}e^{\alpha_2 x}\cdots e^{\alpha_n x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Здесь из первого столбца определителя вынесен множитель $e^{\alpha_1 x}$, из второго — $e^{\alpha_2 x}$, и так далее. Остается заметить, что экспоненциальная функция нигде не обращается в ноль, а определитель в правой части — это определитель Вандермонда, который не обращается в ноль поскольку числа α_1, α_2, …, α_n попарно различны. Из леммы 1 получаем, что рассматриваемые функции линейно независимы.

Определение. Фундаментальной системой решений однородного уравнения $Ly=0$ порядка n называется линейно независимая система его решений, содержащая n элементов.

Теорема 2. *Для однородного уравнения $Ly=0$ существует фундаментальная система его решений.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in I$. Для произвольных чисел α_0, α_1, …, α_{n-1} обозначим через $y(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1};x)$ решение задачи Коши

$$Ly=0,\quad y(x_0)=\alpha_0,\quad y'(x_0)=\alpha_1,\quad y''(x_0)=\alpha_2,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}$$

на промежутке I.

Рассмотрим следующие функции на промежутке I:

$$y_1(x)=y(1,0,0,\dots,0;x),$$
$$y_2(x)=y(0,1,0,\dots,0;x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n(x)=y(0,0,0,\dots,1;x).$$

Тогда

$$\mathcal{W}(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

По теореме 1 функции y_1, y_2, …, y_n линейно независимы на промежутке I.

Теорема доказана.

Замечание. Разумеется, в качестве данных для задачи Коши можно было брать любые числовые значения, так, чтобы соответствующий определитель не обращался в ноль в точке x_0.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* y_1, y_2, ..., y_n — *фундаментальная система решений однородного уравнения* $Ly = 0$ *степени* n. *Тогда любое решение* $y(x)$ *этого уравнения может быть представлено в виде*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \quad x \in I,$$

где C_1, C_2, ..., C_n — *некоторые постоянные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольную точку $x_0 \in I$ и рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) & + C_2 y_2(x_0) & + \cdots + C_n y_n(x_0) & = y(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) & + C_2 y_2'(x_0) & + \cdots + C_n y_n'(x_0) & = y'(x_0), \\ C_1 y_1''(x_0) & + C_2 y_2''(x_0) & + \cdots + C_n y_n''(x_0) & = y''(x_0), \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + C_2^{(n-1)} y_2(x_0) & + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

с неизвестными C_1, C_2, …, C_n.

Это квадратная система линейных уравнений. Определитель основной матрицы этой системы равен $\mathcal{W}(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_0)$. Он отличен от нуля, в силу линейной независимости функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. По теореме Крамера эта система линейных уравнений имеет единственное решение

$$C_1 = \alpha_1, \quad C_2 = \alpha_2, \ldots, C_n = \alpha_n.$$

Рассмотрим функцию

$$z(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x), \quad x \in I. \tag{4}$$

Тогда

$$z(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = y(x_0).$$

Продифференцировав обе части соотношения (4), аналогично получаем, что $z'(x_0) = y'(x_0)$, затем так же находим, что

$$z''(x_0) = y''(x_0), \ \ldots, \ z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

В силу единственности решения задачи Коши, функции $y(x)$ и $z(x)$ совпадают на промежутке I, то есть

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x), \quad x \in I.$$

Теорема доказана.

Однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

с постоянными коэффициентами. Предполагаем, что $a_0 \neq 0$. Для этого уравнения мы оставляем сокращенную запись $Ly = 0$. Многочлен

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

называется *характеристическим многочленом* этого уравнения, а уравнение $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ — его *характеристическим уравнением.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Функция* $y(x) = e^{\alpha x}$, $x \in I$ *является решением уравнения* $Ly = 0$ *тогда и только тогда, когда число* α *является корнем его характеристического многочлена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для рассматриваемой функции $y(x)$, учитывая соотношение $(y(x))^{(k)} = \alpha^k y(x)$, имеем:

$$(Ly)(x) = (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n)y(x) = f(\alpha)e^{\alpha x}.$$

Отсюда следует, что условия $Ly = 0$ и $f(\alpha) = 0$ являются равносильными.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что характеристический многочлен дифференциального уравнения* $Ly = 0$ *не имеет кратных корней и его корнями являются числа* α_1, α_2, ..., α_n. *Тогда функции* $e^{\alpha_1 x}$, $e^{\alpha_2 x}$, ..., $e^{\alpha_n x}$ $(x \in \mathbb{R})$ *образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.*

Действительно, эти функции являются решениями рассматриваемого уравнения и, как было доказано выше, они образуют линейно независимую систему.

