

Лабораторная работа 1

Свободные колебания

Динамика механических систем, 2017

- 1 Автономные системы уравнений
- 2 Исследование свободных колебаний
 - Метод гармонического баланса
 - Метод Ван-дер-Поля
 - Метод Ляпунова для квазилинейных систем
 - Метод Крылова
- 3 Варианты заданий
- 4 Указания

Механические системы с одной степенью свободы описываются автономными системами дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Плоскость переменных x, y называется фазовой. Точка (x, y) называется изображающей, кривая, которую описывает изображающая точка с течением времени называется фазовой кривой. Полная совокупность различных фазовых траекторий называется фазовым портретом.

Особыми точками системы называются точки, в которых

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

Предположим, что x_0, y_0 — особая точка системы (1).

Произведём линеаризацию системы в окрестности особой точки:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + \dots, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + \dots \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) введены обозначения:

$$\xi = x - x_0, \eta = y - y_0$$
$$a_{11} = \frac{\partial P}{\partial x}, a_{12} = \frac{\partial P}{\partial y}, a_{21} = \frac{\partial Q}{\partial x}, a_{22} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Характер особых точек определяется характеристическим уравнением:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

- если корни уравнения (3) вещественные одного знака, точка называется узлом, если корни положительные — неустойчивым узлом, если отрицательные — устойчивым;
- если корни уравнения (3) вещественные разных знаков, точка называется седловой;
- если корни уравнения (3) — комплексно сопряжённые вида $\alpha \pm i\beta$, точка называется устойчивым фокусом, если $\alpha < 0$ и неустойчивым, если $\alpha > 0$;
- если корни уравнения (3) — чисто мнимые вида $\pm i\beta$, точка называется устойчивым центром;

При анализе свободных колебаний интерес представляют особые точки типа центра.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомой нити в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (4)$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi, \quad y = \dot{\varphi}.$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) имеет следующие особые точки:

$$y = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (-1)^n \omega^2 = 0 \quad (6)$$

Если n — чётное, то уравнение имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.

Если n — нечётное, то уравнение имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm \omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует нижнее положение маятника.

Рассмотрим уравнение (4) в окрестности особой точки $(0, 0)$. Разложим в ряд функцию $\sin \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \right) = 0, \quad (7)$$

Вводим новую переменную:

$$\theta = \mu\varphi,$$

где μ — малый параметр. В уравнении оставляем слагаемые до третьего порядка малости. Получаем:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2\mu^2\frac{\theta^3}{6}, \quad (8)$$

или

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \varepsilon\theta^3, \quad (9)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu^2\omega^2}{6}.$$

Уравнение (9), описывает колебания конечного размаха математического маятника и совпадает с уравнением Дюффинга.

Содержание

- 1 Автономные системы уравнений
- 2 Исследование свободных колебаний
 - Метод гармонического баланса
 - Метод Ван-дер-Поля
 - Метод Ляпунова для квазилинейных систем
 - Метод Крылова
- 3 Варианты заданий
- 4 Указания

Скелетной кривой будем называть зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды.

Рассмотрим нелинейное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (10)$$

где $f(x)$ — позиционная восстанавливающая сила.

Предположим, что восстанавливающая сила является симметричной, то есть $f(x) = -f(-x)$.

Ищем решение уравнения в виде

$$x = A \sin pt, \quad (11)$$

Подставим (11) в (10):

$$-A\rho^2 \sin pt + f(A \sin pt) = 0, \quad (12)$$

Функция $f(A \sin pt)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\rho}$$

и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(A \sin pt) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kpt, \quad (13)$$

где

$$B_k = \frac{1}{\rho\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(A \sin pt) \sin kpt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin k\psi d\psi$$

Оставим в разложении (14) одно только первое слагаемое и подставим его в (12):

$$-Ap^2 \sin pt + B_1 \sin pt = 0,$$

или

$$-Ap^2 + B_1 = 0, \quad (14)$$

Из (14) получаем выражение для скелетной кривой:

$$p^2 = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi dt, \quad (15)$$

Рассмотрим произвольный случай, когда восстанавливающая сила не является позиционной:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad (16)$$

