Лабораторная работа №1
РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
1. Линейная теория упругости
2. Статический анализ
3. Плоская задача (плоское напряженное состояние)
4. Концентрация напряжений

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ
Тонкая прямоугольная пластина с размерами $2a$; a=5 (см) по длине и $2b$; b=2 (см) по ширине имеет в центре отверстие радиуса R=0.25 (см) (Рис. 1). Пластина выполнена из упругого изотропного материала с модулем Юнга $E=2\cdot10^6$ (кГ/см^2) и коэффициентом Пуассона ν=0,3. Пластина растягивается распределенной нагрузкой интенсивности $p=0{,}1\cdot10^6$ (кГ/см^2), действующей на ее левую и правую грани. Требуется определить максимальные напряжения в пластине.

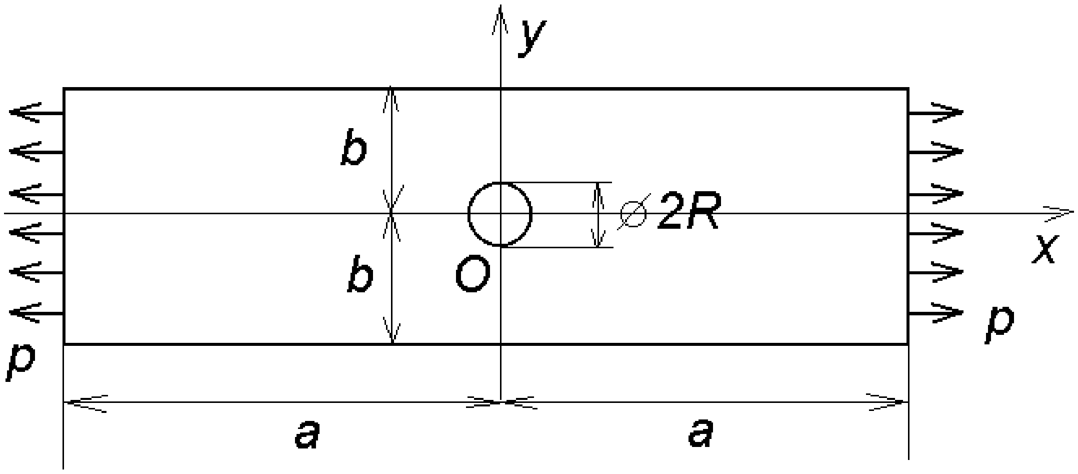


Рис. 1. Схема области

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ
Отверстие вносит возмущение в однородное напряженное состояние одноосно растягиваемой пластины. В зоне, вблизи отверстия, происходит повышение напряжений, называемое концентрацией напряжений. Аналогичная задача для бесконечной пластины, одноосно растягиваемой на бесконечности равномерными нагрузками, называется задачей Кирша и является фундаментальной задачей теории упругости о концентрации напряжений. В задаче Кирша максимальные напряжения, равные $3p$, возникают в точке с координатами $(0, R)$ (см. рис.1) и являются тангенциальными напряжениями.

Поскольку поля напряжений, деформаций и перемещений являются существенно неоднородными около отверстия, то для получения приемлемой точности конечно-элементных расчетов при построении конечно-элементных сеток следует задавать параметры, обеспечивающие сгущение разбиений вблизи отверстия.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При плоском напряженном состоянии перемещения пластины в области Ω, принадлежащей плоскости xy, можно характеризовать вектором перемещений $\underline{U}=\{U_x, U_y\}=\{U, V\}$, где $U=U(x, y)$, $V=V(x, y)$. Компоненты ε_{xx}, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, ε_{yy} тензора деформаций $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$, выражаются через поле перемещений $\underline{U}$ по формулам

$$S_{xx} = \varepsilon_{xx} = \partial U / \partial x; \qquad S_{yy} = \varepsilon_{yy} = \partial V / \partial y; \tag{1}$$
$$S_{xy} = \varepsilon_{xy} = (\partial U / \partial y + \partial V / \partial x)/2$$

Определяющие соотношения, связывающие механические напряжения и деформации в упругой изотропной среде при плоском напряженном состоянии, имеют вид

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \sigma_{xx} = \lambda^*(S_{xx} + S_{yy}) + 2\mu\, S_{xx} \\ T_{yy} &= \sigma_{yy} = \lambda^*(S_{xx} + S_{yy}) + 2\mu\, S_{yy} \\ T_{xy} &= \sigma_{xy} = 2\mu\, S_{xy} \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{\nu\, E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$ – тензор напряжений, σ_{xx}, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, σ_{yy} - компоненты тензора напряжений.

