Лабораторная работа №3
РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

1. Линейная теория упругости
2. Статический анализ
3. Плоская задача (плоское напряженное состояние)
4. Концентрация напряжений

Описание задачи и вводные замечания

В данном разделе рассмотрим тонкую прямоугольную пластину с размерами $2a$; a=5 (см) по длине и $2b$; b=2 (см) по ширине, имеющую в центре отверстие радиуса R=0.25 (см) (Рис. 4.1). Пластина выполнена из упругого изотропного материала с модулем Юнга $E=2\cdot10^6$ (кГ/см^2) и коэффициентом Пуассона ν=0,3. Пластина растягивается распределенной нагрузкой интенсивности $p=1\cdot10^3$ (кГ/см^2), действующей на ее левую и правую грани. Требуется определить максимальные напряжения в пластине.

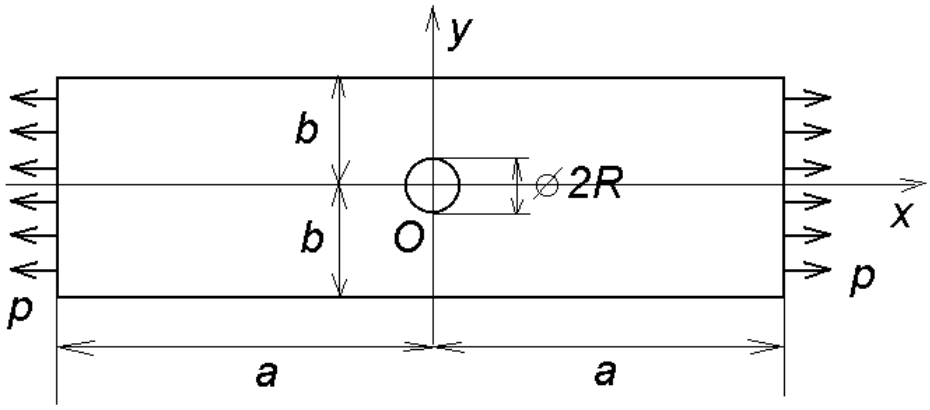


Рис. 1. Схема области

Как известно, отверстие вносит возмущение в однородное напряженное состояние одноосно растягиваемой пластины. В зоне, вблизи отверстия, происходит повышение напряжений, называемое концентрацией напряжений. Аналогичная задача для бесконечной пластины, одноосно растягиваемой на бесконечности равномерными нагрузками, называется задачей Кирша и является фундаментальной задачей теории упругости о концентрации напряжений. В задаче Кирша максимальные напряжения, равные $3p$, возникают в точке с координатами (0, R) (см. рис.1) и являются тангенциальными напряжениями.

Поскольку поля напряжений, деформаций и перемещений являются существенно неоднородными около отверстия, то для получения приемлемой точности конечно-элементных расчетов при построении конечно-элементных сеток следует задавать параметры, обеспечивающие сгущение разбиений вблизи отверстия.

Краткие теоретические сведения

При плоском напряженном состоянии перемещения пластины в области Ω, принадлежащей плоскости xy, можно характеризовать вектором перемещений $\mathbf{U}=\{U_x, U_y\}=\{U, V\}$, где $U=U(x, y)$, $V=V(x, y)$. Компоненты тензора деформаций выражаются через поле перемещений по формулам

$$S_{xx} = \varepsilon_{xx} = \partial U / \partial x; \qquad S_{yy} = \varepsilon_{yy} = \partial V / \partial y; \tag{1}$$
$$S_{xy} = \varepsilon_{xy} = (\partial U / \partial y + \partial V / \partial x)/2$$

Определяющие соотношения, связывающие механические напряжения и деформации в упругой изотропной среде при плоском напряженном состоянии, имеют вид

$$T_{xx} = \sigma_{xx} = \lambda^*(S_{xx} + S_{yy}) + 2\mu S_{xx}$$
$$T_{yy} = \sigma_{yy} = \lambda^*(S_{xx} + S_{yy}) + 2\mu S_{yy} \tag{2}$$
$$T_{xy} = \sigma_{xy} = 2\mu S_{xy}$$

где

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

Коэффициенты λ и μ из (4) называются коэффициентами Ламе, коэффициент μ часто обозначается также через G и имеет смысл модуля сдвига. Модуль E из (4) называется модулем Юнга, а ν – коэффициентом Пуассона.

