

Задание 1. (5 баллов) Выпуклые функции.

- Два варианта определения, геометрическая интерпретация.
- Критерий выпуклости и строгой выпуклости функции в терминах второй производной.

Задание 2. (10 баллов) Определение верхней и нижней суммы Дарбу. Четыре свойства сумм Дарбу.

Задание 3. (10 баллов) Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

- лемма о производной k -го порядка функции $v(x)$ (с доказательством);
- лемма о представлении $(Lv)(x)$ (с доказательством);
- лемма (критерий): $v(x)$ — решение ОДУ (с доказательством);
- теорема о решениях ОДУ в случае, когда a — корень кратности k (с доказательством);

Практические задания:

Задание 4 [2 балла]. Записать в общем виде (с неопределенными коэффициентами) частное решение неоднородного уравнения со специальной правой частью:

$$y'' + 3y' - 4y = xe^{-4x} + e^{4x} + x^2 \cos 4x + e^x$$

Задание 5 [1+1+1 балл]. Вычислить интегралы:

a) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ б) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$ в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

Задание 6 [1+1 балл]. Исследовать сходимость рядов:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2+n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+4})$

Задание 7 [1 балла]. Решить дифференциальное уравнение:

$$y' = \operatorname{ctg} y$$

Задание 8 [2 балла]. Решить дифференциальное уравнение:

$$(x+1)(y' + y^2) + y = 0$$