Экзаменационная программа по курсу «Непрерывная математика»,
1 курс, 2 семестр 2017-2018 учебного года

Исследование функции с помощью производных.

1) Условия постоянства и монотонности функции.
   a) Критерий (дифференцирование константы). Следствие.
   b) Критерий возрастания (убывания) функции.
   c) Критерий строгого возрастания (строгого убывания) функции, следствие.

2) Экстремумы функций.
   a) Необходимое условие экстремума. Стационарные и критические точки.
   b) Достаточное условие экстремума в терминах первой производной.
   c) Достаточное условие экстремума в терминах второй производной.
   d) Достаточное условие экстремума в терминах n-ой производной.

3) Выпуклые функции.
   a) Два варианта определения, геометрическая интерпретация.
   b) Критерий выпуклости и строгой выпуклости функции в терминах второй производной.

4) Точки перегиба.
   a) Определение.
   b) Необходимое условие перегиба.
   c) Достаточное условие перегиба.

5) Асимптоты.
   a) Определение вертикальной, невертикальной, горизонтальной, наклонной асимптоты.
   b) Критерий существования невертикальной асимптоты.

Неопределенный интеграл

6) Определение первообразной. Достаточное условие существования первообразной на промежутке.

7) Теорема о множестве всех первообразных.

8) Понятие неопределенного интеграла. Три свойства неопределенных интегралов.

Определенный интеграл

9) Определение интеграла Римана.

10) Пример вычисления определенного интеграла $\int_a^b dx$ исходя из его определения.

11) Необходимое условие интегрируемости функции.

12) Пример того, что условие ограниченности не является достаточным для интегрируемости функции.

13) Определение верхней и нижней суммы Дарбу. Четыре свойства сумм Дарбу.

14) Критерий интегрируемости функции.

15) Колебание функции, свойства колебаний. Альтернативная формулировка критерия интегрируемости функции.

16) Четыре свойства интегрируемых функций.

17) Достаточные условия интегрируемости функций:

   Теорема 1. Об интегрируемости монотонной функции.

   Теорема 2. Об интегрируемости функции, непрерывной на отрезке.

   Следствие к теореме 2. Об интегрируемости функции, непрерывной на интервале, и имеющей односторонние пределы на его концах.

18) Свойства определенного интеграла как функции промежутка интегрирования.

   Теорема 1. О представлении интеграла по [a,c] в виде суммы интегралов по [a,b] и [b,c] в случае $a<b<c$;

   Следствие. О представлении интеграла по [a,c] в виде суммы интегралов по [a,b] и [b,c] в случае $\forall a,b,c \in R$.

   Теорема 2. Об интегрируемости кусочно-непрерывной функции.

19) Теорема об оценке интеграла от неотрицательной функции. Следствие.

20) Теорема о среднем для определенного интеграла. Следствие.

21) Теорема о дифференцировании функции $F(x)=\int_c^x f(t)dt$. Два следствия.

22) Теорема о замене переменной в определенном интеграле.

23) Теорема об интегрировании по частям.

Функции нескольких переменных

24) Функции нескольких переменных, область определения.

25) Предел функции двух переменных: δ-окрестность, определение предела, свойства предела, независимость предела от пути, примеры $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^4}$

26) Непрерывность, точки разрыва.

27) Функции двух переменных: дифференцируемость в точке, связь между дифференцируемостью в точке и непрерывностью, теорема о необходимом условии дифференцируемости, следствие, теорема о достаточном условии дифференцируемости, пример (из существования первых частных производных в точке не следует непрерывность функции нескольких переменных в этой точке):

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ при } xy = 0, \\ 1 \text{ при } xy \neq 0. \end{cases}$$

28) Полный дифференциал функции двух переменных.

29) Функции двух переменных: дифференциал высшего порядка, формальная запись (аналог бинома Ньютона).

30) Теорема о производной сложной функции.

31) Производная по направлению, градиент.

Дифференциальные уравнения

33) Линейные дифференциальные уравнения:
    a) определение, пространство F_n, однородные и неоднородные уравнения;
    b) свойства решений;
    c) общее и частное решение дифференциального уравнения;
    d) задача Коши, теорема о единственности решения задачи Коши.

34) Однородные дифференциальные уравнения (ОДУ):
    a) определение системы линейно зависимых (линейно независимых) функций;
    b) пример: линейная независимость функций $1, x, x^2, \dots, x^n$;
    c) пример: линейная независимость функций e^{ax}, e^{bx}, $a \neq b$;
    d) определитель Вронского;
    e) лемма 1;
    f) лемма 2;
    g) теорема о линейной независимости решений ОДУ;
    h) пример: линейная независимость функций $e^{a_i x}$, $i = 1, \dots, n$ (где a_i попарно различны);
    i) определение фундаментальной системы решений (ФСР);
    j) теорема о существовании ФСР ОДУ;
    k) теорема о представлении любого решения ОДУ в виде линейной комбинации функций из ФСР.

35) Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:
    a) ОДУ с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен;
    b) критерий: функция e^{ax} является решением ОДУ …;
    c) следствие о ФСР в случае отсутствия кратных корней у характеристического многочлена;
    d) замечание о вещественных собственных функциях, соответствующих комплексным корням характеристического многочлена (кратность корней равна единице);
    e) лемма о производной k-го порядка функции $v(x)$;
    f) лемма о представлении $(Lv)(x)$;
    g) лемма (критерий): $v(x)$ — решение ОДУ;
    h) теорема о решениях ОДУ в случае, когда a — корень кратности k;
    i) лемма о производных функции $\varphi(x) = p(x)e^{ax}$;
    j) лемма о сумме $p_i e^{a_i x}$ и нулевых многочленах;
    k) теорема о ФСР ОДУ в случае кратных корней характеристического многочлена;
    l) замечание о вещественных собственных функциях, соответствующих комплексным корням (кратность корней больше единицы) характеристического многочлена.

36) Метод вариации произвольной постоянной (с обоснованием).