В случае дифференциального уравнения с *вещественными* коэффициентами можно построить фундаментальную систему решений, состоящую из функций, принимающих только вещественные значения.

Рассмотрим такое уравнение $Ly = 0$, как и выше предполагая, что его характеристический многочлен не имеет кратных корней. В этом случае простому невещественному корню $\alpha + \beta i$ характеристического многочлена соответствует простой корень $\alpha - \beta i$. Этим корням соответствуют решения

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+\beta i)x} &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ e^{(\alpha-\beta i)x} &= e^{\alpha x}\cos(\beta x) - ie^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos(\beta x) &= \frac{1}{2}(e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}), \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x) &= \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}). \end{aligned} \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что функции $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ и $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, будучи линейными комбинациями решений однородного дифференциального уравнения, сами являются решениями этого уравнения. Отсюда и из формулы (5) вытекает, что если в фундаментальной системе решений, которая строится по следствию теоремы 4, заменить функции $e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $e^{(\alpha-\beta i)x}$

функциями $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, то полученная система функций тоже будет фундаментальной системой решений.

Перейдем к примерам.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 + \lambda - 2$. Его корнями будут $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -2$. Поэтому функции e^x и e^{-2x} образуют фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения имеет вид $C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим задачу Коши для этого уравнения. Будем искать решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. Отсюда и из соотношений $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$ получаем уравнения

$$C_1 + C_2 = 3, \quad C_1 - 2C_2 = 0.$$

Следовательно $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристический многочлен имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda + 5$. Его корнями будут $\lambda_1 = 1 + 2i$ и $\lambda_2 = 1 - 2i$. Поэтому функции $e^{(1+2i)x}$ и $e^{(1-2i)x}$ образуют фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения имеет вид $C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В силу сказанного выше, фундаментальную систему решений будут образовывать функции $e^x \cos 2x$ и $e^x \sin 2x$. Тогда общее решение может быть записано в виде $y(x) = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Рассмотрим уравнение $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $\lambda = -1$ является корнем характеристического многочлена $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13$. Деля этот многочлен на $\lambda + 1$, получаем:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

Решая квадратное уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, находим еще два корня многочлена: $2 + 3i$ и $2 - 3i$. По корням -1 и $2 \pm 3i$ строим фундаментальную систему решений e^{-x}, $e^{2x}\cos 3x$, $e^{2x}\sin 3x$. Общее решение имеет вид

$$C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\cos(3x) + C_3 e^{2x}\sin(3x),$$

где C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению случая *кратных* корней характеристического многочлена.

Дифференциальные уравнения, характеристическими многочленами которых являются многочлены $f'(\lambda)$, $f''(\lambda)$, $f^{(3)}(\lambda)$ и т.д., будем обозначать соответственно через $L_1y=0$, $L_2y=0$, $L_3y=0$ и т.д. В частности,

$$L_1y = na_0y^{(n-1)} + (n-1)a_1y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y.$$

Лемма 3. *Предположим, что функция $u(x)$ определена на промежутке I и имеет на нем производные до порядка n включительно. Рассмотрим функцию $v(x)=xu(x)$, $x\in I$. Тогда имеют место равенства*

$$v^{(k)}(x) = xu^{(k)}(x) + ku^{(k-1)}(x), \quad x\in I, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Доказательство проведем индукцией по числу k.

При $k=1$ $v'(x)=(xu(x))'=xu'(x)+u(x)$, то есть формула верна.