Уравнения равновесия упругой среды в плоской задаче имеют вид

$$\partial T_{xx} / \partial x + \partial T_{xy} / \partial y = 0 \tag{5}$$
$$\partial T_{xy} / \partial x + \partial T_{yy} / \partial y = 0 \tag{6}$$

Подстановка в (5), (6) определяющих соотношений (2) и формул (1) приводит к эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно неизвестных функций перемещений U и V. К этой системе следует добавить граничные условия на границе $\Gamma = \partial\Omega$ области. Основными видами граничных условий в теории упругости являются следующие условия. Пусть граница Г разбита на два подмножества: Γ_u и Γ_σ. На части границы Γ_u считаются известными компоненты вектора перемещений

$$U = U_*, \qquad V = V_*, \qquad \{x, y\} \in \Gamma_u \tag{7}$$

На участке Γ_σ задается вектор напряжений $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$

$$T_{xx}n_x + T_{xy}n_y = p_x \qquad T_{xy}n_x + T_{yy}n_y = p_y, \qquad \{x, y\} \in \Gamma_\sigma \tag{8}$$

где $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ – вектор внешней единичной нормали к границе Г.

Граничные условия (7) носят следующие наименования: граничные условия в перемещениях, граничные условия первого рода, условия типа Дирихле, главные граничные условия. Обычно в (4.7) $U_* = 0$, $V_* = 0$, что соответствует жесткому закреплению участка границы Γ_u.

Аналогично, граничные условия (8) имеют следующие наименования: граничные условия в напряжениях, граничные условия второго рода, условия типа Неймана, естественные граничные условия. При однородных граничных условиях (4.8), когда $p_x = 0$, $p_y = 0$, участок Γ_σ границы называется участком, свободным от напряжений. Вектор напряжений $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$, как векторная функция от *x*, *y*, может включать сосредоточенные векторы $\mathbf{F} = \{F_x, F_y\}$, которые имеют смысл сосредоточенных сил.

Решение задачи в плоской постановке

Поскольку упругая пластинка является тонкой, и все воздействия производятся по ее тонким торцевым граням, то можно рассматривать задачу о растяжении пластики в условиях плоского напряженного состояния.

Кроме того, поскольку задача обладает свойствами симметрии относительно центральных осей пластинки x и y (см. Рис.1), то можно решать задачу для четверти области с заданием условий симметрии на соответствующих гранях.

Следующий фрагмент файла St2LS_1.inp демонстрирует технику решения задачи о растяжении упругой пластинки в условиях плоского напряженного состояния в APDL ANSYS:

```
/TITLE, Plane Stress tension strip with a hole
/PREP7
! В силу симметрии задачи рассматривается четверть пластинки
A=5     ! Длина четверти пластинки
B=2     ! Ширины четверти пластинки
R=0.25          ! Радиус отверстия
H=0.1  ! Толщина пластинки
P=1e3  ! Величина растягивающей нагрузки  (кГ/см^2)
MP,EX,1,2e6  ! Модуль Юга EX=2*10+6  (кГ/см^2)
MP,NUXY,1,0.3        ! Коэффициент Пуассона NUXY=0.3

ET,1,PLANE82 ! Восьмиузловой КЭ PLANE82 (плоское напряж. состояние)

! ******************************************************
! Если выбрать элемент пластины SHELL63,
! то нужно «раскомментировать» следующие команды,
! и убрать команду MSHAPE (см. ниже)
!ET,1,SHELL63
!R,1,H
!P=P*H     ! Для элемента SHELL63 задается давление на единицу длины (кГ/см)
! ******************************************************

K,1,0,0          ! Определение граничных точек четверти пластинки
K,2,A,0
K,3,A,B
K,4,0,B
A,1,2,3,4        ! Определение площади 1 по точкам
```

```
APLOT,1       ! Показ площади 1

PCIRC,R       ! Определение круга радиуса R с центром в центре рабочей плоскости

ASBA,1,2      ! Вычитание из площади 1 площади 2 (круга)
APLOT,ALL ! Показ четверти пластины с отверстием

! Задание параметров для построения сетки конечных элементов
KESIZE,ALL,B/5
KESIZE,5,R/8
KESIZE,6,R/8

AMESH,ALL          ! Построение сетки КЭ для площади 3
FINISH

/SOLU
ANTYPE,STAT       ! Решение статической задачи
NSEL,S,LOC,X,A    ! Выбор всех узлов с координатой X=A
SF,ALL,PRES,-P    ! Для всех выбранных узлов поверхностная нагрузка PRES=-P
NSEL,ALL          ! Вернуться к выбору всех узлов модели
DL,9,,SYMM        ! Условие симметрии на линии 9 (линии с Y=0)
DL,10,,SYMM              ! Условие симметрии на линии 10 (линии с X=0)

! ******************************************************
! Для КЭ со степенями свободы UX, UY условия симметрии на линиях 9 и 10
! эквиваленты следующим командам
!NSEL,S,LOC,X,0
!D,ALL,UX,0
!NSEL,S,LOC,Y,0
!D,ALL,UY,0
!NSEL,ALL
! ******************************************************

SOLVE                    ! Решить систему МКЭ
FINISH
```

На рис. 2 показаны построенная область A3 с нанесенными номерами областей и опорных точек. (Пункты меню Plot->Areas, для нумерации областей и точек PlotCtrls->Numbering->отметить Area numbers, Keypoint numbers)

