Лабораторная работа №2

Исследование вынужденных колебаний

Кафедра теории упругости
Южный федеральный университет

Динамика механических систем, 2017

Outline

Outline

Рассмотрим уравнение

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Cx + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t \tag{1}$$

где m — масса материальной точки, C — жёсткость пружины, H — амплитуда вынуждающей силы, $f(x, \dot{x})$ — достаточно гладкая функция.

Решение уравнения ищем в виде отрезка ряда Фурье

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \tag{2}$$

Найдём производные x:

$$\dot{x} = \omega \sum_{k=1}^{N} k\,(-A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sum_{k=1}^{N} k^2\,(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t)$$

Рассмотрим выражение

$$f(x, \dot{x}) = f\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t\right),\right.$$
$$\left.\omega \sum_{k=1}^{N} k\left(-A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t\right)\right]$$

Функции x, $\dot{x}$ являются периодическими с периодом $2\pi/\omega$, следовательно $f(x, \dot{x})$ является периодической и может быть разложена в ряд Фурье. Приближённо заменим f отрезком ряда Фурье из N слагаемых:

$$f(x, \dot{x}) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k \cos k\omega t + \psi_k \sin k\omega t\right),$$

где

$$\varphi_0 = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x, \dot{x}) dt, \ \varphi_k = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x, \dot{x}) \cos k\omega t dt,$$

$$\psi_k = \frac{\omega}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x, \dot{x}) \sin k\omega t dt.$$

Выражения для φ_k, ψ_k содержат A_k, B_k.
Теперь подставим найденные выражения для x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ и f в уравнение (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках. Получаем систему нелинейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{A_0}{2} + \mu\varphi_0 = 0, \\ \left(C - m\omega^2\right) A_1 + \alpha\omega B_1 + \mu\varphi_1 = 0, \\ \left(C - m\omega^2\right) B_1 - \alpha\omega A_1 + \mu\psi_1 = H, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(C - m\omega^2 N^2\right) A_N + \alpha\omega N B_N + \mu\varphi_N = 0, \\ \left(C - m\omega^2 N^2\right) B_N - \alpha\omega N A_N + \mu\psi_N = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решая систему (3), находим A_k, B_k и рассматривая выражения для A_1 и B_1, находим амплитуду колебания по формуле

$$A = \sqrt{A^2 + B^2}$$

и таким образом строим уравнение для амплитудно - частотной характеристики.

Для примера рассмотрим уравнений Дюффинга вида

$$\ddot{x} + p^2 x + \gamma x^3 = H \sin \omega t \tag{4}$$

В случае симметричной позиционной восстанавливающей силы решение может быть найдено в виде:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t$$

Подставим x в уравнение:

$$-\omega^2 A_1 \sin \omega t - 9\omega^2 A_3 \sin 3\omega t + p^2 \left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right) + \\ + \gamma \left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right)^3 = H \sin \omega t$$

Раскроем куб:

$$\left(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t\right)^3 = A_1^3 \sin^3 \omega t + 3A_1^2 A_3 \sin^2 \omega t \sin 3\omega t + \\ + 3A_1 A_3^2 \sin \omega t \sin^2 3\omega t + A_3^3 \sin^3 3\omega t$$

Для того, чтобы разложить левую часть уравнения (4) в ряд Фурье, воспользуемся формулами понижения степени (лишние гармоники отбрасываем, первую и третью подчёркиваем):

$$\sin^3\omega t = \frac{1}{4}\left(\underline{3\sin\omega t} - \underline{\underline{\sin 3\omega t}}\right)$$

$$\sin^2\omega t \sin 3\omega t = \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\sin 3\omega t =$$
$$= \frac{\sin 3\omega t}{2} - \frac{1}{4}(\sin 5\omega t - \sin\omega t) = \underline{\frac{1}{4}\sin\omega t} + \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin 3\omega t}} + \ldots$$

$$\sin\omega t \sin^2 3\omega t = \frac{1}{2}(1-\cos 6\omega t)\sin\omega t = \underline{\frac{1}{2}\sin\omega t} + \ldots$$

$$\sin^3 3\omega t = \underline{\underline{\frac{3}{4}\sin 3\omega t}} - \ldots$$

