Интегрирование рациональных функций

Для интегрирования рациональной функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - полиномы, используется следующая последовательность шагов:

1. Если дробь неправильная (т.е. степень $P(x) \geq$ степени $Q(x)$), следует преобразовать дробь в правильную, выделив целое выражение (деление в столбик с остатком);

2. Разложить знаменатель $Q(x)$ на произведение линейных и/или неприводимых квадратичных выражений (с отрицательным дискриминантом);

3. Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя *метод неопределенных коэффициентов*;

4. Вычислить интегралы от простейших дробей.

Рассмотрим указанные шаги более подробно.

Шаг 1. Преобразование неправильной рациональной дроби.

Если дробь неправильная (т.е. степень числителя $P(x) \geq$ степени знаменателя $Q(x)$), разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$. Получим следующее выражение:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Шаг 2. Разложение знаменателя на неприводимые множители.

Запишем многочлен знаменателя $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} \left(x^2+px+q\right)^{\mu} \cdots \left(x^2+rx+s\right)^{\nu},$$

где квадратичные функции являются неприводимыми, то есть не имеющими действительных корней.

Шаг 3. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Запишем рациональную функцию в следующем виде:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \ldots + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$

$$+ \frac{Kx+L}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}} + \frac{K_1x+L_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{Mx+N}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu}} + \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+rx+s\right)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}.$$

Общее число неопределенных коэффициентов A_i, B_i, K_i, L_i, M_i, N_i, ... должно быть равно степени знаменателя $Q(x)$.

Затем умножим обе части полученного уравнения на знаменатель $Q(x)$ (или приведем правую часть к общему знаменателю) и приравняем коэффициенты при слагаемых с одинаковыми степенями x. В результате мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_i, B_i, K_i, L_i, M_i, N_i, ... Данная система всегда имеет единственное решение. Описанный алгоритм представляет собой *метод неопределенных коэффициентов*.

Шаг 4. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Простейшие дроби, полученные при разложении произвольной правильной рациональной дроби, интегрируются с помощью следующих шести формул:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = \ln|x-a|$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}$

У дробей с квадратичным знаменателем сначала необходимо выделить полный квадрат:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{Ax+B'}{\left(t^2+m^2\right)^k},$$

где $t = x + \frac{p}{2}$, $m^2 = \frac{4q-p^2}{4}$, $B' = B - \frac{Ap}{2}$. Затем применяются следующие формулы (которые легко вывести самостоятельно):

3. $$\int \frac{tdt}{t^2+m^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+m^2\right)$$

4. $$\int \frac{tdt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$$

5. $$\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}$$

Интеграл $\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$ может быть вычислен за k шагов с помощью **формулы редукции**:

6. $$\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}.$$

Формула редукции приведена здесь для полноты изложения. Учить ее не нужно.

Вывод формулы редукции (приведен ниже) разобрать полезно, но не обязательно.

Примеров на применение формулы редукции ни в контрольной работе, ни на коллоквиуме, ни на экзамене не будет.

Вывод формулы редукции:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt =$$

$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

Второй интеграл проинтегрируем по частям:

$$\left[\begin{array}{l|l} u = t & du = dt \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+m^2)^k} & v = \displaystyle\int \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} \end{array}\right] \; => $$

$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\left(-\frac{t}{2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right)\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}$$

Пример 1 Вычислить интеграл $\int \frac{2x+3}{x^2-9}dx$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

Сгруппируем слагаемые и приравняем коэффициенты при членах с одинаковыми степенями:

$$A(x+3) + B(x-3) = 2x+3,$$

$$Ax + 3A + Bx - 3B = 2x+3,$$

$$(A+B)x + 3A - 3B = 2x+3.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-3B=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{\frac{3}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Теперь легко вычислить исходный интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2-9}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C = \frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^3(x+3)\right| + C.$$

Пример 2 Вычислить интеграл $\int \frac{x^2-2}{x+1}dx$.

