УМФ
Лекция 2
1-й семестр – осень 2018 г
Транспортное уравнение с источниками. Преобразования координат, диффеоморфизмы, векторные поля, и выпрямление. Нелинейные уравнения, контактные поля и потоки. Характеристики нелинейных уравнений.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

Траснпортное уравнение с линейным источником

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, рассмотрим уравнение

$$\alpha u_x + \beta u_y = \gamma_1 u + \gamma_0, \tag{1}$$

где a, b, γ_1, γ_0 – заданные функции переменных $(x, y) \in D$, а функция $u = u(x, y)$ подлежит определению.

Общее однородное уравнение

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0, \tag{2}$$

было изучено в лекции 1.

Характеристики уравнения (1), по определению, совпадают с характеристиками уравнения (2).

Пусть $\chi \subset D$ – характеристика уравнения (1), параметризованная отображением $\tau \mapsto (\widetilde{\xi}(\tau), \widetilde{\eta}(\tau))$. Пусть $\sigma_2 > \sigma_1$, определим функцию

$$E(\sigma_1, \sigma_2) = \exp\left(-\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \gamma_1(\widetilde{\xi}(\sigma), \widetilde{\eta}(\sigma)) d\sigma\right); \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть $(x_1, y_1) \in \chi$, $(x_2, y_2) \in \chi$, и

$$\exists\ \tau_1, \tau_2 :\ x_1 = \widetilde{\xi}(\tau_1),\ \ y_1 = \widetilde{\eta}(\tau_1),\ \ x_2 = \widetilde{\xi}(\tau_2),\ \ y_2 = \widetilde{\eta}(\tau_2),\ \ \tau_2 > \tau_1$$

Пусть u – решение уравнения (1). Тогда

Общее решение и задача Коши

$$u(x_2, y_2) - E(\tau_1, \tau_2)u(x_1, y_1) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} E(\tau, \tau_2)\gamma_0(\widetilde{\xi}(\tau), \widetilde{\eta}(\tau))\, d\tau. \qquad (4)$$

◀ Полагаем $v(\tau) = u(\widetilde{\xi}(\tau), \widetilde{\eta}(\tau))$, тогда из уравнения (1) вытекает ОДУ

$$v' = \widetilde{\gamma}_1 v + \widetilde{\gamma}_0, \quad \widetilde{\gamma}_1(\tau) = \gamma_1(\xi(\tau), \eta(\tau)),\ \widetilde{\gamma}_0(\tau) = \gamma_0(\xi(\tau), \eta(\tau)); \qquad (5)$$

Равенство (3-4) вытекает непосредственно из известного явного выражение общего решение уравнения (5) через коэффициенты (см. курс ДУ). ▶

Решим задачу Коши для уравнения (1). С этой целью фиксируем (x, y) и проводим через эту точку характеристику $\chi_{x,y}$, т.е. решаем задачу Коши для ОДУ

$$X' = \alpha(X, Y),\ Y' = \beta(X, Y), \quad ()' = d()/ds, \quad (X, Y)|_{s=0} = (x, y); \qquad (6)$$

находим координаты $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ точки пересечения $\chi_{x,y}$ с начальной кривой S и соответствующее этой точке значение параметра $\tau(x, y)$ (см. лекцию 1); пусть $\tau < 0$, выражение $u(x, y)$ дают формулы (3-4), где следует положить

$$\tau_1 = \tau(x, y),\ \tau_2 = 0,\ (x_2, y_2) = (x, y),\ (x_1, y_1) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) \qquad (7)$$

$$u(x_1, y_1) = \psi(\xi(x, y), \eta(x, y)),\ (\widetilde{\xi}(\sigma), \widetilde{\eta}(\sigma)) = (X(x, y, \sigma), Y(x, y, \sigma)). \qquad (8)$$

причём ψ – начальная функция.

Уравнение неразрывности

Замечание 1. Случай $\tau(x, y) > 0$ сводится к рассмотренному умножением уравнения на -1.
Замечание 2. Использование указанного общего решения на практике не всегда удобно, но, так или иначе, надо сперва найти тем или иным способом приращение решения уравнения (5) на произвольном интервале (τ_1, τ_2), а затем сделать подстановку (7-8), предварительно вычислив функции ξ, η, τ, следуя при этом сказанному в лекции 1.

