Экзаменационная программа курса «Математический анализ»
(2015/2016 уч. г., 2 семестр, группы 1–2)

Составитель: М. Э. Абрамян

Теорема о связи различных первообразных одной функции. Таблица неопределенных интегралов. Свойства неопределенного интеграла (3 свойства). Замена переменных в неопределенном интеграле, примеры. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, примеры. Теорема об интегрировании рациональных функций. Универсальная тригонометрическая подстановка и особенности ее применения. Теорема о преобразовании рациональных функций $R(u, v)$ специального вида; представление функции $R(u, v)$ общего вида. Следствие о тригонометрических подстановках для функции $R(\sin x, \cos x)$. Интегралы от функции $R(x, ((ax+b)/(cx+d))^p)$ при $ad - bc \neq 0$, где R — рациональная функция двух переменных; обобщение на случай рациональной функции n переменных. Интегрирование биномиального дифференциала; случаи сведения к рациональной функции. Подстановки Эйлера для интегрирования выражений вида $R(x, (ax^2+bx+c)^{1/2})$; теорема о том, что эти выражения всегда можно свести к рациональной функции.

Определенный интеграл: определение. Необходимое условие интегрируемости функции. Нижняя и верхняя суммы Дарбу: определение и 5 свойств. Критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу; следствие. Пример ограниченной функции, не являющейся интегрируемой. Теорема об интегрируемости функции, непрерывной на отрезке; следствие об интеграле от постоянной функции. Теорема об интегрируемости функции, монотонной на отрезке. Свойства определенного интеграла, связанные с операциями над функциями. Свойства определенного интеграла, связанные с отрезками интегрирования. Оценки интегралов. Интегральные теоремы о среднем. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Теорема о существовании первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая функции, непрерывной на отрезке. Теорема о замене переменной в определенном интеграле, 3 следствия. Теорема об интегрировании по частям для определенного интеграла.

Теорема о существовании и единственности площади для любой квадрируемой фигуры, необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры (обе теоремы без доказательства). Теорема о площади криволинейной трапеции; следствие о площади фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций и отрезками вертикальных прямых. Площадь эллипса. Теорема о площади криволинейного сектора. Теорема об объеме цилиндрического тела. Теорема об объеме тела вращения. Теорема об объеме тела с заданными площадями поперечных сечений (без доказательства). Правила дифференцирования вектор-функций. Теорема Лагранжа для вектор-функции и пример, показывающий, что формула Лагранжа в виде равенства для вектор-функций в общем случае неверна. Теорема о спрямляемости непрерывно дифференцируемой кривой и оценка для ее длины. Теорема о производной переменной длины дуги непрерывно дифференцируемой кривой и ее следствие — формулы длины кривой. Формула длины кривой, заданной в полярных координатах.

Три примера метрики ρ на плоскости, доказательство аксиом для данных метрик. Неравенство Коши. Неравенство Минковского и его использование для доказательства неравенства треугольника для евклидовой метрики в $\mathbf{R}^n$. Свойства сходящихся последовательностей в произвольном метрическом пространстве. Критерий сходимости последовательности в $\mathbf{R}^n$. Фундаментальность сходящейся последовательности. Полнота пространства $\mathbf{R}^n$. Доказательство того, что шар является открытым множеством. Свойства открытых множеств (3 свойства). Критерий замкнутости множества. Свойства замкнутых множеств (3 свойства). Свойства компакта в метрическом пространстве. Теорема Больцано-Вейерштрасса для пространства $\mathbf{R}^n$, следствие о компактах.

Предел функции многих переменных в точке: определение и критерий существования предела в терминах последовательностей (без доказательства). Лемма о существовании предела функции. Два примера нахождения предела функции. Два примера функций, не имеющих предела в данной точке. Два примера нахождения предела функции по направлению, следствие. Два примера нахождения повторных пределов функции двух переменных, следствия. Пример функции, непрерывной в точке по любому лучу, но не являющейся непрерывной в этой точке. Теорема о непрерывности суперпозиции непрерывных функций многих переменных (без доказательства). Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компакте.

Дифференцируемость функции в точке: определение, критерий дифференцируемости, следствие. Пример непрерывной функции, не являющейся дифференцируемой. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке; пример, показывающий, что данное условие не является достаточным. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке; пример, показывающий, что данное условие не является необходимым. Теорема о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых функций многих переменных и формула для вычисления ее частных производных. Формула конечных приращений Лагранжа для функции многих переменных. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменных. Свойства дифференциала (3 свойства), доказательство одного из свойств двумя способами. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Теорема о вычислении производной по направлению. Связь градиента и производной по направлению. Экстремальное свойство направления, задаваемого градиентом.

Пример функции двух переменных, имеющей различные смешанные производные второго порядка в точке. Теорема об условии совпадения смешанных производных по одним и тем же переменным (без доказательства). Неинвариантность второго дифференциала относительно замены переменных общего вида; инвариантность второго дифференциала относительно линейной замены переменных, следствие. Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано для функции многих переменных.

Теорема о неявной функции, определяемой одним уравнением. Нахождение производных неявной функции с помощью формального дифференцирования исходного уравнения. Свойство якобиана системы сложных функций. Теорема о системе неявных функций, определяемых системой уравнений (без доказательства). Нахождение частных производных неявных функций с помощью формального дифференцирования исходной системы уравнений. Теорема об обратимости регулярного отображения, следствие о связи якобианов взаимно обратных регулярных отображений.

Необходимое условие локального экстремума, следствие. Необходимое условие локального минимума, следствие. Критерии для квадратичных форм (без доказательства). Лемма об оценке снизу положительно определенной квадратичной формы. Критерии Сильвестра для квадратичных форм (без доказательства). Достаточные условия экстремума.

Функции, используемые в качестве примеров: $2x^2y / (x^4 + y^2)$, $x \sin(1/y)$, $(x^2 + y^2) \sin((x^2 + y^2)^{-1/2})$, $xy(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$, $2xy / (x^2 + y^2)$, $(x^3 + y^3)^{1/3}$.