Коэффициенты λ и μ из (4) называются коэффициентами Ламе, коэффициент μ часто обозначается также через G и имеет смысл модуля сдвига. Модуль E из (4) называется модулем Юнга, а ν – коэффициентом Пуассона.

Уравнения равновесия упругой среды в плоской задаче имеют вид

$$\partial T_{xx} / \partial x + \partial T_{xy} / \partial y = 0 \tag{5}$$

$$\partial T_{xy} / \partial x + \partial T_{yy} / \partial y = 0 \tag{6}$$

Подстановка в (5), (6) определяющих соотношений (2) и формул (1) приводит к эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно неизвестных функций перемещений U и V. К этой системе следует добавить граничные условия на границе $\Gamma = \partial\,\Omega$ области. Основными видами граничных условий в теории упругости являются следующие условия. Пусть граница Γ разбита на два подмножества: Γ_u и Γ_σ. На части границы Γ_u считаются известными компоненты вектора перемещений

$$U = U_*, \qquad V = V_*, \qquad \{x, y\} \in \Gamma_u \tag{7}$$

На участке Γ_σ задается вектор напряжений $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$

$$T_{xx} n_x + T_{xy} n_y = p_x \qquad T_{xy} n_x + T_{yy} n_y = p_y, \qquad \{x, y\} \in \Gamma_\sigma \tag{8}$$

где $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ – вектор внешней единичной нормали к границе Γ.

Граничные условия (7) носят следующие наименования: граничные условия в перемещениях, граничные условия 1-ого рода, условия типа Дирихле, главные граничные условия. Обычно в (7) $U_* = 0$, $V_* = 0$, что соответствует жесткому закреплению участка границы Γ_u.

Аналогично, граничные условия (8) имеют следующие наименования: граничные условия в напряжениях, граничные условия 2-ого рода, условия типа Неймана, естественные граничные условия. При однородных граничных условиях (8), когда $p_x = 0$, $p_y = 0$, участок Γ_σ границы называется участком, свободным от напряжений. Вектор напряжений $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$, как векторная функция от x, y, может включать сосредоточенные векторы $\mathbf{F} = \{F_x, F_y\}$, которые имеют смысл сосредоточенных сил.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ANSYS

Пример решения задачи с использованием программы ANSYS содержится в файлах St2LS_1(ANSYS).doc и St2LS_1.inp. В файле St2LS_1(ANSYS).doc описана работа в интерактивном режиме.

В файле St2LS_1.inp содержатся команды. После выполнения этого файла в ANSYS (File → Read Input from…) требуется провести постпроцессорную обработку полученных результатов.

Пример решения задачи, близкой к описанной выше, содержится также в файле Vm142.dat из набора фирменных примеров, предоставляемых ANSYS.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ FlexPDE

Входной файл для программы FlexPDE - St2LS_1.pde.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим результаты, полученные с помощью расчетов в ANSYS.

В силу симметрии задачи рассматривается четверть пластинки. На рис. 2 показаны построенная область A3 с нанесенными номерами областей и опорных точек. (Пункты меню Plot->Areas, для нумерации областей и точек PlotCtrls->Numbering->отметить Area numbers, Keypoint numbers)

