

# Общая программа курса «Математический анализ» (2015/2016 уч. г., 2 семестр, группы 1–2)

Составитель: М. Э. Абрамян

## Часть 1. Неопределенный интеграл

**Первообразная и неопределенный интеграл.** [1] Первообразная: определение. Теорема о связи различных первообразных одной функции. Неопределенный интеграл: определение. Таблица неопределенных интегралов. Свойства неопределенного интеграла (производная неопределенного интеграла и неопределенный интеграл от производной, линейность неопределенного интеграла). Замена переменных в неопределенном интеграле, примеры. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, примеры.

**Интегрирование рациональных функций.** [2] Рациональная функция: определение, теорема о разложении рациональной функции (без доказательства), метод неопределенных коэффициентов для нахождения разложения. Теорема об интегрировании рациональных функций.

**Интегрирование тригонометрических функций.** Полиномы и рациональные функции  $n$  переменных: определение. Универсальная тригонометрическая подстановка и особенности ее применения, вызванные сужением области определения (на примере интеграла от функции  $\sin^2 x + \cos^2 x$ ). [3] Теорема о преобразовании рациональной функции  $R(u, v)$  при выполнении одного из условий:  $R(-u, v) = -R(u, v)$ ,  $R(u, -v) = -R(u, v)$ ,  $R(-u, -v) = R(u, v)$ ; представление функции  $R(u, v)$  общего вида как суммы функций, удовлетворяющих указанным условиям. Следствие о тригонометрических подстановках для функции  $R(\sin x, \cos x)$  в указанных частных случаях.

**Интегрирование некоторых классов иррациональных функций.** Интегралы от функции  $R(x, ((ax+b)/(cx+d))^p)$  при  $ad - bc \neq 0$ , где  $R$  — рациональная функция двух переменных; обобщение на случай рациональной функции  $n$  переменных. Интегрирование биномиального дифференциала  $x^m(a + bx^n)^p dx$ ; три случая сведения к рациональной функции. Три подстановки Эйлера для интегрирования выражений вида  $R(x, (ax^2+bx+c)^{1/2})$ ; теорема о том, что эти выражения всегда можно свести к рациональной функции.

## Часть 2. Определенный интеграл

**Определение определенного интеграла.** [4] Разбиение отрезка, мелкость разбиения, выборка, интегральная сумма для функции  $f$  при заданном разбиении и фиксированной выборке: определения. Определенный интеграл функции  $f$  на отрезке: определение. Ограниченность функции как необходимое условие ее интегрируемости.

**Суммы Дарбу и критерий интегрируемости.** Нижняя  $S^-$  и верхняя  $S^+$  суммы Дарбу: определение и свойства (два свойства о связи сумм Дарбу с интегральными суммами, свойство о суммах Дарбу для продолжения разбиения, неравенство для нижней и верхней суммы Дарбу по произвольным разбиениям, существование  $\sup S^-$  и  $\inf S^+$  — нижнего и верхнего интегралов Дарбу). [5] Критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу. Пример ограниченной функции, не являющейся интегрируемой (функция Дирихле). Колебание функции на отрезке: определение, условие интегрируемости функции в терминах колебания функции.

**Классы интегрируемых функций.** Теорема об интегрируемости функции, непрерывной на отрезке. Теорема об интегрируемости функции, монотонной на отрезке.

**Свойства определенного интеграла.** Свойства, связанные с операциями над функциями (теоремы об интегрируемости линейной комбинации интегрируемых функций и [6] произведения интегрируемых функций). Свойства, связанные с отрезками интегрирования (теорема об интегрируемости функции на меньшем отрезке; теорема о равенстве интеграла по отрезку  $[a, b]$  сумме интегралов по отрезкам  $[a, c]$  и  $[c, b]$ ; расширение понятия интеграла на случай  $a \geq b$  и обобщение предыдущей теоремы). Оценки интегралов (теорема о неотрицательности интеграла от неотрицательной функции, следствие о сравнении интегралов; теорема о положительности интеграла от неотрицательной функции, принимающей в некоторой точке положительное значение и непрерывной в этой точке; теорема об интегрируемости модуля функции и оценка модуля интеграла через интеграл от модуля; пример, показывающий, что из интегрируемости модуля функции не следует интегрируемости самой функции). Интегральные теоремы о среднем (теорема об интеграле произведения  $fg$ , где  $f$  и  $g$  интегрируемы, а  $g$  не меняет знака; [7] следствие об интеграле произведения  $fg$  в случае, когда  $f$  непрерывна; частный случай  $g = 1$  и его геометрическая интерпретация).

**Интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов.** Интеграл с переменным верхним пределом: определение. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом в точке  $x_0$  при условии непрерывности подынтегральной функции в этой точке. Теорема о существовании первообразной у непрерывной функции и выражение этой первообразной через интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая непрерывной на отрезке функции. Теорема о замене переменной в определенном интеграле, следствия (интеграл от нечетной/четной непрерывной функции на отрезке  $[-a, a]$  и [8] интеграл от периодической непрерывной функции на отрезке  $[a, a + T]$ , где  $T$  — период функции). Теорема об интегрировании по частям для определенного интеграла.

## Часть 3. Приложения определенного интеграла

**Вычисление площади плоской фигуры.** Плоская фигура, прямоугольник, клеточная фигура, площади прямоугольника и клеточной фигуры: определения. Квадрируемая фигура и ее площадь: определения. Существование и единственность площади для любой квадрируемой фигуры (без доказательства). Необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры (без доказательства). Криволинейная трапеция: определение, теорема о площади криволинейной трапеции; следствие о площади фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций и отрезками вертикальных прямых. Площадь эллипса. [9] Теорема о площади криволинейного сектора.

**Вычисление объема тела.** Тело, параллелепипед, клеточное тело, объемы параллелепипеда и клеточного тела: определения. Кубируемое тело и его объем: определения. Существование и единственность объема для любого кубируемого тела (без доказательства). Цилиндрическое тело: определение, теорема об объеме цилиндрического тела. Теорема об объеме тела вращения. Теорема об объеме тела с заданными площадями поперечных сечений (без доказательства).

**Вектор-функции и их свойства.** Вектор-функция: определение. Предел вектор-функции: определение, [10] критерий существования предела вектор-функции в терминах существования предела ее координатных функций. Арифметические свойства пределов вектор-функций. Непрерывность вектор-функции, производная вектор-функции: определения. Правила дифференцирования вектор-функций (в частности, формула для производной скалярного произведения дифференцируемых вектор-функций). Теорема Лагранжа для вектор-функции и пример, показывающий, что формула Лагранжа в виде равенства для вектор-функций в общем случае неверна.

**Вычисление длины кривой.** Простая кривая, параметризуемая кривая, замкнутая кривая, простой контур: определения. Спрямолинейная кривая и ее длина: определения. Непрерывно дифференцируемая кривая: определение, спрямолинейность непрерывно дифференцируемой кривой и оценка для ее длины. Теорема о производной переменной длины дуги непрерывно дифференцируемой кривой и ее следствие — формулы длины кривой, заданной уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  [11] или  $y = f(x)$ . Формула длины кривой, заданной в полярных координатах:  $\rho = \rho(\varphi)$ .

## Часть 4. Функции многих переменных

**Метрическое пространство.** Метрическое пространство: определение. Три примера метрики  $\rho$  на плоскости: евклидова, максимум модулей разностей координат, сумма модулей разностей координат; доказательство аксиом для двух последних метрик. Метрическое пространство  $\mathbf{R}^n$ : определение. Неравенство Коши для суммы вида  $\sum a_i b_i$ . Неравенство Минковского для выражения вида  $(\sum (a_i + b_i)^2)^{1/2}$  и его использование для доказательства неравенства треугольника для евклидовой метрики в  $\mathbf{R}^n$ . Пример метрического пространства, отличного от  $\mathbf{R}^n$  (пространство ограниченных функций на отрезке).

