Задачи включают параметры a, b, ω, m, n. Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает специальный список. Условия задач включают функции

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{x^2+\omega} + \left(\frac{a}{x^2+a}\right)^m + \left(\frac{b}{x^2+b}\right)^n\right). \tag{1}$$

1. Решите линейную задачу Коши $z_t + A(x)z_x = 0,\ z = (u, v, w),\ u|_{t=0} = f,\ v|_{t=0} = f,\ w|_{t=0} = f$, где

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\frac{a\left(a\,c-b^2x^2\right)}{a^2+b^2} & \frac{b^2a\left(c+a\,x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} & -\frac{a^2b\left(c+a\,x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} \\ \frac{b^2a\left(c+a\,x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} & \frac{b\left(a^4x+a^2xb^2-b^3c+b\,a^3x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} & -\frac{a\,b\left(-a^2b\,x-b^3x-b^2c+a^3x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\ -\frac{a^2b\left(c+a\,x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}} & -\frac{a\,b\left(-a^2b\,x-b^3x-b^2c+a^3x^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} & \frac{b^3xa^2+b^5x-a^2b^2c+a^5x^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} \end{pmatrix}, c = \omega/2.$$

С этой целью

(а) найдите характеристические направления (заданные собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы A) и соотвествующие собственные векторы (так как матрица симметрична, она совпадает со своей сопряжённой);

(б) найдите инварианты Римана $q = (u, v, w), r = r(u, v, w), s = s(u, v, w)$; запишите систему в инвариантах Римана; в результате система расщепится на 3 не связанных между собой уравнения относительно инвариантов q, r, s;

(в) исходя из начальных условий, найдите начальные значения q_0, r_0, s_0 инвариантов q, r, s; таким образом, возникнут три задачи Коши вида $y_t + \lambda(x)y_x = 0,\ y|_{t=0} = y_0(x)$, где y – один из инвариантов q, r, s, характеристическое направление λ – соответствующее собственное значение из списка $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, и y_0 – соответствующее начальное значение из списка q_0, r_0, s_0;

(г) найдите $q = q(x, t), r = r(x, t), s = s(x, t)$ из указанных трёх задач Коши.

<u>*Указание.*</u> Характеристики направления λ_3, проходящие через точки (x, t) области $1 + axt < 0$ не пересекаются с осью Ox. Эта область – в «тени» (мы уже с этим сталкивались). В такой ситуации удобно продолжить инвариант s на область тени нулём. С этой целью домножим s на $\Theta(1 + axt)$, где Θ – функция Хевисайда, и далее используем $\widetilde{s}(x, t) = \Theta(1 + axt)s(x, t)$.

(д) анимируйте на общем поле графики $\{(x, q(x, t)),\ x = -5..5\}$, $\{(x, r(x, t))\ x = -5..5\}$, $\{(x, \widetilde{s}(x, t)),\ x = -5..5\}$, $t = 0..0.5$; различные графики окрасьте в разные цвета;

(е) вернитесь к исходным переменным u, v, w: найдите выражения $u = u(q, r, s), v = v(q, r, s), w = w(q, r, s)$, и подставьте в них уже найденные $q = q(x, t), r = r(x, t), \widetilde{s} = \widetilde{s}(x, t)$; анимируйте на общем поле графики $\{(x, u(x, t)), (x, v(x, t)), (x, w(x, t)),\ x = -5..5\},\ t = 0..0.5$; различные графики окрасьте в разные цвета.

<u>*Для самоконтроля и облегчения проверки:*</u>

(i) Собственными числами *должны быть* $\lambda_1 = -c,\ \lambda_2 = bx,\ \lambda_3 = ax^2$. **Просьба:** в своих работах используйте *именно такое* упорядочивание списка собственных чисел.

(ii) Соответствующие собственные векторы *не должны* зависеть от x. Каждый такой с.в. порождает инвариант Римана, представляющий собой линейную функцию от u, v, w. **Просьба:** инварианты соответствующие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ обозначьте q, r, s.

(iii) Для визуализации графиков q, r, s **просьба** использовать цветовые опции red,blue,green, соответственно.

(iv) Для визуализации графиков u, v, w **просьба** использовать цветовые опции red,blue,green, соответственно. Графики u, v, w *должны* совпадать в начальный момент времени.

2.

(а) Запишите в инвариантах Римана r, s уравнения одномерной изэнтропической газодинамики

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad \rho(u_t + uu_x) + (P(\rho))_x = 0;$$
$$P(\rho) = P_* \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^\gamma, \quad P_* = a,\ \rho_* = b,\ \gamma = 1 + \frac{2}{5}\frac{\omega + m + n + a + b}{\max(\omega, m, n, a, b)}$$

Для самоконтроля:

$$\frac{r+s}{2} = u; \qquad \frac{r-s}{2} = Q(\rho) = \frac{2c(\rho)}{\gamma - 1},\ c^2 = P_\rho.$$

Система в инвариантах должна иметь вид

$$r_t + \left(\frac{r+s}{2} + \frac{(\gamma-1)(r-s)}{4}\right) r_x = 0, \quad s_t + \left(\frac{r+s}{2} - \frac{(\gamma-1)(r-s)}{4}\right) s_x = 0.$$

(б) Найдите $\rho = \rho(x,t)$, считая $s \equiv s_0 = -Q(\rho^*)$, и $\rho|_{t=0} = \varphi \overset{\text{def}}{=} \rho_* + f$. Сделайте это двумя способами:
(i) выразите $u = u(\rho, s_0)$, подставьте в уравнение неразрывности, получите квазилинейное уравнение относительно ρ, решите его при начальном условии $\rho|_{t=0} = \varphi$;
(ii) положите $s = s_0 =$ в уравнении относительно r, и сведите полученное квазилинейное уравнение к функциональному уравнению относительно r, используя начальное условие $r|_{t=0} = r_0$, $r_0 = r(u(\varphi, s_0), \varphi)$; затем получите уравнение относительно ρ подстановкой $r = r(u(\rho, s_0), \rho)$.
(в) Продемонстрируйте визуально сопадение результатов, полученных способами (i) и (ii). С этой целью анимируйте графики решений вплоть до градиентной катастрофы, и выведите эти анимации на общую панель, используя линии, различающиеся по цвету и толщине.
Для самоконтроля: Разумеется, способы (i) и (ii) должны привести к одному и тому же результату, и это должна продемонстрировать анимация.

Рекомендация. Используйте пакет `LinearAlgebra`.

Источники:

(i) М.Ю. Жуков «Квазилинейные гиперболические уравнения» (учебное-методическое пособие), http://www.mmcs.sfedu.ru/_old/docmanupload/doc_details/322----q--q--.
(ii) Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко и др. «Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике», гл. 1, § 3, § 6.