УМФ
Лекция 4
1-й семестр – осень 2018 г
Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. Метод характеристик.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

10 октября 2018 г.

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

(i) Построить НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$– поднятие данных Коши S, φ. Возможность такого построения в общем случае обсудим позже.

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

(i) Построить НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$– поднятие данных Коши S, φ. Возможность такого построения в общем случае обсудим позже.

(ii) По теореме 1 лекции 3 получить из НИМ лежандрово многообразие, вложенное в уравнение $\mathcal{E} = \{J : F(J) = 0\}$. Убедиться в биективности канонической проекции построенного лежандрова многообразия (или некоторой его части, прилегающей к НИМ). Далее считаем, что однозначность установлена по крайней мере вблизи начальной кривой S.

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

(i) Построить НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$– поднятие данных Коши S, φ. Возможность такого построения в общем случае обсудим позже.

(ii) По теореме 1 лекции 3 получить из НИМ лежандрово многообразие, вложенное в уравнение $\mathcal{E} = \{J : F(J) = 0\}$. Убедиться в биективности канонической проекции построенного лежандрова многообразия (или некоторой его части, прилегающей к НИМ). Далее считаем, что однозначность установлена по крайней мере вблизи начальной кривой S.

(iii) Чтобы практически найти $u(x)$ при заданном x, поставим задачу Коши для характеристического поля

$\dot{Q} = F_p(P, Q, Z)$; $\dot{P} = -(F_x + F_z P)(P, Q, Z)$; $\dot{Z} = PF_p(P, Q, Z)$,

$(P, Q, Z)|_{\tau=0} = (p, q, z)$, q – заданная точка, z, p – неизвестны.

Решаем характеристическую систему. Находим

$Q = Q(p, q, z, \tau)$; $P = P(p, q, z, \tau)$, $Z = Z(p, q, z, \tau)$.

Как решить уравнение-II?

Как решить уравнение-II?

(iv) Соединим характеристикой точку (q, p, z) с точкой $(P, Q, Z) \in \Sigma_{S,\varphi}$. Пусть $S = \{q : \Phi(q) = 0\}$. Тогда $Z = \psi(Q)$, $P = \nabla\psi(Q)$, и $\psi(Q) = \varphi(Q)$ для всех $Q : \ \Phi(Q) = 0$. Следовательно,

$$\Phi(Q) = 0, \ P(p, q, z, \tau) = \nabla\psi(Q), \ Z(x, p, u, \tau) = \varphi(Q), \text{ где } Q = Q(p, q, z, \tau)$$

Имеем $2 + n$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными p, q, z, τ. Выражаем $n + 2$ неизвестных p, z, τ через n-вектор q и находим, в частности, $u = z(q)$.

Как решить уравнение-II?

(iv) Соединим характеристикой точку (q, p, z) с точкой $(P, Q, Z) \in \Sigma_{S,\varphi}$. Пусть $S = \{q : \Phi(q) = 0\}$. Тогда $Z = \psi(Q)$, $P = \nabla\psi(Q)$, и $\psi(Q) = \varphi(Q)$ для всех $Q : \ \Phi(Q) = 0$. Следовательно,

$\Phi(Q) = 0, \ P(p, q, z, \tau) = \nabla\psi(Q), \ Z(x, p, u, \tau) = \varphi(Q)$, где $Q = Q(p, q, z, \tau)$

Имеем $2 + n$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными p, q, z, τ. Выражаем $n + 2$ неизвестных p, z, τ через n-вектор q и находим, в частности, $u = z(q)$.

Построение $\Sigma_{S,\varphi}$. Почему НИМ нужно строить именно так?

