

## ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА ПО ТЕМЕ «ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

- 1) Вещественные числа, промежутки. Модуль числа и его свойства. Функции  $\text{sign}$ , «пол» и «потолок».
- 2) Аксиома полноты. Ограниченные множества, верхняя и нижняя грани. Свойства ограниченных множеств.
- 3) Максимальный (минимальный) элемент, его единственность.
- 4) Точная верхняя (нижняя) грань (3 альтернативных определения). Лемма о существовании и единственности точной верхней грани.

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

- 5) Определение последовательности. Определение сходящейся последовательности, теорема о единственности предела.
- 6) Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
- 7) Теорема об умножении сходящейся последовательности на вещественное число.
- 8) Теоремы о сумме, разности и произведении сходящихся последовательностей.
- 9) Теоремы о свойствах последовательностей, связанных с неравенствами. Следствия. Замечание о невозможности замены нестрогих неравенств строгими  $\left(a_n = \frac{(-1)^n}{n}\right)$ .

10) Теорема о трех последовательностях.

- 11) Пример применения теоремы о трех последовательностях: доказать сходимость последовательности  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

12) Сходимость последовательности  $\{1/a_n\}$ . Следствие о частном сходящихся последовательностей. Пример применения теоремы:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{a}$ .

13) Лемма о вложенных отрезках.

14) Бесконечно малые последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей.

15) Бесконечно большие последовательности. Соотношения между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

### Монотонные последовательности.

16) Основные определения (возрастающая последовательность, строго возрастающая последовательность и т.д.).

17) Критерий сходимости возрастающей последовательности. Следствия.

18) Семь примеров вычисления предела последовательностей.

19) Число  $e$ . Существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

### ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

20) Определение подпоследовательности. Свойство номера элемента подпоследовательности ( $k_n \geq n$ ). Теорема о подпоследовательности сходящейся последовательности. Частичный предел.

21) Лемма Больцано-Вейерштрасса. Понятия верхнего и нижнего пределов.

22) Верхний и нижний предел. Критерий существования предела последовательности в терминах верхнего и нижнего предела.

23) Два определения фундаментальной последовательности, критерий Коши сходимости последовательности.

24) Расходимость гармонической последовательности.