

Simultaneous Localization and Mapping (SLAM)

Фильтр Калмана

Задача одновременной локализации и картографирования

- Некоторый агент действует в неизвестной среде.
- Среда неизменна – нет движущихся объектов, параметры не меняются, для простоты – некоторая 2D область, например, комната.
- В случае, когда среда изменяется, применяются более сложные подходы – возникает задача сопоставления «образов» среды, полученных в разные моменты времени.
- Агент может перемещаться в пространстве.
- Время, как правило, дискретное – рассматриваем равные временные интервалы, достаточно малые для точного моделирования движения агента.

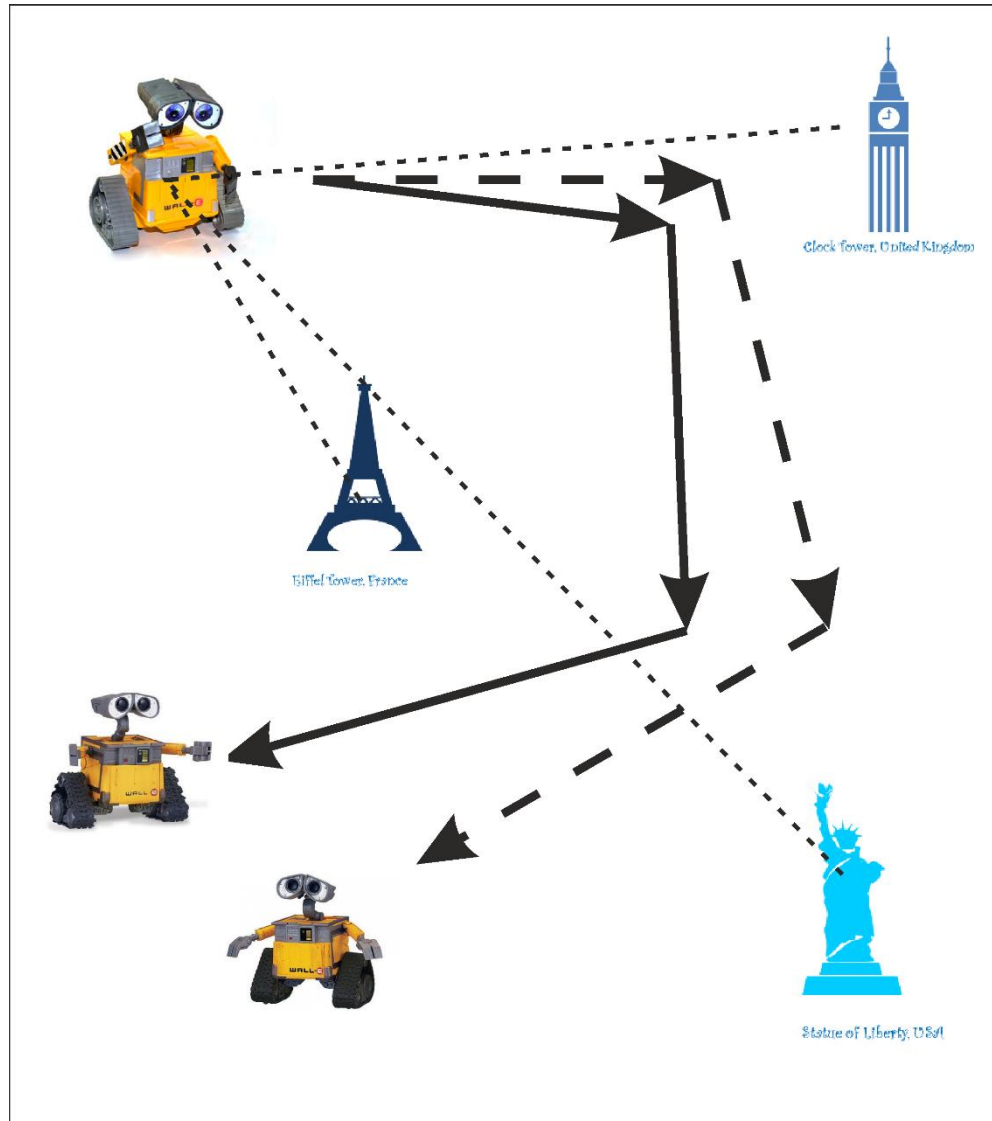
Агент «Птолемей»