Уравнение неразрывности, по определению, имеет вид

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0. \tag{9}$$

Функция v называется скоростью, ρ – плотностью; скорость считается заданной, плотность – неизвестной. Типичная постановка начального условия для уравнения (9)

$$\rho|_{t=0} = \psi. \tag{10}$$

Проинтегрируем (9) по $x \in (x_1, x_2)$. Получим

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t)dx + (\rho v)|_{x=x_1}^{x=x_2} = 0. \tag{11}$$

Сохранение массы

Видно, что изменение массы отрезка возможно только вследствие притока/оттока вещества через его концы. Таким образом, уравнение неразрывности – дифференциальная форма закона сохранения массы.

Уравнение неразрывности записывается в виде (1) с $y = t, \alpha = v, \beta = 1, \gamma_1 = -v_x, \gamma_0 = 0$. Зафиксируем (x, t), $t > 0$. Уравнения характеристики $\chi_{x,t}$,

$$X' = v(X, T),\ \ T' = 1,\ \ X|_{s=0} = x,\ \ T|_{s=0} = t, \Longrightarrow \tau = -t, \xi = X(x, t, -t),$$

где $X_s(x, t, s) = v(X, t + s)$, $X|_{s=0} = x$, $s \in (-t, 0)$. Удобно ввести замену $t_1 = t + s$, тогда $X_{t_1} = v(x, t_1)$, $X|_{t_1=t} = x$, $X|_{t_1=0} = \xi$. Поэтому просто введём решение задачи Коши

$$\mathcal{X}_t = v(\mathcal{X}, t),\ \ \mathcal{X}|_{t=0} = \xi, \tag{12}$$

и положим $x = \mathcal{X}(\xi, t)$. Вдоль $\chi_{x,t}$,

$$\frac{d}{dt}\rho(\mathcal{X}(\xi, t), t) = -v_x(\mathcal{X}(\xi, t), t)\rho(\mathcal{X}(\xi, t), t),$$

так что

$$\rho(\mathcal{X}(\xi, t), t) = \psi(\xi)\exp(-\int_0^t v_x(\mathcal{X}(\xi, t), t)d\sigma) \tag{13}$$

Масса материального сегмента

Равенство (12) описывает эволюцию плотности в материальной частице, переместившейся за время t из точки ξ в точку x; $\sigma \mapsto \mathcal{X}(\xi,\sigma)$ параметризует путь этой частицы, при этом $v(\mathcal{X}(\xi,\sigma),\sigma))$ – скорость частицы.

Рассмотрим *материальный (то есть, состоящий из материальных частиц) сегмент* $I(t) = \mathcal{X}(I_0, t)$, где I_0 – начальный сегмент.

Масса материального сегмента постоянна, если плотность удовлетворяет уравнению неразрывности. В самом деле,

$$\int\limits_{I(t)} \rho(x,t)dx = \int\limits_{I_0} \rho(\mathcal{X}(\xi,t),t)|\mathcal{X}_\xi(\xi,t)|d\xi \qquad (14);$$

дифференцируем (12) по ξ, и находим уравнение в вариациях

$$\mathcal{X}_{\xi t}(\xi,t) = v_x(\mathcal{X}(\xi,t),t))\mathcal{X}_\xi(\xi,t),\ \ \mathcal{X}_\xi(\xi,0) = 1. \qquad (15)$$

Сопоставляем (13), (14) и (15) и заключаем, что

$$\int\limits_{I(t)} \rho(x,t)dx = \int\limits_{I_0} \psi(\xi)d\xi.$$

Нелинейный источник.

Пример 1. Решим задачу Коши для уравнения неразрывности с $v(x,t) = -x$. Тогда $\mathcal{X}(\xi, t) = \xi \mathrm{e}^{-t}$; и, в силу (13),

$$\rho(\xi \mathrm{e}^{-t}, t) = \psi(\xi) \Longrightarrow \rho(x,t) = \psi(x\mathrm{e}^{t})\mathrm{e}^{t}.$$

В частности, $\rho(0,t) = \psi(0)\mathrm{e}^{t}$. Пусть $0 \in I_0$, тогда материальный отрезок $I(t)$ стягивается к нулю экспоненциально, но его масса остаётся постоянной. Следовательно, масса концентрируется вокруг начала.