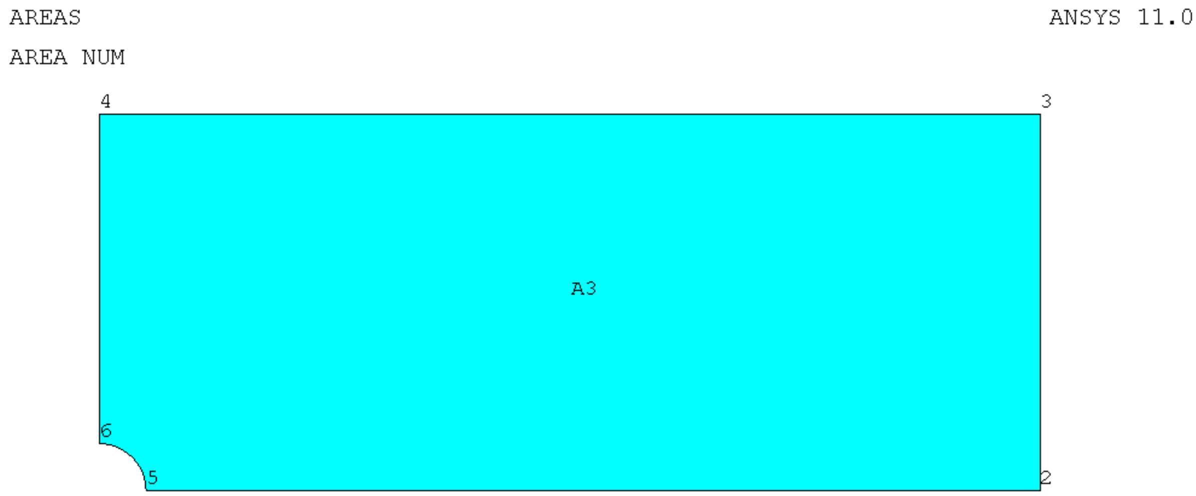
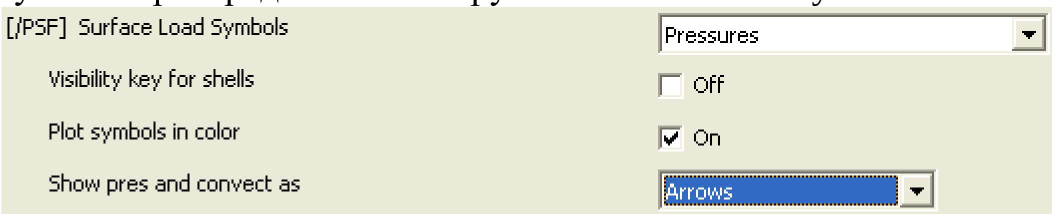


Рис. 2. Область с номерами опорных точек

Получающаяся конечно-элементная модель вместе с принятыми граничными условиями показана на рис. 3. (Пункты меню Plot->Elements, для отображения граничных условий PltCtrls->Symbols->отметить All applied BC, выбрать изображение условий распределенной нагрузки: Surface Load Symbols->Pressures)



