Лабораторная работа 1

Свободные колебания

Динамика механических систем, 2017

Механические системы с одной степенью свободы описываются автономными системами дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Полоскость переменных x, y называется фазовой. Точка (x, y) называется изображающей, кривая, кторую описывает изображающая точка с течением времени называется фазовой кривой. Полная совокупность различных фазовых траекторий называется фазовым портретом.

Особыми точками системы называются точки, в которых

$$P(x,y) = Q(x,y) = 0$$

Предположим, что x_0, y_0 — особая точка системы (1).
Произведём линеаризацию системы в окрестности особой точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + \ldots, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + \ldots. \end{array} \right. \qquad (2)$$

В системе (2) введены обозначения:

$$\xi = x - x_0,\ \eta = y - y_0$$

$$a_{11} = \frac{\partial P}{\partial x},\ a_{12} = \frac{\partial P}{\partial y},\ a_{21} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ a_{22} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Характер особых точек определяется характеристическим уравнением:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

- если корни уравнения (3) вещественные одного знака, точка называется узлом, если корни положительные — неустойчивым узлом, если отрицательные — устойчивым;
- если корни уравнения (3) вещественные разных знаков, точка называется седловой;
- если корни уравнения (3) — комплексно сопряжённые вида $\alpha \pm i\beta$, точка называется устойчивым фокусом, если $\alpha < 0$ и неустойчивым, если $\alpha > 0$;
- если корни уравнения (3) — чисто мнимые вида $\pm i\beta$, точка называется устойчивым центром;

При анализе свободных колебаний интерес представляют особые точки типа центра.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомой нити в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi,\ y = \dot{\varphi}.$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) имеет следующие особые точки:

$$y = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (-1)^n\omega^2 = 0 \tag{6}$$

Если n — чётное, то уравнение имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.
Если n — чётное, то уравнение имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует нижнее положение маятника.
Рассмотрим уравнение (4) в окрестности особой точки $(0, 0)$.
Разложим в ряд функцию $\sin\varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots\right) = 0, \tag{7}$$

Вводим новую переменную:

$$\theta = \mu\varphi,$$

где μ — малый параметр. В уравнении оставляем слагаемые до третьего порядка малости. Получаем:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2\mu^2\frac{\theta^3}{6}, \qquad (8)$$

или

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \varepsilon\theta^3, \qquad (9)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu^2\omega^2}{6}.$$

Уравнение (9), описывает колебания конечного размаха математического маятника и совпадает с уравнением Дюффинга.

Содержание

Скелетной кривой будем называть зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды.
Рассмотрим нелинейное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{10}$$

где $f(x)$ — позиционная восстанавливающая сила.
Предположим, что восстанавливающая сила является симметричной, то есть $f(x) = -f(-x)$.
Ищем решение уравнения в виде

$$x = A \sin pt, \tag{11}$$

Подставим (11) в (10):

$$-Ap^2 \sin pt + f(A \sin pt) = 0, \tag{12}$$

Функция $f(A \sin pt)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(A \sin pt) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kpt, \tag{13}$$

где

$$B_k = \frac{1}{p\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(A \sin pt) \sin kptdt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin k\psi dt$$

Оставим в разложении (14) одно только первое слагаемое и подставим его в (12):

$$-Ap^2 \sin pt + B_1 \sin pt = 0,$$

или

$$-Ap^2 + B_1 = 0, \tag{14}$$

Из (14) получаем выражение для скелетной кривой:

$$p^2 = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int\limits_0^{2\pi} f\left(A \sin\psi\right) \sin\psi dt, \tag{15}$$

Рассмотрим произвольный случай, когда восстанавливающая сила не является позиционной:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \tag{16}$$

Ищем решение в виде отрезка ряда Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \ldots + A_N \cos Npt + B_N \sin Npt, \tag{17}$$

или

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos npt + B_n \sin npt\right), \tag{18}$$

Подставляем (18) в (16):

$$-\sum_{n=1}^{N} n^2 \left(A_n \cos npt + B_n \sin npt\right) + F(t) = 0, \tag{19}$$

В формуле (19) введено обозначение

$$F(t) = f\left[A_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n \cos npt + B_n \sin npt\right), \right.$$
$$\left. \sum_{n=1}^{N} n\left(-A_n \sin npt + B_n \cos npt\right)\right]$$

Функция $F(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{p}$ и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos npt + b_n \sin npt\right), \tag{20}$$

где

$$a_0 = \frac{p}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \cos nptdt,$$

$$b_n = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \sin nptdt,$$

Подставим разложение (20) в уравнение (19) и соберем множители при одинаковых гармониках

$$\left\{\begin{array}{rl} 1: & \frac{p}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t)dt = 0, \\ \cos pt: & A_1 = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t)\cos ptdt, \\ \sin pt: & B_1 = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t)\sin ptdt, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \cos npt: & n^2A_n = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t)\cos nptdt, \\ \sin npt: & n^2B_n = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t)\sin nptdt, \end{array}\right. \tag{21}$$

$$n = \overline{1, N}$$

Уравнения (21) образуют систему для определения A_i, B_i. Получив выражения для A_1, B_1, находим амплитуду колебаний по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

и строим скелетную кривую.