**Последовательность точек в метрическом пространстве.** Сходящаяся последовательность и ограниченная последовательность в метрическом пространстве: определения. Свойства сходящихся последовательностей в произвольном метрическом пространстве (ограниченность сходящейся последовательности и единственность предела сходящейся последовательности). Критерий сходимости последовательности в  $\mathbf{R}^n$  в терминах сходимости последовательностей ее координат. Фундаментальная последовательность: определение. Фундаментальность сходящейся последовательности. [12] Полное метрическое пространство: определение. Полнота пространства  $\mathbf{R}^n$ .

**Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.** Шар, внутренняя точка, открытое множество в метрическом пространстве, внутренность множества: определения. Доказательство того, что шар является открытым множеством. Свойства открытых множеств (3 свойства). Окрестность точки, предельная точка и изолированная точка множества: определения. Замкнутое множество в метрическом пространстве, замыкание множества: определения. Критерий замкнутости множества. Свойства замкнутых множеств (3 свойства). Компакт в метрическом пространстве: определение и свойства (замкнутость и ограниченность). [13] Теорема Больцано-Вейерштрасса для пространства  $\mathbf{R}^n$ , следствие (критерий для компактов в  $\mathbf{R}^n$ ). Прямая, луч и отрезок в  $\mathbf{R}^n$ , выпуклое множество: определения. Кривая в  $\mathbf{R}^n$ , связное множество, область: определения.

**Предел функции многих переменных.** Функция многих переменных: определение. Предел функции многих переменных в точке: определение и критерий существования предела в терминах последовательностей (без доказательства). Лемма о существовании предела функции, равного нулю. Примеры нахождения предела функции:  $(x^2 + y^2)^\alpha$  в нуле ( $\alpha > 0$ ) — непосредственно по определению,  $|x|^\alpha |y|^\beta / (x^2 + y^2)^\gamma$  в нуле ( $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta - 2\gamma > 0$ ) — с использованием леммы. Два примера функций, не имеющих предела в данной точке:  $f_1(x, y) = 2xy / (x^2 + y^2)$  в нуле и  $f_2(x, y) = 2x^2y / (x^4 + y^2)$  в нуле. Предел функции в точке по множеству и по направлению: определения, примеры нахождения предела функции по направлению, в том числе пример, показывающий, что из существования одинаковых пределов по всем направлениям в данной точке не следует существования предела в этой точке (функция  $f_2(x, y)$  в нуле). [14] Повторные пределы функции двух переменных: определение. Примеры, показывающие, что из существования двойного предела не следует существования повторных пределов (функция  $f_3(x, y) = x \sin(1/y)$ , если  $y \neq 0$ ; 0, если  $y = 0$ , в нуле), а из существования и равенства повторных пределов не следует существования двойного предела (функция  $f_4(x, y)$  в нуле).

**Непрерывность функции многих переменных.** Непрерывность функции в точке и непрерывность функции в точке по множеству: определения. Пример функции, непрерывной в точке по любому лучу, но не являющейся непрерывной в этой точке (функция  $f_2(x, y)$ , доопределенная в нуле значением 0). Теорема о непрерывности суперпозиции непрерывных функций многих переменных (без доказательства). Непрерывность функции на множестве: определение, две теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на компакте метрического пространства (без доказательства). Равномерная непрерывность функции на множестве: определение. Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компакте. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на связном множестве.

## Часть 5. Дифференцируемые функции многих переменных

**Дифференцируемость функции многих переменных.** Частные производные первого порядка: определение. Дифференцируемость функции в точке: определение. Критерий дифференцируемости (в терминах представления функции в виде  $f(x^0) + \sum f_i(x)(x_i - x_i^0)$ , где  $f_i$  — непрерывные функции); следствие о непрерывности дифференцируемой функции. [15] Пример непрерывной функции, не являющейся дифференцируемой (функция  $f_4(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$  в нуле). Необходимое условие дифференцируемости функции в точке (существование в этой точке частных производных); пример, показывающий, что данное условие не является достаточным (функция  $f_1(x, y)$ , доопределенная в нуле значе-