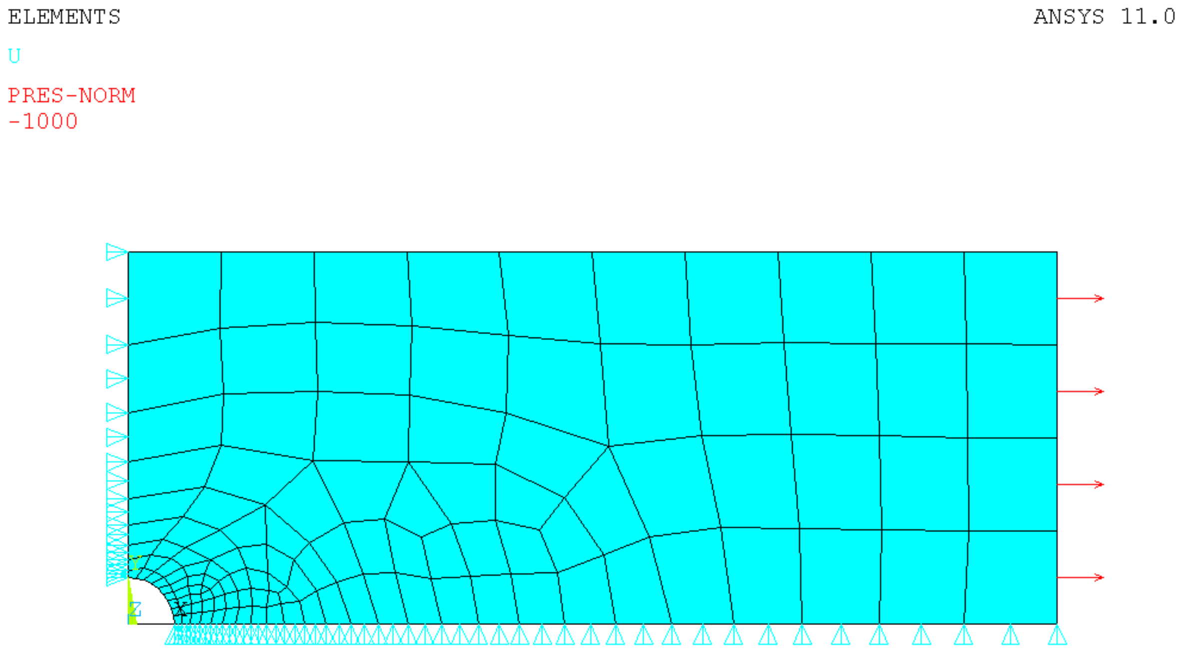


Рис. 3. Конечно-элементная сетка с граничными условиями

В качестве результатов расчетов можно привести картины распределения осевых перемещений U_x (рис. 4), осевых напряжений T_{yy} (рис. 5) и окружных (тангенциальных) напряжений $T_{\theta\theta}$. (Пункты меню General Postproc →

Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → DOF Solution → X-Component of displacement (для изображения картины распределения перемещений U_x); → Nodal Solu → Stess → Y-Component of stress (для изображения картины распределения напряжений T_{yy}); General Postproc → Options for Outp → Results coordinate system → Global Cylindrical; Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Stess →Y-Component of stress (для изображения картины распределения напряжений $T_{\theta\theta}$, y соответствует θ в глобальной цилиндрической системе координат)

