

**Программа экзамена по курсу «Непрерывная математика»
ФИиИТ, 1 семестр, 2017 – 2018 уч. год**

- 1) Вещественные числа, промежутки. Модуль числа и его свойства. Функции sign , «пол» и «потолок».
- 2) Аксиома полноты. Ограниченные множества, верхняя и нижняя грани. Свойства ограниченных множеств.
- 3) Максимальный (минимальный) элемент, его единственность.
- 4) Точная верхняя (нижняя) грань (3 альтернативных определения). Лемма о существовании и единственности точной верхней грани.

Последовательности.

- 5) Определение последовательности. Определение сходящейся последовательности, теорема о единственности предела.
- 6) Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
- 7) Теорема об умножении сходящейся последовательности на вещественное число.
- 8) Теорема о сумме, разности и произведении сходящихся последовательностей.
- 9) Теорема о свойствах последовательностей, связанных с неравенствами. Следствия. Замечание о невозможности замены нестрогих неравенств строгими ($a_n = (-1)^n/n$).

- 10) Теорема о трех последовательностях.
- 11) Пример применения теоремы о трех последовательностях: доказать сходимость последовательности $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 12) Сходимость последовательности $\{1/a_n\}$. Следствие о частном сходящихся последовательностей. Пример применения теоремы: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

- 13) Лемма о вложенных отрезках.
- 14) Бесконечно малые последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей.
- 15) Бесконечно большие последовательности. Соотношения между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

Монотонные последовательности.

- 16) Основные определения (возрастающая последовательность, строго возрастающая последовательность и т.д.).
- 17) Критерий сходимости возрастающей последовательности. Следствия.
- 18) Шесть примеров вычисления предела последовательностей.

- 19) Число e . Существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Подпоследовательности.

- 20) Определение подпоследовательности. Свойство номера элемента подпоследовательности ($k_n \geq n$). Теорема о подпоследовательности сходящейся последовательности. Частичный предел.
- 21) Лемма Больцано-Вейерштрасса. Понятия верхнего и нижнего пределов.
- 22) Фундаментальная последовательность, критерий Коши сходимости последовательности.
- 23) Расходимость гармонической последовательности.

Предел функции

- 24) Окрестность и ε -окрестность точки. Выколота окрестность и выколота ε -окрестность точки. Свойства (выколотых) окрестностей.
- 25) Определение предела функции. Теорема о единственности предела.
- 26) Односторонняя выколота ε -окрестность точки. Предел слева и предел справа.
- 27) Теорема о связи существования односторонних пределов функции в точке и предела функции в точке.
- 28) Определение предела функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$.
- 29) Свойства пределов:

- a) локальная ограниченность функции в окрестности точки, в которой функция имеет предел;
 - b) сохранение знака функции в окрестности точки, в которой функция имеет предел, не равный нулю;
 - c) отделение от нуля значений функции в окрестности точки, в которой функция имеет предел, не равный нулю;
 - d) ограниченность функции $1/f(x)$ в окрестности точки, в которой функция $f(x)$ имеет предел, не равный нулю.
- 30) Арифметические операции с пределами:
- a) предел суммы двух функций;
 - b) предел произведения двух функций;
 - c) предел произведения функции и числа;
 - d) предел разности двух функций;
 - e) предел функции $1/f(x)$;
 - f) предел частного двух функций.
- 31) Свойства пределов, связанные с неравенствами.
- 32) Аналог теоремы о трех последовательностях.
- 33) Монотонные функции. Теорема о существовании односторонних пределов монотонной функции на промежутке.
- 34) Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
- 35) Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций.
- 36) Бесконечно большие функции. Соотношения между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
- 37) Критерий Коши существования предела функции.
- 38) Пример: пользуясь критерием Коши доказать, что не существует $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
- 39) Эквивалентные функции. Теорема о возможности замены (под знаком предела) функции на эквивалентную ей функцию.
- 40) Функции одного порядка.
- 41) Функции бесконечно малые более высокого порядка.

Непрерывные функции.

- 42) Определение непрерывной функции. Односторонняя непрерывность. Непрерывность на промежутке.
- 43) Классификация точек разрыва. Примеры функций, имеющих в точке
- a) устранимый разрыв,
 - b) разрыв первого рода,
 - c) разрыв второго рода.
- 44) Локальные свойства функции, непрерывной в точке.
- 45) Арифметические операции с непрерывными функциями.
- 46) Теорема Вейерштрасса. Следствие.
- 47) Теорема 1 о промежуточном значении.
- 48) Теорема 2 о промежуточном значении. Следствия.
- 49) Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
- 50) Непрерывность сложной функции.

«ПРОИЗВОДНЫЕ»

- 51) Определение производной. Примеры вычисления производных некоторых функций:
- a) $f(x) = C, C \in R$;
 - b) $f(x) = x^n, n \in N$;
 - c) $f(x) = \sin x$;
 - d) $f(x) = \cos x$;
 - e) $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$;
 - f) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in R$.
- 52) Теорема о связи существования производной и непрерывности функции.

- 53) Односторонние производные. Теорема о связи производной и односторонних производных.
- 54) Дифференцируемость. Критерий дифференцируемости. Следствие. Дифференцируемость на промежутке.
- 55) Правила дифференцирования.
- 56) Дифференциал: определение, правила вычисления дифференциала.
- 57) Теорема о существовании обратной функции (без доказательства). Теорема о производной обратной функции (без доказательства).
- 58) Производная сложной функции (без доказательства).
- 59) Теорема Ферма.
- 60) Локальный минимум, строгий локальный минимум. Локальный максимум, строгий локальный максимум. Локальный экстремум, строгий локальный экстремум. Альтернативная формулировка теоремы Ферма.
- 61) Теорема Ролля.
- 62) Теорема Лагранжа. Следствие.
- 63) Теорема Коши.
- 64) Правило Лопиталя.
- 65) Формула Тейлора для многочленов.
- 66) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- 67) Остаточный член в форме Лагранжа.
- 68) Теорема о единственности разложения функции в ряд Тейлора.
- 69) Частные случаи формулы Тейлора.