Решение. Сначала выделим правильную рациональную дробь, разделив числитель на знаменатель.

$$\frac{x^2-2}{x+1} = x - 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Получаем

$$\int \frac{x^2-2}{x+1}dx = \int \left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int \left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \int x dx - \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x - \ln|x+1| + C.$$

Пример 3 Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Пример 4 Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Приравниваем числители:

$$A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) = x^2,$$

$$Ax^2 - 2Ax - 3Ax + 6A + Bx^2 - Bx - 3Bx + 3B + Cx^2 - Cx - 2Cx + 2C = x^2,$$

$$(A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + 6A + 3B + 2C = x^2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-4 \\ C=\frac{9}{2} \end{cases}.$$

Получаем

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-3}.$$

Интеграл, соответственно, равен

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-4\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-4\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-3|+C.$$

Пример 5 Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму двух дробей.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Найдем неизвестные коэффициенты.

$$A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)=1,$$

$$Ax^2+A+Bx^2+Cx+Bx+C=1,$$

$$(A+B)x^2+(B+C)x+A+C=1.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Исходный интеграл равен

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Пример 6 Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Разложим знаменатель в подынтегральном выражении на множители:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Далее представим подынтегральное выражение в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Определим коэффициенты:

$$A\left(x^2-x+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+1\right)=1,$$

$$Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C=1,$$

$$\left(A+B\right)x^2+\left(-A+B+C\right)x+A+C=1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B+C=0\\A+C=1\end{cases},\quad\begin{cases}A=1/3\\B=-1/3\\C=2/3\end{cases}.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1/3}{x+1}+\frac{-1/3\,x+2/3}{x^2-x+1}=\frac{1}{3\left(x+1\right)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Теперь вычислим исходный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Пример 7 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Перепишем знаменатель рациональной дроби в следующем виде:

$$x^4+1=x^4+2x^2-2x^2+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right).$$

Поскольку полученные множители являются несократимыми квадратичными функциями, то подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Определим неизвестные коэффициенты.

$$\left(Ax+B\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)=1,$$

$$Ax^3+Bx^2+\sqrt{2}Ax^2+\sqrt{2}Bx+Ax+B+Cx^3+Dx^2-\sqrt{2}Cx^2-\sqrt{2}Dx+Cx+D=1,$$

$$\left(A+C\right)x^3+\left(B+\sqrt{2}A+D-\sqrt{2}C\right)x^2+\left(\sqrt{2}B+A-\sqrt{2}D+C\right)x+B+D=1.$$

Получаем

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+\sqrt{2}A+D-\sqrt{2}C=0 \\ \sqrt{2}B+A-\sqrt{2}D+C=0 \\ B+D=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D=\frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Интегрируем каждое слагаемое и находим ответ.

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+C=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x+1\right)\right)+C.$$

Пример 8 Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right).$$

Запишем подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями чтобы определить неизвестные коэффициенты из системы линейных уравнений.

$$A\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)+B\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2-1\right)=1,$$

$$Ax^3+Ax+Ax^2+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D=1 \quad \text{или}$$

$$\left(A+B+C\right)x^3+\left(A-B+D\right)x^2+\left(A+B-C\right)x+A-B-D=1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=0 \\ D=-1/2 \end{cases}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1/4}{x-1}-\frac{1/4}{x+1}-\frac{1/2}{x^2+1}.$$

Окончательно находим

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Пример 9 Вычислить интеграл $\int\frac{5x}{\left(x-1\right)^3}dx$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, учитывая что знаменатель имеет кратный корень 3-го порядка:

$$\frac{5x}{\left(x-1\right)^3}=\frac{A}{\left(x-1\right)^3}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Определим неизвестные коэффициенты.

$$A+B\left(x-1\right)+C\left(x-1\right)^2=5x,$$

$$A+Bx-B+Cx^2-2Cx+C=5x,$$

$$Cx^2+\left(B-2C\right)x+A-B+C=5x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C=0 \\ B-2C=5 \\ A-B+C=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=5 \\ B=5 \\ C=0 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{5x}{\left(x-1\right)^3}=\frac{5}{\left(x-1\right)^3}+\frac{5}{\left(x-1\right)^2}.$$

Исходный интеграл равен

$$\int\frac{5x}{\left(x-1\right)^3}dx=\int\left(\frac{5}{\left(x-1\right)^3}+\frac{5}{\left(x-1\right)^2}\right)dx=5\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^3}+5\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2}=5\cdot\frac{\left(x-1\right)^{-2}}{-2}-\frac{5}{x-1}+C=-\frac{5}{2\left(x-1\right)^2}-\frac{5}{x-1}+C.$$

Пример 10 Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Решение. Поскольку x^2+x+1 - несократимый квадратный трехчлен, выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\int \frac{dx}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^2}=\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}.$$

Найдем полученный интеграл с помощью формулы редукции:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}.$$

Получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}+\frac{4-3}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot 1}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}+C=$$

$$=\frac{2}{3\left(x^2+x+1\right)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$