Ищем решение в виде отрезка ряда Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \dots + A_N \cos Npt + B_N \sin Npt, \quad (17)$$

или

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \quad (18)$$

Подставляем (18) в (16):

$$-\sum_{n=1}^N n^2 (A_n \cos npt + B_n \sin npt) + F(t) = 0, \quad (19)$$

В формуле (19) введено обозначение

$$F(t) = f \left[A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \right. \\ \left. \sum_{n=1}^N n (-A_n \sin npt + B_n \cos npt) \right]$$

Функция $F(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{p}$ и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt), \quad (20)$$

где

$$a_0 = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) \cos npt dt,$$

$$b_n = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) \sin npt dt,$$

Подставим разложение (20) в уравнение (19) и соберем множители при одинаковых гармониках

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 : \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) dt = 0, \\ \cos pt : A_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) \cos ptdt, \\ \sin pt : B_1 = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) \sin ptdt, \\ \dots\dots\dots \\ \cos npt : n^2 A_n = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) \cos nptdt, \\ \sin npt : n^2 B_n = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\rho}} f(t) \sin nptdt, \\ n = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (21)$$

Уравнения (21) образуют систему для определения A_j, B_j .
Получив выражения для A_1, B_1 , находим амплитуду колебаний по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

и строим скелетную кривую.

Содержание

- 1 Автономные системы уравнений
- 2 **Исследование свободных колебаний**
 - Метод гармонического баланса
 - **Метод Ван-дер-Поля**
 - Метод Ляпунова для квазилинейных систем
 - Метод Крылова
- 3 Варианты заданий
- 4 Указания

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (22)$$

Уравнение вида (22), содержащее малый множитель ε при нелинейном слагаемом, называется квазилинейным.

Уравнение, полученное из (22) при $\varepsilon \rightarrow 0$, называется порождающим

Будем искать решение (22) в виде

$$x = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t \quad (23)$$

В представлении (23) две неизвестные функции, в уравнении (22) — только одна. Для определенности замены свяжем функции A и B дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t) \cos \omega t + \dot{B}(t) \sin \omega t = 0 \quad (24)$$

Продифференцируем (23):

$$\dot{x} = \dot{A}(t) \cos \omega t + \dot{B}(t) \sin \omega t + \omega [-A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t]$$

С учетом (24) получаем:

$$\dot{x} = \omega [-A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t]$$

Продифференцируем (23) ещё раз:

$$\ddot{x} = \omega [-\dot{A}(t) \sin \omega t + \dot{B}(t) \cos \omega t] - \omega^2 [A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t] \quad (25)$$

Подставляя (25) в (22), имеем:

$$\begin{aligned} \omega [-\dot{A}(t) \sin \omega t + \dot{B}(t) \cos \omega t] = \\ = \varepsilon f \{ A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t, \\ \omega [-A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t] \} \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношения (24) и (27) образуют систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{A}(t) \cos \omega t + \dot{B}(t) \sin \omega t = 0, \\ -\dot{A}(t) \sin \omega t + \dot{B}(t) \cos \omega t = \frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \end{cases} \quad (27)$$

где

$$F(t) = f \{A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t, \omega [-A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t]\}$$

Решаем систему (27):

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \sin \omega t, \\ \dot{B}(t) = \frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \cos \omega t \end{cases} \quad (28)$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = R(t) \cos \theta(t), \\ \dot{B}(t) = R(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad (29)$$

Найдем выражения для x и \dot{x} :

$$x = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t = R(t) [\cos \omega t \cos \theta(t) + \sin \omega t \sin \theta(t)]$$

или

$$x = R(t) \cos [\omega t - \theta(t)]$$

Аналогично

$$\dot{x} = \omega [-A(t) \sin \omega t + B(t) \cos \omega t] = -\omega R(t) [\sin \omega t \cos \theta(t) - \cos \omega t \sin \theta(t)]$$

или

$$\dot{x} = -\omega R(t) \sin [\omega t - \theta(t)]$$

Подставим (29) в (28):

$$\begin{cases} \dot{R} \cos \theta - R \sin \theta \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \sin \omega t, \\ \dot{R} \sin \theta + R \cos \theta \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \cos \omega t \end{cases} \quad (30)$$