Рассмотрим транспортное уравнение с нелинейным источником

$$\alpha u_x + \beta u_y = \gamma(x,y,u) \ \alpha = \alpha(x,y), \ \beta = \beta(x,y). \qquad (16),$$

Характеристики определяем обычным образом. Имеем уравнения

$$X' = \alpha(X,Y), \ Y' = \beta(X,Y), \ U' = \gamma(X,Y,U).$$

Последнее уравнение определяет эволюцию решения вдоль характеристики, параметризованной решением системы первых двух уравнений. Для разнообразия, предположим, что характеристика задана непараметрически первым интегралом $C(X,Y,Z) = 0$, Z – константа интегрирования. Так часто бывает на практике. Предположим известен и первый интеграл третьего уравнения $G(X,Y,Z,U,V) = 0$, где V – константа интегрирования.

Использование первых интегралов

Пусть ещё имеется начальное условие $u = \psi$ на начальной кривой $S = \{(x, y) : \Phi(x, y) = 0\}$. Пусть характеристика соединяет произвольно заданную точку (x, y) и некоторую точку $(\xi, \eta) \in S$. Тогда

$$C(x, y, Z) = 0,\ \ C(\xi, \eta, Z) = 0;\ \ \Phi(\xi, \eta) = 0;$$

добавим уравнения

$$G(\xi, \eta, Z, \psi(\xi, \eta), V) = 0,\ \ G(x, y, Z, U, V) = 0.$$

Имеем пять уравнений с семью неизвестными x, y, Z, ξ, η, U, V. Из этих пяти уравнений выразим ξ, η, U, V, Z через x, y, и за ответ примем $u = U(x, y)$.

Пример 2. $u_t + cu_x = \gamma(u), \quad u|_{t=0} = \psi,\ \ c = \mathrm{const}.$ Итак, $\Phi(\xi, \eta) = \eta$ при этом характеристики – прямые, так что первые интегралы уравнений характеристик $X - cT = Z,\ Z = \mathrm{const}$. Вдоль характеристик имеем

$$U' = \gamma(U),\ \ ()' = \frac{d}{dT} \Longrightarrow T = \int \frac{dU}{\gamma(U)}$$

(константа V скрыта в неопределённом интеграле). Получаем 5 уравнений

$$\eta = \int\limits_V^{\psi(\xi)} \frac{dw}{\gamma(w)},\ \ t = \int\limits_V^{u} \frac{dv}{\gamma(v)},\ \ x - ct = Z,\ \ \xi - c\eta = Z,\ \ \eta = 0.$$

Коллапс решения

Итак, решение u непараметрически (то есть, неявно) задано уравнением

$$t = \int\limits_{\psi(x-ct)}^{u} \frac{dv}{\gamma(v)}.$$

В частности, пусть $\gamma(u) = u^2$. Тогда

$$t = -\left.\frac{1}{w}\right|_{\psi(x-ct)}^{u} \Longrightarrow u(x,t) = \frac{\psi(x-ct)}{1 - t\psi(x-ct)}.$$

Из данного примера видно, что в *решения нелинейных уравнений могут «взрываться» вне связи с особыми точками векторного поля коэффциентов уравнения и характеристическими точками начальной поверхности.* Это, впрочем, ожидаемый эффект, известный даже для ОДУ.

Определение 1. Диффеоморфизмом области $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n$ на область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется биекция $f : D_1 \to D$, такая, что $f \in \mathrm{C}^k(D_1)$, $f^{-1} \in \mathrm{C}^k(D)$ при каком-нибудь $k \in \mathbb{N} \cup \infty$.

Значение k уточняется по мере необходимости; по умолчанию $k = \infty$.

Диффеоморфизмы и транспортное уравнение.

Зафиксируем $D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть преобразование

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y). \tag{17}$$

определяет диффеоморфизм $f : D \to D_1$.