- Агент оснащен сенсорами, позволяющими отслеживать своё положение (но это не точно). Простейший вариант – GPS-сенсор, дающий положение агента в указанные моменты времени.
- Агент оснащен сенсорами своего состояния, которые для параметров движения дают «одометрию» – данные о движении приводов для оценки положения. Например, используются энкодеры, спидометры, гироскопы и проч.
- Оба вида сенсоров (при их наличии) дают показания с погрешностью.
- Показания датчиков «снимаются» в дискретные интервалы времени, совпадающие с моментами анализа системы (возможны пропуски).
- Погрешности считаются гауссовым белым шумом – распределение по Гауссу, нулевое мат. ожидание.

Примеры задач

- Навигация по звёздам.
- Отслеживание координат летательных аппаратов – «Аполлон», Шаттлы, «Томагавки» и МКС.
- Картографирование местности поисковыми агентами.
- Беспилотные автомобили – зачастую имеют точную карту местности, а также GPS-данные, однако определение своего положения с погрешностью.
- Роботы-пылесосы.

Общая постановка



Фильтр Калмана

- Рудольф Эмиль Калман – венгерский инженер и математик. Один из создателей теории управления.
- Описан в 1958-1961.
- Были аналоги, одно из первых применений – для проекта «Аполлон».
- Несколько раньше подобный фильтр в общем виде был описан Русланом Леонтьевичем Стратоновичем.
- Фильтр для линейной системы (используются линейные операторы), похож на скрытые модели Маркова (однако для вещественных компонентов).

Описание системы

- Состояния системы – «истинное» и «наблюдаемое»

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k$$

$$w_k \sim N(0, Q_k)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

$$v_k \sim N(0, R_k)$$

$$\{x_0, w_{1..k}, v_{1..k}\}$$

Этап 1. Экстраполяция

- Состояние системы получаем как функцию от предыдущего.
- Второе уравнение – ковариационная матрица для экстраполированного вектора состояния.

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k$$

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k$$

Матрица ковариации

- Вместе с математическим ожиданием полностью определяет закон распределения многомерной случайной величины.
- Симметричная, неотрицательно определённая, на главной диагонали – дисперсии компонент, внедиагональные элементы – ковариации.
- Для вычисления требуется знать закон распределения, и параметры, но изначально можно считать параметры некоррелированными.

Пример

- Случайная величина – вектор трёхкомпонентный.
- Первые две компоненты – независимы и принимают значения от 1 до 10 с равной вероятностью.

$$[x, y, xy]$$

$$E(X) = (5.5, 5.5, ?)$$

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) \equiv M[(X_i - MX_i)(X_j - MX_j)]$$

$$\begin{pmatrix} 8.25 & \cdot & 45.375 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 567.1875 \end{pmatrix}$$

Этап 2. Коррекция

- Находим отклонение наблюдения от ожидаемого наблюдения.

$$\tilde{y}_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$$

- Вычисляем ковариационную матрицу для вектора отклонения (ошибки).

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$$

- Считаем матрицу коэффициентов усиления Калмана.

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1}$$

Этап 2. Коррекция (продолжение)

- Выполняем коррекцию полученной ранее оценки состояния системы.
- Вычисляем ковариационную матрицу для данного шага.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

Критика

- Белый шум в природе почти не встречается.
- Фильтр чувствителен к начальным приближениям.
- Большое количество элементов необходимо отслеживать.
- Для задач SLAM количество ориентиров ограничивают количеством порядка 1000.
- Возможно применять расширенный фильтр Калмана – Extended Kalman Filter