Содержание

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{22}$$

Уравнение вида (22), содержащее малый множитель ε при нелинейном слагаемом, называется квазилинейным.
Уравнение, полученное из (22) при $\varepsilon \to 0$, называется порождающим
Будем искать решение (22) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{23}$$

В представлении (23) две неизвестные функции, в уравнении (22) — только одна. Для определенности замены свяжем функции A и B дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{24}$$

Продифференцируем (23):

$$\dot{x} = \dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t + \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

С учетом (24) получаем:

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

Продифференцируем (23) ещё раз:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = \omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] - \\ -\omega^2\left[A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t\right]\end{aligned} \tag{25}$$

Подставляя (25) в (22), имеем:

$$\begin{aligned}\omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] = \\ = \varepsilon f\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \\ \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\}\end{aligned} \tag{26}$$

Соотношения (24) и (27) образуют систему уравнений вида

$$\begin{cases}\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0, \\ -\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t = \frac{\varepsilon}{\omega}F(t)\end{cases} \tag{27}$$

где

$$F(t) = f\left\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\right\}$$

Решаем систему (27):

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{28}$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t)\sin\theta(t) \end{aligned} \tag{29}$$

Найдем выражения для x и $\dot{x}$:

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t = R(t)\left[\cos\omega t\cos\theta(t) + \sin\omega t\sin\theta(t)\right]$$

или

$$x = R(t)\cos\left[\omega t - \theta(t)\right]$$

Аналогично

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right] = -\omega R(t)\left[\sin\omega t\cos\theta(t) - \cos\omega t\sin\theta(t)\right]$$

или

$$\dot{x} = -\omega R(t)\sin\left[\omega t - \theta(t)\right]$$

Подставим (29) в (28):

$$\begin{cases} \dot{R}\cos\theta - R\sin\theta\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{R}\sin\theta + R\cos\theta\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{30}$$

Решим систему (30) относительно $\dot{R}$ и $\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ R\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{31}$$

или

$$\begin{cases} \dot{R} = -\frac{\varepsilon}{\omega}f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega R}f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{32}$$

Все выкладки до настоящего момента — точные. Теперь приближенно заменим правые части (32) из средними значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t-\theta), -\omega R\sin(\omega t-\theta)\right]\sin\left(\omega t-\theta\right)dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t-\theta), -\omega R\sin(\omega t-\theta)\right]\cos\left(\omega t-\theta\right)\dfrac{dt}{R} \end{cases}$$

При вычислении интегралов в правых частях последних выражениях будем считать $R(t)$ и $\theta(t)$ постоянными. Произведём в интегралах замену переменных

$$\psi = \omega t - \theta$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi dt = \varepsilon\Phi(R), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi\dfrac{dt}{R} = \varepsilon\Psi(R) \end{cases} \tag{33}$$

Уравнения (33) называется уравнениямим установления. В первое уравнение входит только $R(t)$ и оно может быть проинтегрировано независимо от второго.
Особые точки определяются уравнениями

$$\Phi(R) = 0, \ \Psi(R) = 0 \tag{34}$$

В случае $\Psi(R) = 0$ из второго уравнения (33) находим

$$\theta = \theta_0 = const,$$

что означает, что особые точки лежат на радиальных прямых и их положение на радиальных лучах определяется корнями уравнения

$$\Phi(R) = 0.$$

Уравнение может иметь несколько корней

$$R = R_j.$$

Об устойчивости равновесного состояния $R = R_j$ можно судить по характеру изменения вариации амплитуды колебаний R_j. Согласно (33) имеем:

$$\dot{R} = \varepsilon\Phi(R) = 0, \tag{35}$$

Рассмотрим возмущённое движение $R_j + \delta R_j$. Для амплитуды возмущённого движения получаем:

$$\frac{d(R_j + \delta R_j)}{dt} = \varepsilon \Phi(R_j + \delta R_j), \tag{36}$$

Разлагаем правую часть (35) и ограничиваясь линейным приближением, получаем:

$$\frac{d(\delta R_j)}{dt} = \varepsilon \Phi'(R_j)\delta R_j, \tag{37}$$

Если

$$\Phi'(R_j) < 0,$$

то возмущения амплитуды δR будут стремиться к нулю и режим колебаний, соответствующий $R = R_j$, является устойчивым

Содержание

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{38}$$

Перейдём к собственному времени:

$$t = \frac{2\pi\tau}{T} = \frac{\tau}{\omega}\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

В последней формуле τ — собственное время,

$$T = \frac{2\pi}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots}$$

— период колебаний, h_m — константы, подлежащие определению.