Определение 2. Диффеоморфизм (17) преобразует уравнение $\widetilde{F}(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$ в D_1 в $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ в D, если $u(x, y) = v(f_1(x, y), f_2(x, y))$ – решение второго уравнения, при условии, что v – решение первого. Рассмотрим преобразование транспортного уравнения (16). Производные u и v связаны линейным преобразованием

$$u_x = v_\xi f_{1x} + v_\eta f_{2x};\ u_y = v_\xi f_{1y} + v_\eta f_{2y}; \Longrightarrow$$

Отсюда, с учётом (2), вытекает уравнение

$$v_\xi(\alpha f_{1x} + \beta f_{1y}) + v_\eta(\alpha f_{2x} + \beta f_{2y}) = 0.$$

Итак, диффеоморфизм (17) преобразует транспортное уравнение (16) в транспортное уравнение того же вида, изменняя лишь коэффициенты; именно

$$\widetilde{\alpha} v_\xi + \widetilde{\beta} v_\eta = \widetilde{\gamma}; \quad \widetilde{\alpha} = \alpha f_{1x} + \beta f_{1y},\ \widetilde{\beta} = \alpha f_{2x} + \beta f_{2y}; \tag{18}$$

$\widetilde{\gamma}(\xi, \eta, v) = \gamma(x, y, u)$, где x, y выражены через (ξ, η).

Диффеоморфизмы и решение уравнений

Пример 3. Рассмотрим преобразование уравнения

$$yu_x - xu_y = 0 \qquad (19)$$

при диффеоморфизме $f : \{(x,y) : x \notin (-\infty, 0])\} \to \{(r,\theta) : r > 0, \theta \in (-\pi, \pi)\}$, заданном равенствами $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

Это преобразование – не что иное, как введение полярных координат.

По правилу (18), уравнение (19) преобразуется так

$$\widetilde{\alpha}u_r + \widetilde{\beta}u_\theta = 0, \quad \widetilde{\alpha} = ar_x + br_y, \ \widetilde{\beta} = a\theta_x + \widetilde{\beta}\theta_y, \ \alpha = y, \ \beta = -x,$$

Следовательно, нужна матрица

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} x/r & -y \\ y/r & x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\widetilde{\alpha} = yx/r - xy/r = 0, \ \widetilde{\beta} = -yy/r^2 - xx/r^2 = -1.$$

Итак, в полярных координатах, уравнение (19) имеет вид $-u_\theta = 0$. Общее решение теперь очевидно: $u = \psi(r)$.

Векторные поля и линейные уравнения первого порядка

Левая часть уравнения (2) порождает векторную функцию

$$\mathbf{V} : (x, y) \mapsto (\alpha(x, y), \beta(x, y)) \tag{20}$$

и отображение (*дифференциальный оператор*)

$$u \mapsto L_V u = \alpha u_x + \beta u_y. \tag{21}$$

Дифференциальный оператор (21) – дифференцирование, в том смысле, что

$$L_V(u + v) = L_V u + L_V v, \;\; L_V(\mu u) = \mu L_V u, \;\; \mu = \mathrm{const}, \;\; L_V(uv) = uL_V v + vL_V u. \tag{22}$$

В частности, L_V задает дифференцирование в каждой точке $(x, y) \in D$.

Определение 4. Векторным полем в области D назовём дифференцирование $\mathcal{V}$, то есть, операцию над функциями, обладающую свойствами (22).

Известно, что для любого векторного поля найдётся векторная функция $\mathbf{V} : \mathcal{V}u = L_V u$. В этом смысле векторное поле можно отождествить с векторной функцией: $\mathcal{V} = \mathbf{V}$. Это отождествление *зависит от координат*.

При изменении координат векторную функцию V необходимо преобразовать по правилу (18). Запишем правило преобразования в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}(\xi, \eta) \\ \widetilde{\beta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{pmatrix}, \quad \xi = f_1(x, y), \;\; \eta = f_2(x, y). \tag{18$'$}$$

Действие диффеоморфизмов на векторные поля.

В краткой форме,

$$\widetilde{\mathbf{V}}(\zeta) = f'(z)\mathbf{V}(z),\ \zeta = (\xi, \eta) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f(z),\ f' = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix}. \quad (18'')$$

Определение 4. Образом поля $\mathbf{V}$, заданного в области D при диффеоморфизме $f : D \to D_1$ называется поле $\widetilde{\mathbf{V}}$, определённое в D_1 равенством (22).