Предположим, что формула верна для некоторого k, $1\le k\le n-1$. Тогда

$$v^{(k+1)}(x) = (v^{(k)}(x))' = (xu^{(k)}(x) + ku^{(k-1)}(x))' =$$
$$= xu^{(k+1)}(x) + u^{(k)}(x) + k(u^{(k-1)}(x))' = xu^{(k+1)}(x) + (k+1)u^{(k)}(x).$$

Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы является непосредственным следствием *формулы Лейбница:*

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

Лемма 4. *Предположим, что функция $u(x)$ определена на промежутке I и имеет на нем производные до порядка n включительно. Определим функцию $v(x)=xu(x)$, $x\in I$. Тогда имеет место равенство*

$$(Lv)(x) = x(Lu)(x) + (L_1u)(x), \quad x\in I.$$

Доказательство. Учитывая лемму 3, для $x\in I$, получаем:

$$\begin{aligned}
&v^{(n)}(x) = xu^{(n)}(x) + nu^{(n-1)}(x),\\
&v^{(n-1)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)u^{(n-2)}(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&v''(x) = xu''(x) + 2u'(x),\\
&v'(x) = xu'(x) + u(x),
\end{aligned}$$

Кроме того, $v(x)=xu(x)$. Умножая выписанные соотношения соответственно на a_0, a_1, …, a_n и складывая возникающие равенства, получим доказываемое соотношение.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения $Ly=0$ на промежутке I. Функция $v(x)=xu(x)$, $x\in I$ является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда $u(x)$ является решением уравнения $L_1y=0$.*

Доказательство. Из леммы 4 получаем:

$$(Lv)(x) = x(Lu)(x) + (L_1 u)(x), \quad x \in I.$$

Учтем, что $Lu = 0$. Тогда $Lv = L_1 u$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* α *— корень кратности* k *характеристического многочлена* f *дифференциального уравнения* $Ly = 0$. *Тогда функции* $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$, $x^2 e^{\alpha x}$, *...,* $x^{k-1} e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, *являются решениями этого уравнения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(\alpha) = 0$ следует, что функция $e^{\alpha x}$ является решением каждого из уравнений

$$Ly = 0, \quad L_1 y = 0, \ \ldots \ , \quad L_{k-2} y = 0, \quad L_{k-1} y = 0.$$

В силу леммы 3, функция $xe^{\alpha x}$ является решением каждого из уравнений

$$Ly = 0, \quad L_1 y = 0, \ \ldots \ , \quad L_{k-3} y = 0, \quad L_{k-2} y = 0.$$

Снова учитывая лемму 3, находим, что функция $x(xe^{\alpha x}) = x^2 e^{\alpha x}$ является решением каждого из уравнений

$$Ly = 0, \quad L_1 y = 0, \ \ldots \ , \quad L_{k-3} y = 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, получаем аналогичные утверждения для функций $x^3 e^{\alpha x}$, ..., причем на каждом шаге количество уравнений, которым удовлетворяет данная функция, уменьшается на единицу. На предпоследнем шаге получаем, что функция $x^{k-2} e^{\alpha x}$ удовлетворяет уравнениям

$$Ly = 0, \quad L_1 y = 0.$$

Снова используя лемму 3, получаем, что функция $x(x^{k-2} e^{\alpha x}) = x^{k-1} e^{\alpha x}$ является решением уравнения $Ly = 0$.

Теорема доказана.

Перейдем к построению фундаментальной системы решений в рассматриваемом случае.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = p(x) e^{\alpha x}$, где p — многочлен, $\alpha \neq 0$.

ЛЕММА 6. *Функция* $\varphi^{(n)}(x)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ *имеет вид* $\varphi^{(n)}(x) = q(x) e^{\alpha x}$, *где* q *— некоторый многочлен*[1]. *Если* $q = 0$, *то* $p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения: *если* $\varphi(x) = p(x) e^{\alpha x}$, *где многочлен* p *ненулевой, то* $\varphi'(x) = q(x) e^{\alpha x}$, *где многочлен* q *ненулевой.*

Дифференцируем функцию φ:

$$\varphi'(x) = p'(x) e^{\alpha x} + p(x) \alpha e^{\alpha x} = (\alpha p(x) + p'(x)) e^{\alpha x} = q(x) e^{\alpha x},$$

где $q(x) = \alpha p(x) + p'(x)$.

