Аналитическое и численное дифференцирование

Аналитическое дифференцирование:

a) функция задана вектором класса Char

   f='sin(x)' ; df=diff(f, 'x');

b) функция задана вектором класса Sym(bolic)

   syms f x; % декларирование символьной арифметики

   f=sin(x) ; df=diff(f, x);

   dkf=diff(f, x, k);   %или

   dkf=diff(f, k);

   % иная синтаксическая форма

   g=sym('sin(x)') % конвертирование из строк в символы

   x=sym('x'); dg= diff(f, x)

Численное дифференцирование:

Следует непосредственно из определения производной

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Основная идея: аналитическое представление линии заменяется ее точечным аналогом. Чем больше точек, тем точнее образ линии (ближе к непрерывной линии). Величина h – характеризует близость соседних точек. Численный аналог производной функции **привязан** к уже выбранному h и определяется

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

А производную от функции можно построить следующим образом:
пусть задан набор равноотстоящих точек $\{X_i\}$, i=1,…, n и $X_{i+1} - X_i = h$ для любого i и функция y(x), тогда координаты точек $\{X_i, Y_i = y(X_i)\}$, i=1,…, n определяют точечный аналога линии, координаты точек $\{X_i, dY_i\}$, i=1,…, n-1 определяют точечный аналог производной функции и dY определяется приближенно в зависимости от величины h (количества точек $\{X_i\}$)

$$y' \approx \lim_{h\to 0}\frac{Y_{i+1}-Y_i}{X_{i+1}-X_i}$$

<u>Аналитическое и численное интегрирование</u>

<u>Аналитическое интегрирование:</u>

a) функция задана вектором класса Char
   (аналогично)
b) f - идентификатор функции f(x) заданой вектором класса Sym(bolic)
   intf=int(f, x); % неопределенный интеграл
   intf=int(f, x,a,b); intf=int(f, a,b); % неопределенный интеграл (две синтаксические формы)

<u>Численное интегрирование:</u>

Пусть $X_1=a$, $X_2,\dots,X_n=b$

<u>Метод трапеций (функция MatLab: Z = trapz(X,Y))</u>

$$I = h\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Погрешность:

$$R = \frac{M_2(b-a)h^2}{12}$$

<u>Метод средних прямоугольников</u>

$$I = hf(a+b)/2$$

Погрешность:

$$R = \frac{M_2(b-a)h^2}{24}$$

<u>Метод Симпсона (функция MatLab: Z = quad(function,a,b))</u>

$$I = \frac{h}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Погрешность:

$$R = \frac{M_4(b-a)h^4}{24}$$

Всюду $M_i(x)$ *равно:*

$$M_i(x) = \max_{a\le x\le b}\left\{\left|\frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i}\right|\right\}$$