Замечание 3. Преобразование координатного изображения векторного поля при изменении координат равносильно действию диффеоморфизма, осуществляющего данное преобразование координат, ср. $(18')$ и $(18'')$.

Замечание 4. Пусть частица, двигаясь в области D, описывает кривую Γ, параметризованную отображением $r = r(t)$. Вектор $r'(t)$ – скорость движения частицы по этой кривой в точке $r(t)$. Диффеоморфизм $f : D \to D_1$ переносит кривую Γ в область D_1 и получается кривая $\Gamma_1 = f\Gamma$, параметризованная отображением $r_1 : t \mapsto f(r(t))$. Скорость частицы в новых координатах дает правило $(18'')$: $r_1'(t) = f'(r(t))r'(t)$ (дифференцирование сложной функции).

Обозначения: $\mathrm{Vect}(D)$ – множество векторных полей, заданных в области D; $\mathrm{Diff}(D, D_1)$ – множество диффеоморфизмов $D \to D_1$, $\mathrm{Diff}(D)$ при $D = D_1$; $\widetilde{\mathbf{V}} = f_*\mathbf{V}$ – образ поля $\mathbf{V}$ при диффеоморфизме f.

Определение 5. Особой точкой поля $\mathbf{V} \in \mathrm{Vect}(D)$ называется $z \in D : \ \mathbf{V}(z) = 0$.

Выпрямление и транспортное уравнение.

Определение 5. Выпрямлением поля $\mathbf{V} \in \mathrm{Vect}(D)$ называется $Y \in \mathrm{Diff}(D, D_1)$, такой, что $(Y_*\mathbf{V})(\zeta) = (1, 0 \ldots 0)$ $\forall \zeta = (\xi, \eta) \in D_1 \Leftrightarrow (Y_*\mathbf{V}) = \frac{\partial}{\partial \xi}$ в D_1.

Таким образом, выпрямление порождает в области U координаты, в которых поле $\mathbf{V}$ постоянно, а построение выпрямления равносильно введению таких координат.

В примере 3 поле $(x, y) \to (-y, x)$, ассоциированное с уравнением (19), выпрямляется в результате перехода к полярным координатам, то есть в роли выпрямления выступает определяющий это преобразование координат диффеоморизм f. Заметим, что дифференцирование по углу $\partial/\partial\theta$ в начале координат не имеет смысла, так что выпрямление определено вне окрестности начала, которое является особой точкой поля $(x, y) \to (-y, x)$.

Теорема 1. Выпрямление векторного поля определено в окрестности каждой неособой точки этого поля.

Доказательство – см. *Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.*

Выпрямление, рассматриваемое как преобразование транспортного уравнения, приводит его к наиболее простой форме: $u_\xi = \lambda(\xi, \eta, u)$, то есть, УрЧП превращается в семейство ОДУ, зависящее от параметра. В случае нулевого источника, решение очевидно: $u = \psi(\eta)$.

Нелинейное УрЧП порядка 1.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – заданная область, $F = F(p, q, z)$ – заданная функция переменных $q = (q_1, \dots, q_n) \in D$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$. Общее УрЧП порядка 1 имеет вид

$$F(\nabla u(q), q, , u(q)) = 0, \ \nabla u = (u_{q_1}, \dots, u_{q_n}), \tag{23}$$

где функция $u = u(q)$ подлежит определению.

Определение 6. Уравнение (23) называется *квазилинейным*, если F линейна (но не обязательно однородна) по p: $F(p, q, z) = (\mathbf{a}, p) + \gamma(x, z)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(q, z) \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 7. Не квазилинейное уравнение (23) называется *(вполне или сильно) нелинейным*.

Определение 8.Уравнение (23) называется *полулинейным*, если оно квазилинейно, и вектор коэффициентов **a** не зависит от z: $F(x, p, z) = (\mathbf{a}(q), p) + \gamma(x, z)$

Определение 9. Уравнение (23) называется *линейным*, если оно квазилинейно, и F линейна по p, z: $F(x, p, z) = (\mathbf{a}(q), p) + \gamma_1(q)z + \gamma_0(q)$.

Полулинейное уравнение = транспортное уравнение с общим нелинейным источником. Квазилинейные уравнения получаются из предположения, что скорость транспорта субстанции зависит от её концентрации.