Пусть $(u - \varphi)|_S = 0$. $d_y\Phi \neq 0 \implies \exists e \in \mathbb{R}^n : \ d_y\Phi(e) = 1 \implies$

$\forall \ \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n \ d_y\Phi(\tilde{\xi} - d_y\Phi(\tilde{\xi})e) = 0 \implies d_y u(\tilde{\xi} - d_y\Phi(\tilde{\xi})e) = d_y\varphi(\tilde{\xi} - d_y\Phi(\tilde{\xi})e) \implies$

$d_y u(\tilde{\xi}) = d_y\varphi(\tilde{\xi}) + (d_y(u - \varphi))(e) d_y\Phi(\tilde{\xi})) \implies \nabla u = \nabla\varphi + \lambda\nabla\Phi, \ \lambda = (d_y(u - \varphi))(e)$

Построение $\Sigma_{S,\varphi}$. Вычисление λ. Выбор λ обеспечивает вложение $\Sigma_{S,\varphi}$ в уравнение, что выражается равенством

$$F(\nabla\psi(q), q, \varphi(q)) = 0 \ \forall q \in S = \{q : \ \Phi(q) = 0\}, \text{ где } \nabla\psi(q) = \nabla\varphi + \lambda\nabla\Phi \qquad (1)$$

Нехарактеристические точки задачи Коши.

Нехарактеристические точки задачи Коши.

Пример несовместной задачи Коши. Уравнение (1) может быть неразрешимо относительно λ. Это означает, что данные Коши несовместны с уравнением. Например, уравнение $p^2 - 1 = 0$ несовместно с данными Коши $S = \{y = 0\}, \varphi(x) = x + \mathrm{e}^x$. В самом деле, относительно λ имеем уравнение $(1 + \mathrm{e}^x)^2 + \lambda^2 = 1$, которое не имеет решения.

Определение 1. Задача Коши

$$F(\nabla u, q, u) = 0, \ \ u|_S = \varphi, \ \ S = \{q : \ \Phi(q) = 0\} \tag{2}$$

называется совместной в т. $q \in S$, если уравнение (1) в т. q имеет решение $\lambda(q)$.

Совместность не означает единственность решения $\lambda(q)$. Пример неединственности – уравнение эйконала.

Определение 2. Точка $q \in S$ называется нехарактеристической для задачи Коши (2),если (i) задача Коши совместна в т. q и характеристическая траектория, проходящая через точку $(p, q, \varphi(q))$,, где $p = \nabla\varphi(q) + \lambda(q)\nabla\Phi(q)$, и λ – решение уравнения (1) канонически проецируется в характеристику, некасательную к S в точке q.

Нехарактеристические точки задачи Коши-II.

Нехарактеристические точки задачи Коши-II.

Согласно определению характеристического потока $\dot{q} = F_p$. Поэтому $F_p(p, q, z)$ даёт направление характеристики, проходящей через точку q. Поэтому условие нехарактеристичности принимает вид

$$F_p(p, q, z)\nabla\Phi(q) \neq 0,\ z = \varphi(q),\ p = \nabla\varphi(q) + \lambda(q)\nabla\Phi(q).$$

В случае квазилинейного уравнения $ap = \gamma$, $a = a(q, z)$ – вектор, $\gamma = \gamma(q, z)$ – скаляр,

$$\lambda = \frac{a\nabla\varphi - \gamma}{a\nabla\Phi},\ a = a(q, \varphi(q)),\ \gamma = \gamma(q, \varphi(q)),\ \Phi(q) = 0$$

Решение $\lambda = \lambda(q)$ существует, для всех тех $q \in S$,при которых знаменатель не равен нулю, т.е. условие нехарактеристичности $a\nabla\Phi \neq 0$.

В случае задачи Коши в нормальной форме

$$u_t + H(\nabla u, x, t, u) = 0, u|_{t=0} = \varphi,\ \varphi = \varphi(x),\ q = (x, t),\ p = (p^t, p),\ \Phi(q) = t;$$

$F = p^t + H(p, q, z) = 0,\lambda = \lambda(q) = H(\nabla\varphi(x), x, 0, \varphi(x))$ всегда существует.

Теорема о существовании решений общей задачи Коши

Теорема 1. Пусть точка $q_0 \in S$ нехарактеристическая для задачи Коши (2). Тогда найдётся такая окрестность $\mathcal{U}_{q_0}$ точки q_0, что все точки $q \in S \cup \mathcal{U}_{q_0}$ нехарактеристические, и точки $(q, \nabla\varphi(q) + \lambda(q)\nabla\Phi(q), \varphi(q)),\ q \in S \cup \mathcal{U}_{q_0}$ образуют НИМ – поднятие данных Коши S, φ в уравнение $F = 0$.

Теорема 2. Задача Коши (2) имеет локальное решение в окрестности любой нехарактеристической точки.