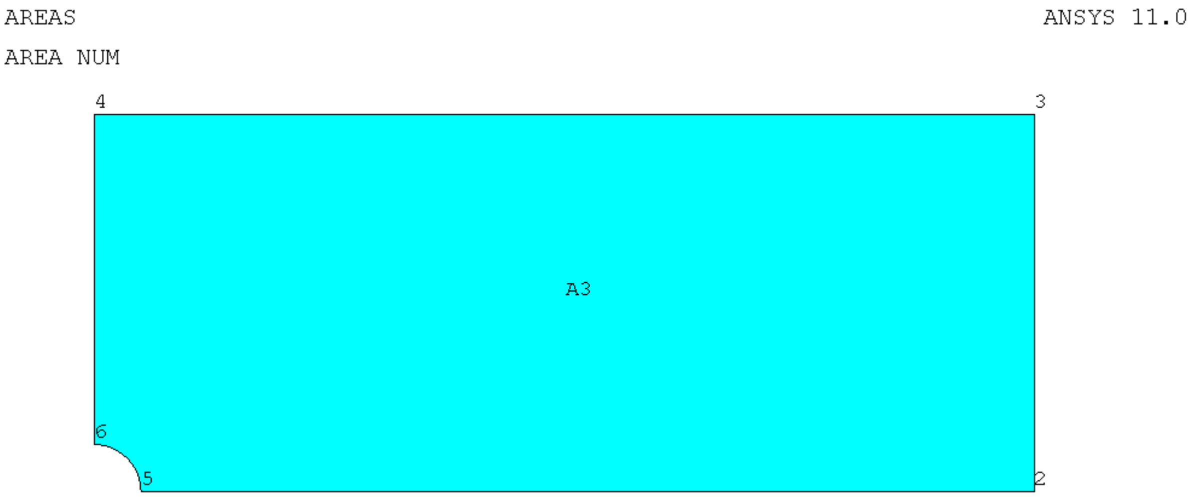
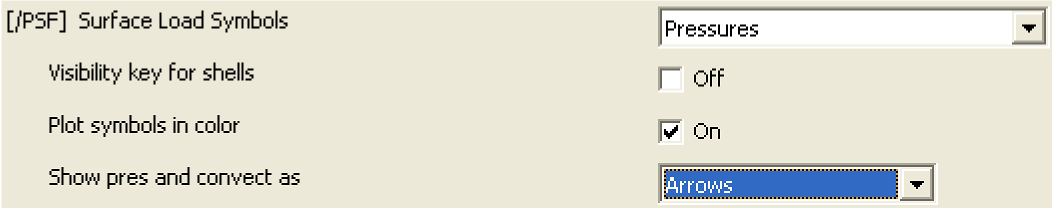


Рис. 2. Область с номерами опорных точек

Получающаяся конечно-элементная модель вместе с принятыми граничными условиями показана на рис. 3. (Пункты меню Plot->Elements, для отображения граничных условий PltCtrls->Symbols->отметить All applied BC, выбрать изображение условий распределенной нагрузки: Surface Load Symbols->Pressures)