Пусть $p(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k$, где $k \geq 0$, $b_0 \neq 0$. Тогда разложение многочлена q по убывающим степеням x имеет вид $q(x) = \alpha b_0 x^k + \cdots$, по-

---

[1] Разумеется, зависящий, вообще говоря, от *n*.

скольку степень многочлена p' меньше степени многочлена p и, следовательно, старший член $\alpha b_0 x^k$ многочлена $\alpha p(x)$ не имеет подобных в разложении многочлена $p'(x)$. Из условия $\alpha b_0 \neq 0$ следует, что многочлен q не является нулевым.

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть $k \geq 1$, α_1, α_2, ..., α_k — попарно различные числа, I — произвольный промежуток. Если для многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_k(x)$ выполняется условие*

$$p_1(x)e^{\alpha_1 x} + p_2(x)e^{\alpha_2 x} + \cdots + p_k(x)e^{\alpha_k x} \equiv 0, \quad x \in I,$$

то все эти многочлены являются нулевыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу k.

Пусть $k = 1$. Если $p(x)e^{\alpha x} \equiv 0$ на промежутке I, то многочлен $p(x)$ тождественно равен нулю на I, поскольку экспоненциальная функция нигде не обращается в ноль. Следовательно, многочлен p является нулевым.

Предположим, что доказываемое утверждение верно для некоторого $k \geq 1$. Допустим, что

$$p_1(x)e^{\alpha_1 x} + p_2(x)e^{\alpha_2 x} + \cdots + p_k(x)e^{\alpha_k x} + p_{k+1}(x)e^{\alpha_{k+1} x} \equiv 0, \quad x \in I.$$

Умножая обе части этого тождества на $e^{-\alpha_{k+1} x}$, получим:

$$p_1(x)e^{(\alpha_1 - a_{k+1})x} + \cdots + p_k(x)e^{(\alpha_k - a_{k+1})x} + p_{k+1}(x) \equiv 0, \quad x \in I. \tag{7}$$

Из условия леммы следует, что все числа $\alpha_1 - \alpha_{k+1}$, $\alpha_2 - \alpha_{k+1}$, …, $\alpha_k - \alpha_{k+1}$ отличны от нуля. Для любого многочлена все его производные достаточно большого порядка являются нулевыми многочленами. Дифференцируя обе части тождества (7) по x столько раз, чтобы производная многочлена $p_{k+1}(x)$ стала нулевой и учитывая лемму, получаем тождество

$$q_1(x)e^{(\alpha_1 - \alpha_{k+1})x} + q_2(x)e^{(\alpha_2 - \alpha_{k+1})x} + \cdots + q_k(x)e^{(\alpha_k - \alpha_{k+1})x} \equiv 0, \quad x \in I,$$

где q_1, q_2, …, q_k — некоторые многочлены.

В силу индуктивного предположения, многочлены q_1, q_2, …, q_k являются нулевыми. Из леммы 6 следует, что нулевыми должны быть и многочлены p_1, p_2, …, p_k. Отсюда и из (7) следует, что $p_{k+1}(x) \equiv 0$, $x \in I$. Следовательно, многочлен p_{k+1} нулевой.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть λ_1, ..., λ_k — все корни характеристического многочлена дифференциального уравнения $Ly = 0$, имеющие кратности m_1, ..., m_k соответственно. Тогда функции $e^{\lambda_i x}$, $xe^{\lambda_i x}$, $x^2 e^{\lambda_i x}$, ..., $x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x}$, $i = 1$, 2, ..., k, образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выпишем рассматриваемую систему функций более подробно:

$$\begin{array}{lllll} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & x^2 e^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & x^2 e^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{m_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{\lambda_k x}, & xe^{\lambda_k x}, & x^2 e^{\lambda_k x}, & \ldots, & x^{m_k-1} e^{\lambda_k x}. \end{array}$$

Первая строка содержит m_1 функций, вторая — m_2 функций, …, последняя строка содержит m_k функций. Общее число функций равно

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k.$$

Сумма кратностей всех комплексных корней многочлена равна его степени, то есть выписанная система содержит n функций.