нием 0). Достаточное условие дифференцируемости функции в точке (существование в окрестности этой точки частных производных и их непрерывность в этой точке); [16] пример, показывающий, что данное условие не является необходимым (функция  $(x^2 + y^2) \sin((x^2 + y^2)^{-1/2})$ , доопределенная в нуле значением 0). Теорема о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых функций многих переменных и формула для вычисления ее частных производных. Формула конечных приращений Лагранжа для функции многих переменных. [17] Первый дифференциал функции: определение. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменных. Свойства дифференциала (3 свойства), доказательство одного из свойств двумя способами: непосредственно по определению и с использованием свойства инвариантности первого дифференциала. Вывод уравнения касательной прямой к гладкой кривой в данной точке. Вектор нормали к графику функции двух переменных в данной точке: определение, существование вектора нормали в случае дифференцируемой функции. Касательная плоскость к графику дифференцируемой функции, геометрический смысл дифференциала. Производная по направлению: определение [18] и теорема о ее вычислении для дифференцируемой функции. Градиент: определение, связь градиента и производной по направлению. Экстремальное свойство направления, задаваемого градиентом. Оператор Гамильтона  $\nabla$ : определение и его использование для записи градиента и производной по направлению.

**Частные производные и дифференциалы высших порядков.** Частные производные высших порядков, смешанные производные: определения. Пример функции двух переменных, имеющей различные смешанные производные второго порядка в точке (функция  $xy(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$ , доопределенная в нуле значением 0). Теорема об условии совпадения смешанных производных по одним и тем же переменным (без доказательства). Дифференциалы высших порядков: определение. Неинвариантность второго дифференциала относительно замены переменных общего вида; инвариантность второго дифференциала относительно линейной замены переменных; следствие для дифференциалов высших порядков. Представление дифференциалов высших порядков с использованием формального дифференциального оператора  $(dx, \nabla) = \sum dx_i \partial/\partial x_i$ . [19] Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции многих переменных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции многих переменных.

**Неявные функции.** Неявная функция, определяемая уравнением  $F(x, y) = 0$  в прямоугольнике: определение и примеры. [20] Теорема о неявной функции, определяемой одним уравнением (достаточное условие существования и дифференцируемости неявной функции). Нахождение производных неявной функции с помощью формального дифференцирования исходного уравнения. Определитель Якоби (якобиан) системы функций: определение и свойство якобиана системы сложных функций. [21] Неявные функции, определяемые системой уравнений в клеточной окрестности точки: определение. Достаточное условие существования и дифференцируемости системы неявных функций, определяемых системой уравнений (без доказательства). Нахождение частных производных неявных функций с помощью формального дифференцирования исходной системы уравнений. Отображение в метрическом пространстве  $\mathbf{R}^n$ , непрерывно-дифференцируемое отображение и его якобиан, регулярное отображение: определения. Теорема о локальной регулярной обратимости регулярного отображения, следствие о связи якобианов взаимно обратных регулярных отображений.

**Экстремумы функций многих переменных.** Точка локального экстремума (минимума, максимума) и строгого локального экстремума (минимума, максимума) функции многих переменных: определения. Необходимое условие экстремума (равенство нулю частных производных) [22] и следствие (равенство нулю дифференциала). Стационарная точка дифференцируемой функции: определение, пример стационарной точки, не являющейся точкой экстремума. Лемма о неотрицательности второй производной функции одной переменной в точке минимума. Необходимое условие минимума (неотрицательность второго дифференциала), следствие (необходимое условие максимума); пример, показывающий, что данное условие не является достаточным. Положительно определенная, отрицательно определенная и неопределенная (знакопеременная) квадратичная форма: определения. Лемма об оценке снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточное условие экстремума (в терминах положительной/отрицательной определенности второго дифференциала). Критерий Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы (без доказательства). Достаточное условие экстремума функции двух переменных в терминах частных производных.

## Литература

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Т. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1981.
3. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1983.
4. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2 (любое издание).