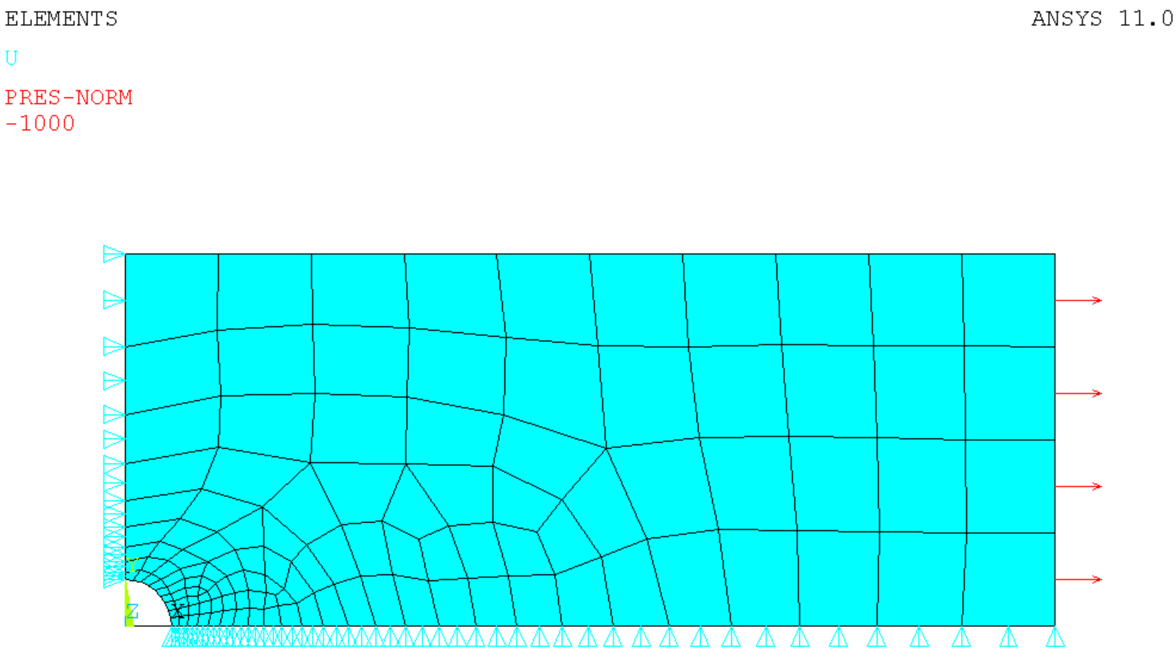


Рис. 3. Конечно-элементная сетка с граничными условиями

В качестве результатов расчетов можно привести картины распределения осевых перемещений U_x (рис. 4), осевых напряжений T_{yy} (рис. 5) и окружных (тангенциальных) напряжений $T_{\theta\theta}$. (Пункты меню General Postproc →

Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → DOF Solution → X-Component of displacement (для изображения картины распределения перемещений U_x); → Nodal Solu → Stess → Y-Component of stress (для изображения картины распределения напряжений T_{yy}); General Postproc → Options for Outp → Results coordinate system → Global Cylindrical; Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Stess →Y-Component of stress (для изображения картины распределения напряжений $T_{\theta\theta}$, y соответствует θ в глобальной цилиндрической системе координат)