Найдем $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{T}{2\pi}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots}\frac{dx}{d\tau}$$

Уравнение (38) приобретает вид:

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2 x = \\ = \frac{\varepsilon}{\omega^2} f\left(x, \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots}\frac{dx}{d\tau}\right)\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2,\end{gathered} \tag{39}$$

Поскольку уравнение (38) не содержит время в явном виде, за начало отчёта можно взять любой момент времени. Положим

$$\begin{cases} x(0) = A(\varepsilon), \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Решение задачи ищем в виде:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{41}$$

Подставляя (41) в (39), получаем последовательность дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0, \\ &\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 x_0 + \frac{1}{\omega^2} f\left(x_0, \omega \frac{dx_0}{d\tau}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{42}$$

Решение первого из уравнений (42) имеет вид:

$$x_0 = C \cos \tau, \tag{43}$$

Значение C — неизвестно и подлежит определению. Рассмотрим второе уравнение (42):

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right), \tag{44}$$

Правая часть (44) — периодическая функция. Для того, чтобы уравнение (44) допускало периодические решения, следует потребовать его ортогональности функциям $\sin\tau$, $\cos\tau$:

$$\int_0^{2\pi}\left[-2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right]\sin\tau d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\left[-2h_1 C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right]\cos\tau d\tau = 0,$$

Или:

$$I(C) = \int_0^{2\pi} f\,(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau)\sin\tau d\tau = 0, \qquad (45)$$

$$h_1 = \frac{1}{2C\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} f\,(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau)\cos\tau d\tau \qquad (46)$$

Уравнение (45) может являться тождеством, в этом случае используем (45) для установления зависимости между амплитудой колебаний и их частотой. Если (45) не имеет решений, делаем вывод об отсутствии периодических решений. Если оно имеет несколько корней, каждому их них соответствует своё периодическое решение.

После того, как найдено h_1, решение исходной задачи приобретает вид (если ограничиться первым приближением):

$$x_0 = C\cos\left(\frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon}\right)$$

Далее можно построить решение уравнения (44), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0$$

и содержащее неизвестный параметр. Построенное решение используется при решении следующего уравнения в последовательности (42). Для определения неизвестных параметров также используется условие периодичности.

Содержание

Метод основан на одновременном разложении в ряд по малому параметру неизвестной функции $x(t)$ и квадрата искомой частоты. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{47}$$

Разлагаем в ряд неизвестную функцию:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{48}$$

Разлагаем в ряд квадрат частоты:

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \tag{49}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \ldots + \left(p^2 - \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 p_2 - \ldots\right) \times \\ \times \left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots\right) = \\ = \varepsilon f\left[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots, \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + \ldots\right], \end{aligned} \tag{50}$$

Соберём слагаемые при различных степенях ε:

$$\begin{array}{l}
\ddot{x}_0 + p^2 x_0 = 0, \\
\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = p_1 x_0 + f(x_0, \dot{x}_0), \\
\ddot{x}_2 + p^2 x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_0 + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_1 + \left.\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \tag{51}$$

Начальные условия следующие:

$$\begin{cases} x_0(0) = A, \\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases} \tag{52}$$

и

$$x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0,\ i > 0 \tag{53}$$

Для определения p_i используем условия ортогональности правых частей уравнений к функциям $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$

Варианты заданий

1. $(l - a\theta)\,\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$
2. $\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}\omega^2 a^2 \sin\theta\cos\theta - ga\sin\theta = 0$
3. $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$
4. $\ddot{x} + x = \varepsilon x\dot{x}^2$
5. $\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon\dot{x}^2 x$
6. $\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon\dot{x}\left(\omega^2 x^2 + \dot{x}^2\right)$
7. $\ddot{x} + \omega^2 x = -\varepsilon\dot{x}^3$

Варианты заданий

Содержание задания:

- Найти особые точки систем и произвести их классификацию, построить фазовые портреты;
- Построить уравнение колебаний конечной амплитуды в окрестности особой точки типа центра;
- Построить методами гармонического баланса, Ван-Дер-Поля, Ляпунова и Крылова скелетные кривые и изобразить их на одном графике.

Указания

- При использовании метода гармонического баланса выбрать $N = 3$;
- При использовании методов Крылова и Ляпунова найти не менее трёх слагаемых в рядах (41), (48)

Литература I

- В. В. Степанов.
  Курс дифференциальных уравенений.
  М.:Наука, 1950.
- И. М. Бабаков.
  Теория колебаний.
  М.:Наука, 1968.
- Я. Г. Пановко.
  Введение в теорию механических колебаний.
  М.:Наука, 1971.
- В. Л. Бидерман.
  Прикладная теория механических колебаний.
  Высшая школа, 1972.