

Тема 5

Контрольные задания.

- 1) Даны 2 вектора: $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 5, 1)$. Найти (\mathbf{a}, \mathbf{b}) и угол φ между этими векторами.
- 2) Даны 3 вектора: $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 1, 2)$ и $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$. Найти: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- 3) Даны системы векторов: $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (7, 4, 3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -6, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (5, 3, 0, 4)$. Предварительно выяснив, является ли система $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ базисом, применить процедуру ортогонализации Грамма-Шмидта и построить ортогональный базис этого подпространства.
- 4) Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$. Найти: $AB, BA, \det A, \det B$.
- 5) Дана матрица: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$. Переставить вторую и третью строки, затем умножить последний столбец на 10. У полученной матрицы найти: A^T, A^{-1}, M_{32} (матрицу и определитель).
- 6) Найти ранг матрицы: $C = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$. Привести матрицу C к треугольному виду (тремя способами). Получить LU- и QR-разложение матрицы C .
- 7) Дана матрица $T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$. Найти e^T , $\det(e^T)$, собственные векторы и собственные числа матрицы e^T , ядро матрицы T .
- 8) Дана матрица $U = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Найти нормальную форму Жордана, собственные векторы и числа, найти характеристический и минимальный многочлены.
- 9) Решить матричное уравнение: $AX=B$, где $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.
- 10) Перевести в матричный вид и решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8, \\ 3x + y + z = 6, \\ 2x + y + 2z = 6. \end{cases}$$
- 11) Дана функция $f = xy - z^2$. Найти $\text{grad} f$ и производную от f в направлении биссектрисы первого координатного угла.
- 12) Дан вектор угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = [0, 0, \omega]$ и радиус-вектор $\mathbf{r} = [x, y, z]$ в декартовой системе координат. Найти $\text{div} \mathbf{V}$ и $\text{rot} \mathbf{V}$ где \mathbf{V} – скорость, равная $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$.

13) При какой зависимости частоты ω от параметров a , b и c функция $u = \cos(ax + by - \omega t)$ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$?

14) Найти матрицу Якоби и ее определитель для вектор-функции $\mathbf{F} = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$.

Литература

Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в *Maple*: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.