

Интегрирование иррациональных функций

Подстановки Эйлера

- 1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t$, если $a > 0$;
- 2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;
- 3) $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$.

Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m(a + bx^n)^p dx$

С л у ч а й 1. Пусть p – целое. Полагаем $x = t^N$,
где N – общий знаменатель дробей m и n .

С л у ч а й 2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ – целое. Полагаем $a + bx^n = t^N$,
где N – знаменатель дроби p .

С л у ч а й 3. Пусть $\frac{m+1}{n} + p$ – целое. Полагаем $\frac{a}{x^n} + b = t^N$,
где N – знаменатель дроби p .

Интегрирование тригонометрических функций

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

- 1) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $t = \cos x$;
- 2) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $t = \sin x$;
- 3) если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$;
- 4) иначе универсальная тригонометрическая подстановка (УТП)

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$