Решим систему (30) относительно \dot{R} и $\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \sin (\omega t - \theta), \\ R \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega} F(t) \cos (\omega t - \theta) \end{cases} \quad (31)$$

или

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f [R \cos(\omega t - \theta), -\omega R \sin(\omega t - \theta)] \sin (\omega t - \theta), \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega R} f [R \cos(\omega t - \theta), -\omega R \sin(\omega t - \theta)] \cos (\omega t - \theta) \end{cases} \quad (32)$$

Все выкладки до настоящего момента — точные. Теперь приближенно заменим правые части (32) из средними значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^T f[R \cos(\omega t - \theta), -\omega R \sin(\omega t - \theta)] \sin(\omega t - \theta) dt, \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^T f[R \cos(\omega t - \theta), -\omega R \sin(\omega t - \theta)] \cos(\omega t - \theta) \frac{dt}{R} \end{cases}$$

При вычислении интегралов в правых частях последних выражений будем считать $R(t)$ и $\theta(t)$ постоянными.

Произведём в интегралах замену переменных

$$\psi = \omega t - \theta$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \sin \psi dt = \varepsilon \Phi(R), \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, -\omega R \sin \psi) \cos \psi \frac{dt}{R} = \varepsilon \Psi(R) \end{cases} \quad (33)$$

Уравнения (33) называется уравнениями установления. В первое уравнение входит только $R(t)$ и оно может быть проинтегрировано независимо от второго. Особые точки определяются уравнениями

$$\Phi(R) = 0, \Psi(R) = 0 \quad (34)$$

В случае $\Psi(R) = 0$ из второго уравнения (33) находим

$$\theta = \theta_0 = \text{const},$$

что означает, что особые точки лежат на радиальных прямых и их положение на радиальных лучах определяется корнями уравнения

$$\Phi(R) = 0.$$

Уравнение может иметь несколько корней

$$R = R_j.$$

Об устойчивости равновесного состояния $R = R_j$ можно судить по характеру изменения вариации амплитуды колебаний R_j . Согласно (33) имеем:

$$\dot{R} = \varepsilon \Phi(R) = 0, \tag{35}$$

Рассмотрим возмущённое движение $R_j + \delta R_j$. Для амплитуды возмущённого движения получаем:

$$\frac{d(R_j + \delta R_j)}{dt} = \varepsilon \Phi(R_j + \delta R_j), \quad (36)$$

Разлагаем правую часть (35) и ограничиваясь линейным приближением, получаем:

$$\frac{d(\delta R_j)}{dt} = \varepsilon \Phi'(R_j) \delta R_j, \quad (37)$$

Если

$$\Phi'(R_j) < 0,$$

то возмущения амплитуды δR будут стремиться к нулю и режим колебаний, соответствующий $R = R_j$, является устойчивым

Содержание

- 1 Автономные системы уравнений
- 2 Исследование свободных колебаний
 - Метод гармонического баланса
 - Метод Ван-дер-Поля
 - Метод Ляпунова для квазилинейных систем
 - Метод Крылова
- 3 Варианты заданий
- 4 Указания

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (38)$$

Перейдём к собственному времени:

$$t = \frac{2\pi\tau}{T} = \frac{\tau}{\omega} \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots \right)$$

В последней формуле τ — собственное время,

$$T = \frac{2\pi}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots}$$

— период колебаний, h_m — константы, подлежащие определению.

Найдем \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{T}{2\pi} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots} \frac{dx}{d\tau}$$

Уравнение (38) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots\right)^2 x &= \\ = \varepsilon f \left(x, \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \dots} \frac{dx}{d\tau} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

Поскольку уравнение (38) не содержит время в явном виде, за начало отчёта можно взять любой момент времени.