Остается показать, что эта система функций линейно независима. Предположим, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю на некотором промежутке I. Сгруппируем слагаемые с одинаковыми экспоненциальными множителями и вынесем их за скобки. Получаем соотношение вида

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + p_k(x)e^{\lambda_k x} \equiv 0, \quad x \in I,$$

где коэффициентами многочленов p_i являются коэффициенты исходной линейной комбинации.

В силу леммы 7, все эти многочлены являются нулевыми, их коэффициенты равны нулю, то есть все коэффициенты исходной линейной комбинации равны нулю.

Теорема доказана.

В общем случае справедлив аналог утверждения, рассмотренного нами в случае простых корней характеристического многочлена. Пусть $Ly = 0$ — уравнение с вещественными коэффициентами, $\alpha + \beta i$ — невещественный корень характеристического многочлена кратности k. Тогда фрагмент фундаментальной системы решений, отвечающий корням $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$, то есть семейство функций

$$\begin{array}{lllll} e^{(\alpha+\beta i)x}, & xe^{(\alpha+\beta i)x}, & x^2 e^{(\alpha+\beta i)x}, & \ldots, & x^{k-1} e^{(\alpha+\beta i)x}, \\ e^{(\alpha-\beta i)x}, & xe^{(\alpha-\beta i)x}, & x^2 e^{(\alpha-\beta i)x}, & \ldots, & x^{k-1} e^{(\alpha-\beta i)x}, \end{array}$$

может быть заменен следующим семейством функций:

$$\begin{array}{lllll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}$$

Замечание. Слова «может быть заменен» из предыдущего абзаца означают, что полученное семейство функций останется фундаментальной системой решений.

Пример. Рассмотрим уравнение $\dfrac{d^5 y}{dx^5} + 3\dfrac{d^4 y}{dx^4} + 3\dfrac{d^3 y}{dx^3} + \dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

Разлагаем характеристический многочлен на множители:

$$\lambda^5+3\lambda^4+3\lambda^3+\lambda^2=\lambda^2(\lambda+1)^3.$$

Многочлен имеет корень $\lambda=0$ кратности 2 и корень $\lambda=-1$ кратности 3. Фундаментальную систему решений образуют функции

$$1,\quad x,\quad e^{-x},\quad xe^{-x},\quad x^2e^{-x}.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение $\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$.

Характеристический многочлен имеет вид $\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2$. Он имеет корни i и $-i$ кратности 2. Фундаментальную систему решений образуют функции $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$.

Метод вариации произвольной постоянной

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение порядка n с непрерывными коэффициентами

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f,$$

или, как и выше, в сокращенной записи $Ly=f$. Будем предполагать, что функции a_0, a_1, …, a_n и f определены и непрерывны на промежутке I, причем функция a_0 не обращается на этом промежутке в ноль.

Пусть y_1, y_2, …, y_n — фундаментальная система решений *однородного* уравнения $Ly=0$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),\quad x\in I,$$

где C_1, C_2, …, C_n — произвольные постоянные.

Решение *неоднородного* уравнения будем искать в виде

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\cdots+C_n(x)y_n(x),\quad x\in I, \qquad (\mathrm{A}_0)$$

где C_1, C_2, …, C_n — подлежащие нахождению *функции*, непрерывно дифференцируемые на промежутке I.

Потребуем, чтобы для всех $x\in I$ выполнялись соотношения

$$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+\cdots+C_n(x)y_n'(x), \qquad (\mathrm{A}_1)$$

$$y''(x)=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)+\cdots+C_n(x)y_n''(x), \qquad (\mathrm{A}_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)}(x)=C_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n(x)y_n^{(n-1)}(x), \qquad (\mathrm{A}_{n-1})$$

Дифференцируя обе части (A_0) по x, получаем:

$$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+\cdots+C_n(x)y_n'(x)+$$
$$+C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\cdots+C_n'(x)y_n(x),\quad x\in I.$$

Отсюда следует, что для выполнения соотношения (A_1) необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\cdots+C_n'(x)y_n(x)=0,\quad x\in I. \qquad (\mathrm{B}_0)$$

Дифференцируя обе части (A_1) по x, получаем:

$$y''(x) = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x) +$$
$$+C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x), \quad x \in I.$$