Пример 4. Уравнение Хопфа имеет вид

$$u_t + V(u)u_x = 0, \tag{24}$$

где функция $V = V(z), \; z \in \mathbb{R}$ задана.

Векторное поле на области в $\mathbb{R}^m, \; m > 2$ определяется точно так же, как и в двумерном случае. Пусть на $\mathbb{R}^m$ задано векторное поле $\mathbf{v}$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – область.

Определение 10. Семейство отображений $f(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}^m, \; |t| < t_0$,называется потоком поля $\mathbf{v}$, если $f_t(\omega, t) = \mathbf{v}(f(\omega, t)), \; \forall (\omega, t) \in \Omega \times (-t_0, t_0), \; f_t(\omega, 0) = \omega$.

Таким образом, $\widetilde{\omega}(t) = f(\omega, t)$ – решение задачи Коши $\widetilde{\omega}' = \mathbf{v}(\widetilde{\omega}), \; \widetilde{\omega}|_{t=0} = \omega$.

Из теории задачи Коши для ОДУ вытекают следующие утверждения.

Теорема 2. (i) пусть $t, \tau, t + \tau \in (-t_0, t_0)$. Тогда $f(\cdot, t + \tau) = f(\cdot, t) \circ f(\cdot, \tau)$;
(ii) $f(\cdot, t) \in \mathrm{Diff}(\Omega, \Omega_t), \; \Omega_t = f(\Omega, t), \; \forall t \in (-t_0, t_0)$;
(ii) пусть $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_0)$, тогда поток f поля $\mathbf{v}$ определён на каждой подобласти $\Omega \subset \Omega_0$, и $f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega \times (-t_0, t_0))$, где $t_0 = t_0(\Omega)$.

Определение 11. Пусть дана область $D \subset \mathbb{R}^n$. Область $\mathcal{J} = \mathbb{R}^n \times D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ называют *областью 1-струй*. Отображение $\pi : \mathcal{J} \to D, \; (p, q, z) \mapsto q$ называют *канонической проекцией*. Точки множества $\pi^{-1}(q)$ называют *1-струями* в точке q.

Определение 12. Поле $\mathbf{c}$ на $\mathcal{J}$ называется контактным, если найдутся координаты (p, q, z) и функция $F = F(p, q, z)$, такие что

$$\mathbf{c}(p, q, z) = (-F_q - F_z p, F_p, pF_p - F).$$

Функцию F называют производящей функцией поля $\mathbf{c}$.

Характеристический поток. Характеристики.

Поток контактного поля называют контактным.

В выражении контактного поля F_p, F_q – $n-$векторы частных производных производящей функции по координатам p, q; pF_p – стандартное скалярное произведение. В литературе производящую функцию часто называют *контактным гамильтонианом*

Теорема 3. Пусть $f : (J, t) \mapsto f(J, t)$ – контактный поток с производящей функцией $F = F(J)$, $J = (p, q, z)$. Тогда $F(J) = 0 \Longrightarrow \partial_t|_{t=0} F(f(J, t)) = 0$ для всех J, t из области определения f.

◀ Пусть $f(J, t) = (\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})(t)$. По правилу дифференцирования сложной функции $\partial_t F(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z}) = \widetilde{q}' F_q + \widetilde{p}' F_p + \widetilde{z}' F_z$ где, по определению контактного потока, $(\widetilde{p}', \widetilde{q}', \widetilde{z}') = (-F_q - F_z, pF_p, pF_p - F)$. Поэтому

$$\partial_t F(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z}) = F_p F_q - (F_q + F_z p) F_p + (pF_p - F) F_z = -FF_z = 0, \text{ при } F = 0 \blacktriangleright$$

Определение 13. Характеристическим потоком УрЧП 1-го порядка $F(q, u_q, u) = 0$ $F(q, u_q, u) = 0$ называется ограничение контактного потока с производящей функцией F на множество $F(p, q, z) = 0$. Образ траектории характеристического потока при канонической проекции называется характеристикой указанного УрЧП.

По теореме 3, контактный поток отображает множество уровня $\{F = 0\}$ производящей функции в себя. Поэтому определение 13 корректно.

Характеристики транспортного уравнения.