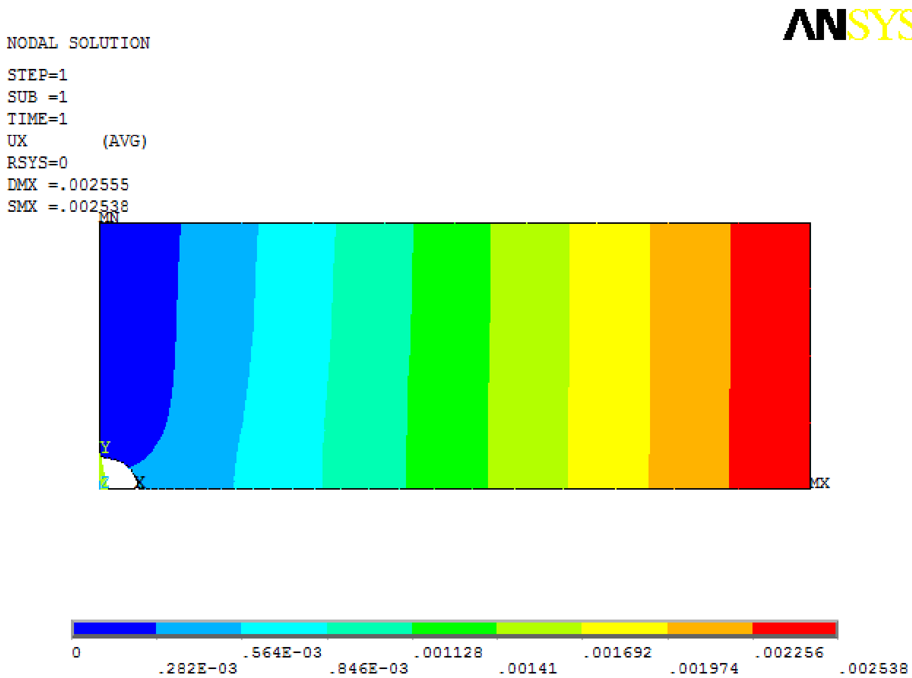


Рис. 4. Распределение перемещений u_x

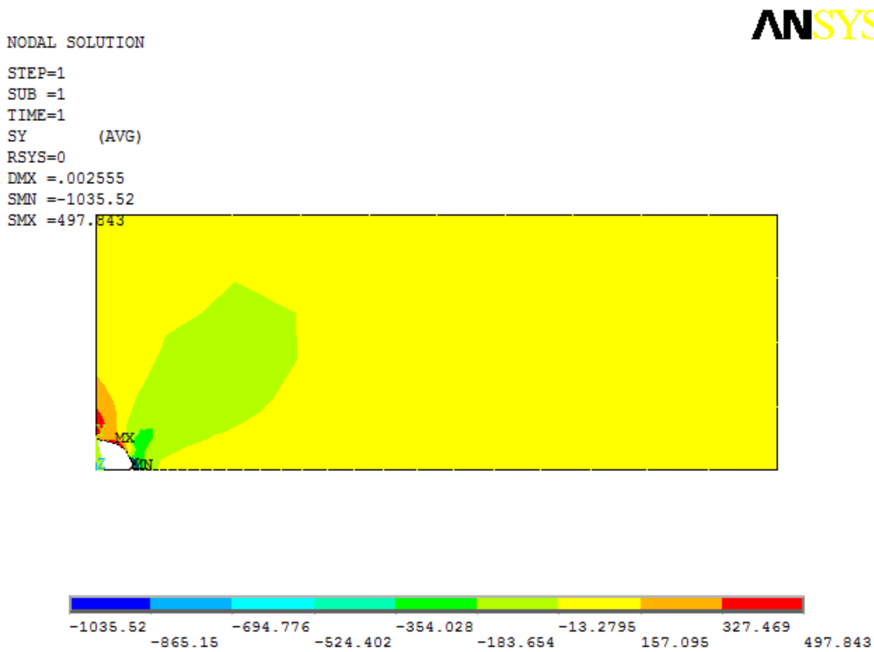


Рис. 5. Распределение осевых напряжений T_{yy}

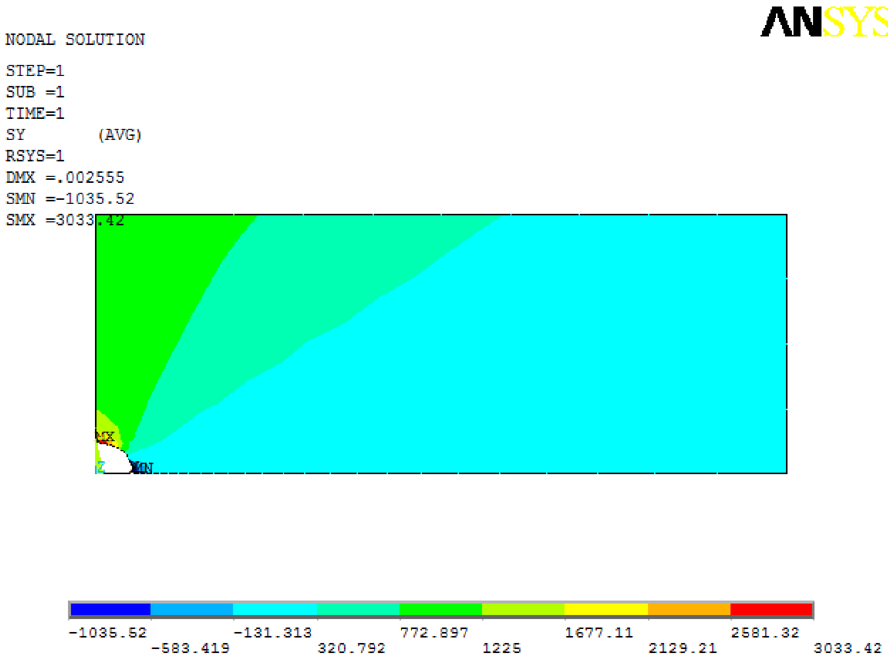


Рис. 6. Распределение тангенциальных напряжений $T_{\theta\theta}$

Как видно из рис. 5 и 6, отверстие является концентратором напряжений.

Индивидуальные задания – тела в форме букв.

Используя интерактивный и командный режимы программы ANSYS, решите задачу о растяжения тонкой пластинки в форме буквы из таблицы 1. На верхних границах, задайте растягивающую нагрузку, а нижнюю границу пластинки жестко закрепите. Геометрические размеры области придумайте самостоятельно в диапазонах значений, аналогичных рассмотренному выше примеру. При построении области используйте, где это возможно, свойства симметрии задачи. Материальные параметры возьмите теми же, что и для рассмотренного примера. Проведите расчеты в условиях плоского напряженного состояния. Определите максимальные напряжения в пластине. Проведите аналогичные расчеты во FlexPDE. Проанализируйте, сравните результаты и оформите отчет.

<u>Требования к отчету.</u>

Отчет должен содержать ФИО студентов полное описание задачи, а также результаты, полученные с помощью конечно-элементого комплекса ANSYS в интерактивном режиме (с описанием шагов) и командном режиме (с текстом входного файла), а также с помощью FlexPDE (с текстом входного файла).

В качестве результатов расчетов приведите:

- конечно-элементную сетку с граничными условиями
- картину деформированной формы
- картины распределения перемещений
- картину распределения вектора перемещений

- картины распределения напряжений
- картины распределения деформаций

Таблица 1

№ задания	Вид области	ФИО студента