Положим

$$\begin{cases} x(0) = A(\varepsilon), \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Решение задачи ищем в виде:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (41)$$

Подставляя (41) в (39), получаем последовательность дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 &= 0, \\ \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 &= -2h_1 x_0 + \frac{1}{\omega} f\left(x_0, \omega \frac{dx_0}{d\tau}\right) \\ &\dots \end{aligned} \quad (42)$$

Решение первого из уравнений (42) имеет вид:

$$x_0 = C \cos \tau, \quad (43)$$

Значение C — неизвестно и подлежит определению.
 Рассмотрим второе уравнение (42):

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 C \cos \tau + \frac{1}{\omega} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau), \quad (44)$$

Правая часть (44) — периодическая функция. Для того, чтобы уравнение (44) допускало периодические решения, следует потребовать его ортогональности функциям $\sin \tau$, $\cos \tau$:

$$\int_0^{2\pi} \left[-2h_1 C \cos \tau + \frac{1}{\omega} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \right] \sin \tau d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-2h_1 C \cos \tau + \frac{1}{\omega} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \right] \cos \tau d\tau = 0,$$

Или:

$$I(C) = \int_0^{2\pi} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \sin \tau d\tau = 0, \quad (45)$$

$$h_1 = \frac{1}{2C\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(C \cos \tau, -\omega C \sin \tau) \cos \tau d\tau \quad (46)$$

Уравнение (45) может являться тождеством, в этом случае используем (45) для установления зависимости между амплитудой колебаний и их частотой. Если (45) не имеет решений, делаем вывод об отсутствии периодических решений. Если оно имеет несколько корней, каждому из них соответствует своё периодическое решение.

После того, как найдено h_1 , решение исходной задачи приобретает вид (если ограничиться первым приближением):

$$x_0 = C \cos \left(\frac{\omega t}{1 + h_1 \varepsilon} \right)$$

Далее можно построить решение уравнения (44), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0$$

и содержащее неизвестный параметр. Построенное решение используется при решении следующего уравнения в последовательности (42). Для определения неизвестных параметров также используется условие периодичности.

Содержание

- 1 Автономные системы уравнений
- 2 Исследование свободных колебаний
 - Метод гармонического баланса
 - Метод Ван-дер-Поля
 - Метод Ляпунова для квазилинейных систем
 - Метод Крылова
- 3 Варианты заданий
- 4 Указания

Метод основан на одновременном разложении в ряд по малому параметру неизвестной функции $x(t)$ и квадрата искомой частоты. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (47)$$

Разлагаем в ряд неизвестную функцию:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (48)$$

Разлагаем в ряд квадрат частоты:

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (49)$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \dots + (p^2 - \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 p_2 - \dots) \times \\ \times (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots) = \quad (50) \\ = \varepsilon f[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots, \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \dots], \end{aligned}$$

Соберём слагаемые при различных степенях ε :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + p^2 x_0 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + p^2 x_1 &= p_1 x_0 + f(x_0, \dot{x}_0), \\ \ddot{x}_2 + p^2 x_2 &= p_1 x_1 + p_2 x_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (51)$$

Начальные условия следующие:

$$\begin{cases} x_0(0) = A, \\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

и

$$x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0, \quad i > 0 \quad (53)$$

Для определения p_i используем условия ортогональности правых частей уравнений к функциям $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$

Варианты заданий

- 1 $(1 - a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g \sin \theta = 0$
- 2 $\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta - ga \sin \theta = 0$
- 3 $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2 \cos \theta\right) \sin \theta = 0$
- 4 $\ddot{x} + x = \varepsilon x \dot{x}^2$





Содержание задания:

- Найти особые точки систем и произвести их классификацию, построить фазовые портреты;
- Построить уравнение колебаний конечной амплитуды в окрестности особой точки типа центра;
- Построить методами гармонического баланса, Ван-Дер-Поля, Пуанкаре и Крылова скелетные кривые и изобразить их на одном графике.

Указания

- При использовании метода гармонического баланса выбрать $N = 3$;
- При использовании методов Крылова и Ляпунова найти не менее трёх слагаемых в рядах (41), (48)

Литература I

-  В. В. Степанов.
Курс дифференциальных уравнений.
М.:Наука, 1950.
-  И. М. Бабаков.
Теория колебаний.
М.:Наука, 1968.
-  Я. Г. Пановко.
Введение в теорию механических колебаний.
М.:Наука, 1971.
-  В. Л. Бидерман.
Прикладная теория механических колебаний.
Высшая школа, 1972.