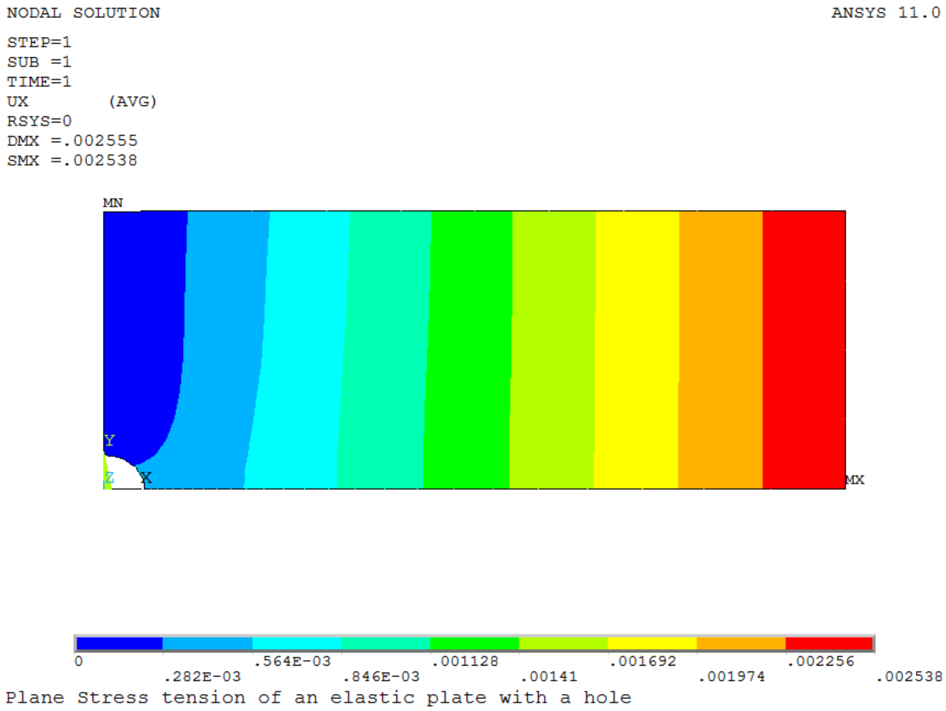


Рис. 4. Распределение перемещений u_x

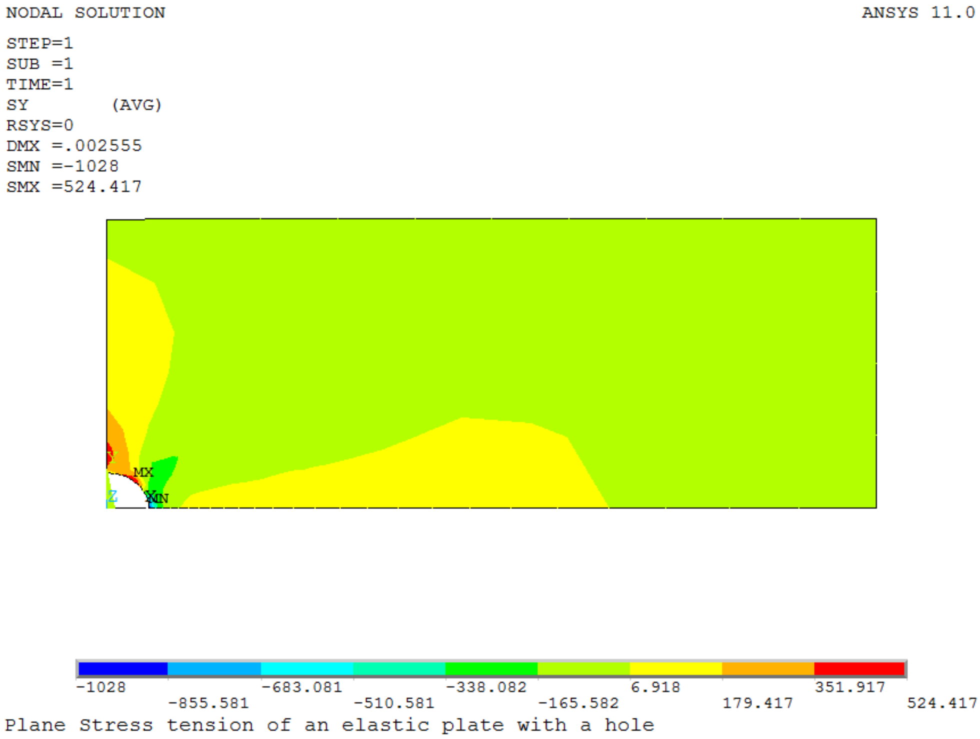


Рис. 5. Распределение осевых напряжений T_{yy}

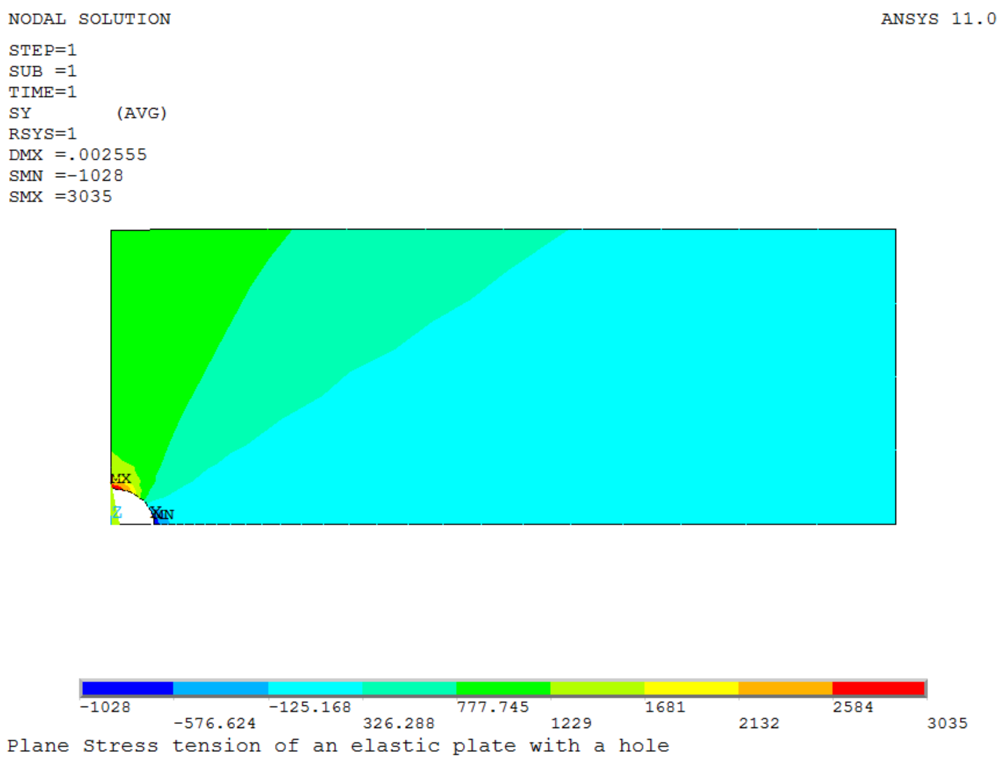


Рис. 6. Распределение тангенциальных напряжений $T_{\theta\theta}$

Как видно из рис. 5 и 6, отверстие является концентратором напряжений.