Определение 14. Характеристической системой УрЧП 1-го порядка $F(q, u_q, u) = 0$ называется система состоящая из ОДУ $J' = \mathbf{c}(J)$, $J = (p, q, z)$, где $\mathbf{c}$ – контактное поле с порождающей функцией F, и функционального уравнения $F(p, q, z) = 0$.

Мы начнём с уравнений с двумя независимыми переменными, так что $q = (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $p = (p^x, p^y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{J} = D \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5$,

$$\mathbf{c}(p^x, p^y, x, y, z) = (-F_x - F_z p^x, -F_y - F_z p^y, F_{p^x}, F_{p^y}, p^x F_{p^x} + p^y F_{p^y} - F) \tag{25}$$

При записи характеристической системы можно исключить F из $z-$координаты поля $\mathbf{c}$ (см. определение 14).

Пример 5. Рассмотрим транспортное уравнение $\alpha(x, y)u_x + \beta(x, y)u_y = \gamma(x, y, u)$

Согласно определению 14, характеристическая система этого уравнения имеет вид

$$\alpha(X, Y)P^x + \beta(X, Y)P^y - \gamma(X, Y, Z) = 0 \tag{26}$$

$$\dot{X} = \alpha(X, Y), \ \dot{Y} = \beta(X, Y), \tag{27}$$

$$\dot{P}^x = \gamma_X + (\gamma_Z - \alpha_X)P^x + \beta_X P^y, \ \dot{P}^y = \gamma_Y + (\gamma_Z - \beta_Y)P^y + \alpha_Y P^x, \ \dot{Z} = \alpha P^x + \beta P^y \tag{28}$$

Канонические проекции траекторий характеристического потока – фазовые кривые системы (27), которая, следовательно, определяет характеристики транспортного уравнения. Таким образом, прежнее определение характеристик транспортного уравнения (определение 1 из лекции 1) представляет собой частный случай общего определения 13.

Характеристики уравнения Хопфа

Замечание 5. Подсистема (27) отделяется от (28). Кроме того, в силу (26), третье уравнение подсистемы (28) можно записать в виде

$$Z' = \gamma(X, Y, Z). \tag{28'}$$

Определив X, Y из (27), можно решить (28′), а затем перейти к системе первых двух уравнений из (28) с неизвестными P^x, P^y. Последняя система линейна.

Пример 6. Рассмотрим уравнение Хопфа (24). По определению, контактная функция и характеристическая система имеют вид

$$P^t + V(Z)P^x = 0, \tag{29}$$

$$\dot{T} = 1, \ \dot{X} = V(Z), \tag{30}$$

$$\dot{P}^t = -V_Z(Z)P_xP_t, \ \dot{P}^x = -V_Z(Z){P^x}^2, \ \dot{Z} = P_xV(Z) + P^t = 0 \tag{31}$$

Проекции траекторий характеристического потока описываются уравнениями (30), где, ввиду (29) и (31), $Z = z = \mathrm{const}$. Следовательно, характеристики уравнения Хопфа – прямые линии

$$X - x = v(T - t), \quad v = V(z) = \mathrm{const}. \tag{32}$$

Замечание 6. Первые два уравнения в (31) принимают вид

$$\dot{P}^t = -vP^xP^t, \ \dot{P}^x = -v{P^x}^2 \quad v = V(z) = \mathrm{const}, \tag{33}$$

Влияние нелинейности на характеристики

Замечание 7. Уравнения (33) решаются явно. Решение второго из них неизбежно взрывается.

Замечание 8. Нелинейность уравнения Хопфа сказывается в двух характерных особенностях поведения решений характеристической системы.
(i) Через одну точку плоскости (x, t) может проходить более одной характеристики (32), что в случае линейного и полулинейного уравнения невозможно (см. пример 5) в силу теоремы о единственности решения задачи Коши для ОДУ. В случае уравнения Хопфа возможность неединственности связана с тем, что коэффициент прямой (32) зависит от z.
(ii) Взрыв решения характеристической системы уравнения Хопфа выражается в неограниченном росте P^x, тогда как $Z = \mathrm{const}$. В случае полулинейного уравнения (16), напротив, взрыв решения характеристической системы выражается в неограниченном росте Z. В случае линейного уравнения, например, при $\gamma = \gamma_1(x, y)u$ в (16), взрыв решения характеристической системы невозможен.