Сравнивая это соотношение с (A_2), получаем следующее тождество:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \quad x \in I. \qquad (B_1)$$

Продолжая дальше, получаем соотношения

$$C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) = 0, \quad x \in I, \qquad (B_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \quad x \in I. \qquad (B_{n-2})$$

Продифференцируем обе части соотношения (A_{n-1}) по x:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + \\ &+C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x), \quad x \in I. \end{aligned} \qquad (A_n)$$

Подставляя функцию y в уравнение $Ly = f$ и учитывая соотношения (A_n), (A_{n-1}), …, (A_2), (A_1), (A_0), получаем:

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$+C_1(x)(Ly_1)(x) + C_2(x)(Ly_2)(x) + \cdots + C_n(x)(Ly_n)(x) = f(x), \quad x \in I.$$

Поскольку $Ly_1 = 0$, $Ly_2 = 0$, …, $Ly_n = 0$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + \\ +C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \quad x \in I. \end{aligned} \qquad (B_{n-1})$$

Выпишем вместе уравнения (B_0), (B_1), …, (B_{n-1}): для любого $x \in I$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) & +C_2'(x)y_2(x) & +\cdots & +C_n'(x)y_n(x) & = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) & +C_2'(x)y_2'(x) & +\cdots & +C_n'(x)y_n'(x) & = 0, \\ C_1'(x)y_1''(x) & +C_2'(x)y_2''(x) & +\cdots & +C_n'(x)y_n''(x) & = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & +C_2'(x)y_2^{(n-2)} & +\cdots & +C_n'(x)y_n^{(n-2)} & = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & +C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & +\cdots & +C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = f(x). \end{cases}$$

Это квадратная система линейных уравнений. Определителем основной матрицы этой системы является определитель Вронского $\mathcal{W}(x)$ для системы функций y_1, y_2, …, y_n. Для фундаментальной системы решений этот определитель всюду отличен от нуля. По теореме Крамера данная система линейных уравнений при любом $x \in I$ имеет единственное решение. Легко проверить, что его решения, то есть определенные на промежутке I функции C_1', C_2', …, C_n', являются непрерывными. Допустим, что решениями указанной системы являются функции F_1, F_2, …, F_n. Тогда функции C_i находятся по формулам

$$C_j(x) = \int F_j(x)\,dx + K_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные постоянные.

Заметим, что, зафиксировав произвольные первообразные функций F_j, мы получим частное решение неоднородного уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ являются $\lambda = \pm i$. Общее решение *однородного* уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x. \tag{8}$$

Тогда

$$y'(x) = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x + \\ + C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x.$$

Требуем выполнения равенства $C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$ на всем рассматриваемом промежутке.

Тогда

$$y'(x) = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x.$$

Далее,

$$y''(x) = -C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x - \\ - C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x.$$

Подставляя функцию $y(x)$ в неоднородное уравнение, после приведения подобных получаем:

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

Окончательно имеем систему линейных уравнений для нахождения функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на $\cos x$, второе на $-\sin x$ и складывая получаемые соотношения, находим: $C_1'(x) = -\operatorname{tg} x$. Аналогично после умножения первого уравнения на $\sin x$, а второго на $\cos x$ получаем: $C_2'(x) = 1$.

Тогда

$$C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{d\cos x}{\cos x} = \ln|\cos x| + K_1,$$

$$C_2(x) = \int dx = x + K_2,$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные.

Теперь возможны два несущественно отличающихся варианта завершения решения. Можно взять указанные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ с произвольными постоянными и, пользуясь формулой (8), выписать общее решение уравнения. Второй вариант состоит в том, чтобы, выбрав фиксированные значения K_1 и K_2 (например, $K_1 = K_2 = 0$), найти по формуле (8) частное решение неоднородного уравнения, а затем для получения общего решения прибавить к этому частному решению общее решение неоднородного уравнения, то есть произвольную линейную комбинацию функций $\cos x$ и $\sin x$. Окончательный вариант будет тем же самым:

$$y(x) = (\ln|\cos x| + K_1)\cdot\cos x + (x + K_2)\sin x.$$

Случай правых частей специального вида

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y'(x) + a_n(x) y(x) = f(x) \tag{9}$$

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y'(x) + a_n(x) y(x) = f(x)$$

с постоянными коэффициентами в предположении, что $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, P — многочлен степени m.