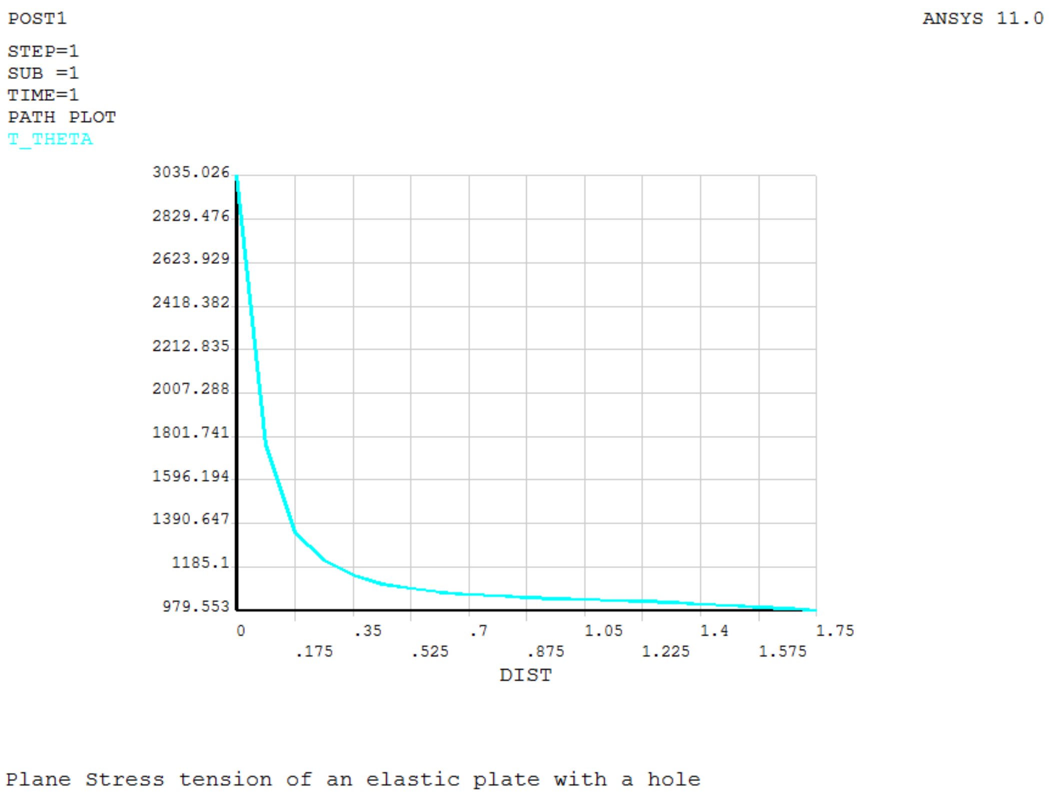


Рис. 7. График тангенциальных напряжений вдоль пути

Максимум напряжений получается в точки с координатами (0,R) $\sigma_{\theta\theta}=3035$ (кГ/см^2). Таким образом, поскольку растягивающая нагрузка была равна p=1·10^3 (кГ/см^2), то напряжения в окрестности концентратора возрастают приблизительно в 3 раза.

Рис. 4 – 7 дают следующие команды постпроцессора из файла St2LS_1.inp:

```
/POST1
/PLOPTS,LOGO,OFF   ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде
/PLOPTS,FRAME,OFF  ! Не показывать рамку
/PLOPTS,DATE,OFF   ! Не показывать дату

PLNSOL,U,X!  Вывод перемещений по оси X
*GET,UXMAX,PLNSOL,0,MAX ! запись максимума перемещений по оси X в параметр UXMAX
! Задержка для просмотра картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"

PLNSOL,S,Y !  Вывод осевых напряжений Tyy
*GET,TYYMAX,PLNSOL,0,MAX ! – запись максимума напряжений Tyy в параметр TYYMAX
! Задержка для просмотра картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"

RSYS,1         ! Переход в цилиндрическую систему координат для представления результатов
PLNSOL,S,Y ! Вывод тангенциальных напряжений (в цилиндрической системе координат)

! ********************************************************
! Далее выводится график тангенциальных напряжений T_Theta вдоль пути X=0
! от точки (0,R) до точки (0,B)
! Задержка для просмотра предыдущей картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"
PATH,XX,2
PPATH,1,,0,R
PPATH,2,,0,B
PDEF,T_Theta,S,Y
PLPATH,T_Theta

RSYS,0         ! Возврат в декартовую систему координат для представления результатов
```

Имеет смысл обратить внимание на новые команды: команду задержки ***ASK**, которая позволяет посмотреть одну из картинок перед выводом следующей; команду ***GET**, которая здесь помещает в параметр **UXMAX** значение максимального перемещения по оси X; команду **RSYS,1**, которая дает возможность выводить результаты в цилиндрической системе координат, и, таким образом, получать значения $\sigma_{\theta\theta}$; и команды **PATH, PPATH, PDEF, PLPATH**. Последние команды позволяют получить график поведения какой-либо величины вдоль определенного геометрического пути.

Решение задачи в пространственной постановке

В предыдущем подразделе задача о растяжении тонкой пластинки решалась как плоская с использованием гипотез о плоском напряженном состоянии. В МКЭ можно с успехом решать трехмерные задачи, а поэтому здесь интересно решить трехмерную задачу для данной пластики и сравнить полученные результаты.

Для расчета растяжения пластинки с отверстием в трехмерной постановке предназначен файл St3LS_1.inp. Он достаточно похож на St2LS_1.inp и его основные команды препроцессора и решателя выглядят следующим образом:

```
!  St3LS_1.INP  - программа для ANSYS
!        Предметная область - теория упругости (St)
!        Трехмерная задача (3)
!        Линейный анализ (L)
!        Задача статики(S)
!
!        Задача Кирша о растяжении упругой пластинки
!        с круговым отверстием
!
!        Концентрация напряжений на границе отверстия
!
!        Вывод результатов в цилиндрической системе координат
!
/TITLE, Stress tension strip with a hole (3D problem)
/PREP7

! В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 часть  пластинки

A=5    ! Длина 1/8 пластинки
B=2    ! Ширина 1/8 пластинки
R=0.25          ! Радиус отверстия
H=0.1  ! Толщина пластинки
P=1e3  ! Величина растягивающей нагрузки  (кГ/см^2)
MP,EX,1,2e6  ! Модуль Юга EX=2*10**6 (кГ/см^2)
MP,NUXY,1,0.3        ! Коэффициент Пуассона NUXY=0.3

K,1,0,0          ! Определение граничных точек 1/8 части пластинки
K,2,A,0
K,3,A,B
K,4,0,B
K,5,0,0,H/2
K,6,A,0,H/2
K,7,A,B,H/2
K,8,0,B,H/2

V,1,2,3,4,5,6,7,8

CYLIND,R,,H/2

VSBV,1,2       ! Вычитание из объема 1 объема 2 (цилиндра)
VPLOT,ALL ! Показ одной восьмой части пластины с отверстием
```

```
! Задание параметров для построения сетки конечных элементов
KESIZE,ALL,B/5
KESIZE,10,R/8
KESIZE,13,R/8
KESIZE,12,R/8
KESIZE,14,R/8

!ET,1,SOLID92        ! 10-узловой тетраэдральный КЭ теории упругости
!Если использовать разбиение на тетраэдры, то вспомогательная плоская сетка не нужна

et,1,SOLID45 ! Задать КЭ типа 1: основной элемент
! 3-D 8-узловой элемент для структурного анализа, степени свободы: ux,uy,uz (перемеще-
ния)

ET,2,MESH200,6 ! Задать КЭ типа 2: вспомогательный КЭ - только для геометрии сетки

TYPE,2 ! Выбрать тип КЭ для разбиения плоской области (вспомогательный КЭ)
!Выбрать исходную двумерную область
ASEL,S,LOC,Z,0
!Разбить эту область вспомогательным элементом
AMESH,ALL
TYPE,1 ! Выбрать тип КЭ для разбиения объемов (основной КЭ)
! Протянуть разбиение плоской области вдоль объема
VSWEEP,ALL


VMESH,ALL          ! Построение сетки КЭ для объема
FINISH

/SOLU
ANTYPE,STAT         ! Решение статической задачи.
NSEL,S,LOC,X,A              ! Выбор всех узлов с координатой X=A
SF,ALL,PRES,-P      ! Для всех выбранных узлов поверхностная нагрузка PRES = -P
NSEL,S,LOC,X,0      ! Условия симметрии на гранях 1/8 пластины
D,ALL,UX,0
NSEL,S,LOC,Y,0
D,ALL,UY,0
NSEL,S,LOC,Z,0
D,ALL,UZ,0
NSEL,ALL    ! Вернуться к выбору всех узлов модели

SOLVE                         ! Решить систему МКЭ
FINISH

/POST1
/PLOPTS,LOGO,OFF   ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде
/PLOPTS,FRAME,OFF  ! Не показывать рамку
/PLOPTS,DATE,OFF   ! Не показывать дату

PLNSOL,U,X!  Вывод перемещений по оси X
*GET,UXMAX,PLNSOL,0,MAX ! UXMAX - максимальные перемещения по оси X
```

```
! Задержка для просмотра картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"

RSYS,1          ! Переход в цилиндрическую систему координат для представления резуль-
татов
PLNSOL,S,Y ! Вывод тангенциальных напряжений (в цилиндрической системе коорди-
нат)

! *******************************************************
! Далее выводится график тангенциальных напряжений T_Theta вдоль пути X=0
! от точки (0,R) до точки (0,B)
! Задержка для просмотра предыдущей картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"
PATH,XX,2
PPATH,1,,0,R
PPATH,2,,0,B
PDEF,T_Theta,S,Y
PLPATH,T_Theta

RSYS,0          ! Возврат в декартовую систему координат для представления результатов
```

Как видно, здесь рассматривается 1/8 часть пластинки с соответствующими условиями симметрии.

Если для препроцессора и решателя имеются некоторые отличия по сравнению с файлом St2LS_1.inp, связанные с трехмерностью пластинки, то команды постпроцессора могут быть взяты теми же самыми, что и для плоской задачи.

В результате расчетов получим аналогичные характеристики решения. Например, график поведения осевых напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль оси X=0 приведен на рис. 8.