Будем также предполагать, что $a_n \neq 0$. Это условие используется в (опускаемом нами) доказательстве приводимой ниже теоремы 7. Отметим, что в исключенном случае $a_n = 0$ заменой $z = y'$ уравнение сводится к уравнению порядка $n-1$.

Пример Рассмотрим уравнение $y''' - 2y'' + y' = 0$. Выполним замену $y' = z$. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и уравнение принимает вид $z'' - 2z' + z = 0$. Характеристический многочлен последнего уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2. Поэтому общее решение имеет вид

$$z(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение исходного уравнения ищем по формуле

$$y(x) = \int z(x)\,dx = \int (C_1 e^x + C_2 x e^x)\,dx =$$

$$= C_1 e^x + C_2(x e^x - e^x) + C_3.$$

Здесь функция $xe^x - e^x$ — первообразная функции xe^x, C_3 — постоянная интегрирования.

Вернемся к рассмотрению уравнения (9). Целое неотрицательное число k определим следующим образом. Если α является корнем характеристического многочлена дифференциального уравнения, то k равно кратности этого корня. В противном случае (если α не является корнем этого многочлена) полагаем $k=0$. В этих предположениях и обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Рассматриваемое уравнение имеет единственное решение вида* $y(x)=x^k e^{\alpha x}Q(x)$, *где* Q *— многочлен степени* m.

Замечание 1. В случае $f(x)=P(x)$, полагая $\alpha=0$, также можно использовать эту теорему. Тогда частное решение нужно искать в виде $y(x)=Q(x)$ (число $\alpha=0$ не является корнем характеристического многочлена, так как $a_n \neq 0$ и, следовательно, $k=0$).

Замечание 2. В дальнейшем при решении примеров мы будем использовать обозначения α, m, k, введенные перед формулировкой теоремы 7, без пояснений.

Для нахождения решения в соответствии с приведенной теоремой используется *метод неопределенных коэффициентов.* Многочлен Q записывается в виде

$$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

с подлежащими нахождению коэффициентами b_i и соответствующую функцию $y(x)$ подставляем в уравнение. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему линейных уравнений с неизвестными b_i. В силу приведенной теоремы, эта система имеет единственное решение. Мы получаем частное решение данного дифференциального уравнения.

Рассмотрим еще один случай. Рассмотрим уравнение $Ly=f$ при следующих предположениях: все коэффициенты дифференциального уравнения являются вещественными,

$$g(x)=e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x),$$

P и Q — многочлены формальной степени m с вещественными коэффициентами, α, $\beta\in\mathbb{R}$.

Замечание. В качестве m естественно взять наибольшую из степеней многочленов P и Q.

Целое неотрицательное число k определим так. Если число $\alpha+\beta i$ является корнем характеристического многочлена дифференциального уравнения, то k равно кратности этого корня. В противном случае полагаем $k=0$. В этих предположениях и обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Рассматриваемое уравнение имеет единственное решение вида* $y(x)=x^k e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x)$, *где* R и S *— многочлены формальной степени* m.

Прежде, чем перейти к примерам, сделаем еще одно замечание. Рассмотрим дифференциальное уравнение $Ly = f$. Предположим, что функция f может быть записана в виде $f = f_1 + f_2$ и известны решения y_1 и y_2 уравнений $Ly = f_1$ и $Ly = f_2$ соответственно. Тогда функция $y = y_1 + y_2$ является решением уравнения $Ly = f$. Действительно,

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = f_1 + f_2 = f.$$

Это замечание позволяет расширить класс правых частей, для которых можно эффективно найти решение.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' + y = 2xe^x$.