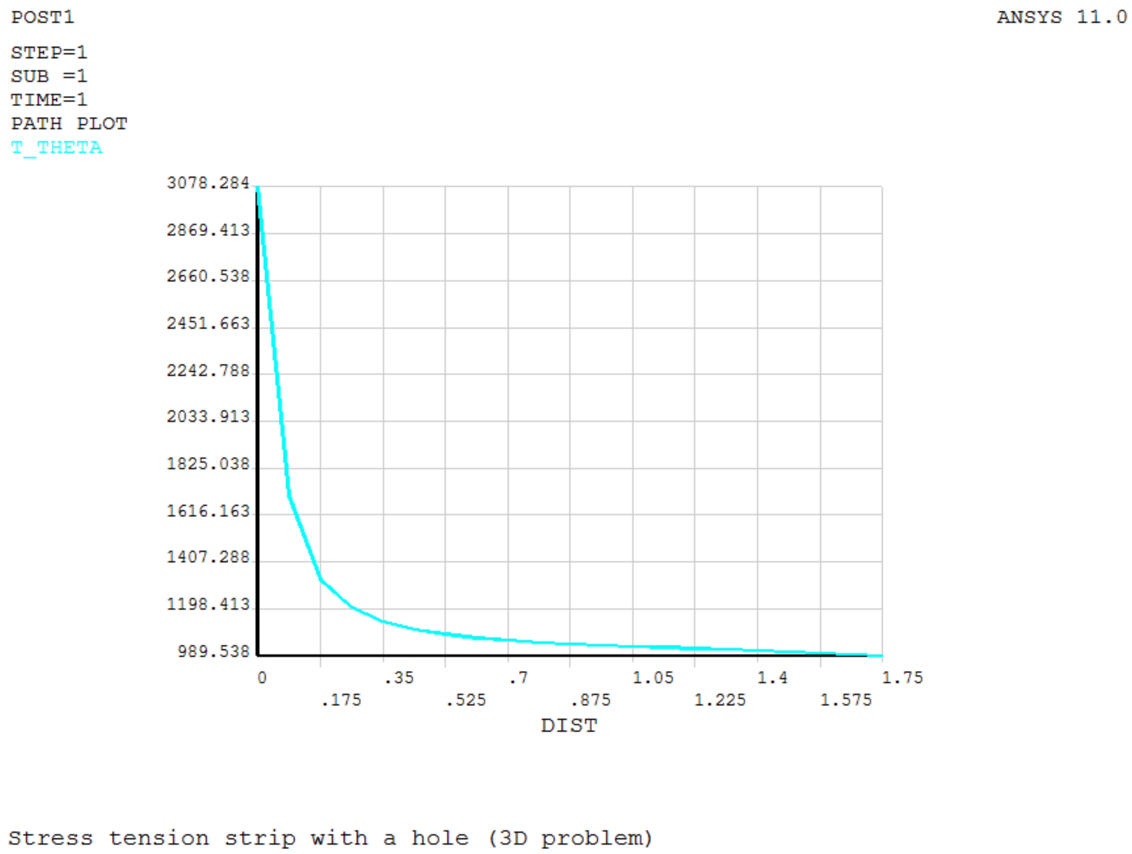


Рис. 8. График тангенциальных напряжений в трехмерной задаче

Как можно видеть из рис. 8, осевые напряжения в точке концентрации в трехмерной задаче есть $\sigma_{\theta\theta} = 3078$ (кГ/см^2), тогда как для плоской задачи ранее было получено $\sigma_{\theta\theta} = 3035$ (кГ/см^2). Эти значения достаточно близки, что свидетельствует о применимости модели плоского напряженного состояния для рассматриваемой геометрии пластинки и условий ее нагружения.

Индивидуальные задания – тела в форме букв.

Пользуясь программами St2LS_1.inp и St3LS_1.inp напишите собственные программы для расчета растяжения тонкой пластинки в форме буквы из лабораторной работы 1. При построении области используйте, где это возможно, свойства симметрии задачи. На месте, где были заданы условия конвективного теплообмена, задайте растягивающую нагрузку, а нижнюю границу пластики жестко закрепите. Материальные параметры возьмите теми же, что и для рассмотренных выше примеров. Проведите расчеты в условиях плоского напряженного состояния (для плоского и оболочечного КЭ) и в трехмерной постановке и сравните результаты. Определите максимальные напряжения и постройте графики поведения напряжений вдоль пути, проходящего через точку их максимума.

<u>Требования к отчету.</u>

Отчет должен содержать ФИО студентов полное описание задачи, а также результаты, полученные с помощью конечно-элементного комплекса ANSYS (с текстом входного файла).

В качестве результатов расчетов приведите:

- конечно-элементную сетку с граничными условиями
- картину деформированной формы
- картины распределения перемещений
- картину распределения вектора перемещений
- картины распределения напряжений
- картины распределения деформаций