Используем теорему 7. В этом случае $\alpha = 1$, $P(x) = 2x$, $m = 1$. Число α не является корнем характеристического многочлена $\lambda^2 + 1$. Следовательно, частное решение можно искать в виде

$$y(x) = e^x(Ax + B).$$

Дифференцируя дважды, находим, что

$$y''(x) = e^x(Ax + 2A + B),$$

и, подставляя в уравнение, получаем:

$$e^x(2Ax + 2A + 2B) = 2xe^x.$$

Сокращая на e^x и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$2A = 2, \quad 2A + 2B = 0.$$

Тогда $A = 1$, $B = -1$, и частное решение принимает вид $y(x) = (x-1)e^x$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = (x-1)e^x + C_1\cos x + C_2\sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Рассмотрим уравнение $y'' + y = x^2 + 2xe^x$.

Найдем отдельно частные решения уравнений $y'' + y = x^2$ и $y'' + y = 2xe^x$. Второе уравнение рассмотрено нами в предыдущем примере.

Перейдем к уравнению $y'' + y = x^2$. Число $\alpha = 0$ не является корнем характеристического многочлена. Решение уравнения ищем в виде

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя в уравнение, получаем соотношение

$$Ax^2 + Bx + (2A + C) = x^2,$$

следовательно, $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$, и частное решение уравнения имеет вид $y(x) = x^2 - 2$. Тогда частным решением исходного уравнения является функция $x^2 - 2 + (x-1)e^x$, общее решение этого уравнения имеет вид

$$x^2 - 2 + (x-1)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$.

Снова используем теорему 7. В этом случае $\alpha = 1$, $P(x) = 2x$, $m = 1$. Число $\alpha = 1$ является простым корнем характеристического многочлена

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1),$$

то есть $k = 1$, частное решение ищем в виде: $y(x) = xe^x(Ax + B)$.

Подставляя функцию $y(x)$ в уравнение, получаем соотношение

$$-2Axe^x + (2A - B)e^x = 2xe^x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях xe^x и e^x, получаем уравнения:

$$-2A = 2, \quad 2A - B = 0.$$

Отсюда находим: $A = -1$, $B = -2$, и частное решение принимает вид:

$$y(x) = -x(x+2)e^x.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = -x(x+2)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = 10 \sin x.$$

Используем теорему 8. Характеристический многочлен уравнения имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1).$$

В обозначениях теоремы 8 имеем: $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m = 0$. Число $\alpha + \beta i = i$ не является корнем характеристического многочлена. Частное решение ищем в виде $y(x) = A\cos x + B\sin x$. Подставляя в уравнение, получаем соотношение

$$(-5A - 5B)\cos x + (5A - 5B)\sin x = 10 \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при косинусах и синусах, находим:

$$-5A - 5B = 0, \quad 5A - 5B = 10.$$

Эта система имеет единственное решение $A = 1$, $B = -1$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos x - \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \cos x - \sin x + C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение $y'' + y = 4x \cos x$.

Используем теорему 8. В этом случае

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ R(x) = 4x,\ S(x) \equiv 0,\ m = 1.$$

Число $\alpha + \beta i = i$ является простым корнем характеристического многочлена $\lambda^2 + 1$, то есть $k = 1$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y(x) = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$. Подставляя эту функцию в уравнение, получаем соотношение

$$2(A + D)\cos x + 2(-B + C)\sin x + 4Cx\cos x - 4Ax\sin x = 4x\cos x. \qquad (10)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях, получаем соотношения: $A + D = 0$, $-B + C = 0$, $C = 1$, $-A = 0$. Отсюда находим: $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$, и частное решение неоднородного уравнения принимает вид $y(x) = x\cos x + x^2 \sin x$.

Замечание. При решении примера мы воспользовались тем, что для выполнения тождественного соотношения (10) *необходимо и достаточно* совпадения коэффициентов при одинаковых функциях. Это следует из линейной независимость системы функций

$$\begin{array}{lllll} \cos x, & x\cos x, & x^2\cos x, & \ldots, & x^n\cos x, \\ \sin x, & x\sin x, & x^2\sin x, & \ldots, & x^n\sin x, \end{array}$$

при любом натуральном n. Последний факт, в свою очередь, вытекает, например, из того, что эти функции образуют фундаментальную систему решений для уравнения с характеристическим многочленом $(\lambda^2 + 1)^{n+1}$, имеющим корни i и $-i$ кратности $n + 1$.