Соберём первую и третью гармоники, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(p^2 - \omega^2\right) A_1 + \dfrac{3\gamma}{4}\left(A_1^3 + A_1^2 A_3 + 2A_1^2 A_3\right) = H, \\ \left(p^2 - 9\omega^2\right) A_1 + \gamma\left(-\dfrac{1}{4}A_1^3 + \dfrac{3}{2}A_1^2 A_3 + \dfrac{3}{4}A_3^3\right) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) может быть решена при помощи математических пакетов. Также мы можем получить амплитудно-частотную характеристику, если положим в решении $A_3 = 0$. В этом случае АЧХ приобретает вид:

$$\left(p^2 - \omega^2\right) A_1 + \frac{3\gamma}{4} A_1^3 = H$$

Также система может быть решена методом итераций

Outline

Рассмотрим квазилинейное уравнение вида

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t$$

Разложим решение в ряд по параметру ε:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

Подставляем выражение для x в исходное уравнение и собираем слагаемые при одинаковых степенях ε:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0 : \ \ddot{x}_0 + p^2 x_0 = H \sin \omega t, \\
&\varepsilon^1 : \ \ddot{x}_1 + p^2 x_1 + f(x_0, \dot{x}_0) = 0, \\
&\varepsilon^2 : \ \ddot{x}_2 + p^2 x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_0 = 0. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

Затем последовательно ищем решения уравнений (7), имеющие частоту вынуждающей силы

Outline

Рассматриваем уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x = -\mu f(x, \dot{x}) + H \sin \omega t \tag{7}$$

Ввидом коэффициент расстройки

$$\varepsilon = \mu a = \frac{p^2}{\omega^2} - 1.$$

Следовательно

$$p^2 = \omega^2 + \mu a \omega^2$$

Также полагаем

$$H = \mu P$$

Уравнение (7) приобретает вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \left[-a\omega^2 x - f(x, \dot{x}) + P \sin \omega t \right] = \mu F(t) \tag{8}$$

Ищем решение (8) в виде:

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \tag{9}$$

связанные дополнительным соотношением

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{10}$$

Подставляем (9) в (8) и получаем уравнение, рассматривая которое вместе с (10), получаем выражения для A и B:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\dfrac{\mu}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\mu}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{11}$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) = R(t)\sin\theta(t) \end{cases} \tag{12}$$

Подставляем (12) в (11) и, разрешая полученные уравнения относительно новых неизвестных функций, получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega} F(t) \sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{\omega R} F(t) \cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{13}$$

Теперь заменим правые части уравнений их осреднёнными за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

значениями.

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega T} \displaystyle\int_0^T F(t) \sin(\omega t - \theta)\, dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{\omega T} \displaystyle\int_0^T F(t) \cos(\omega t - \theta)\, \dfrac{dt}{R} \end{cases} \qquad (14)$$

Подставим в (14) выражение для $F(t)$.
В новых обозначениях

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t - \theta), \\ \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t - \theta), \end{cases} \qquad (15)$$

Также полагаем

$$R = const,\ \theta = const$$

Рассмотрим интеграл в первом уравнении (14):

$$-\frac{\mu}{\omega T}\int\limits_0^T F(t)\sin\left(pt-\theta\right)dt =$$

$$= -\frac{\mu}{\omega T}\int\limits_0^T \left\{-a\omega^2 R\cos(\omega t-\theta) - f\left[R\cos(\omega t-\theta), -\omega R\sin(\omega t-\theta)\right] + \right.$$

$$\left. +P\sin\omega t\right\}\sin\left(\omega t-\theta\right)dt$$

Первое слагаемое в фигурных скобках не даёт вклада в интеграл. Рассмотрим

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\sin\left(\omega t-\theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left[\cos(2\omega t-\theta)-\cos\theta\right]dt = -\frac{T}{2}\cos\theta$$

Первое уравнение (14) приобретает вид:

$$0 = \frac{\mu}{2\pi\omega} \int\limits_0^T f(R\cos\psi, R\sin\psi)\sin\psi d\psi + \frac{\mu P}{2\omega}\cos\theta$$

где

$$\psi = \omega t - \theta$$

Аналогично рассматриваем интеграл во втором уравнении (14):

$$\frac{\mu}{\omega T} \int\limits_0^T F(t)\sin(pt - \theta)\frac{dt}{R} =$$

$$= \frac{\mu}{\omega T} \int\limits_0^T \{-a\omega^2 R\cos(\omega t - \theta) - f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] +$$

$$+P\sin\omega t\}\cos(\omega t - \theta)\frac{dt}{R}$$

Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_0^T \cos^2(\omega t-\theta)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T [1+\cos 2(\omega t-\theta)]\,dt = \frac{T}{2}$$

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\cos(\omega t-\theta)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T [\sin(2\omega t-\theta)+\sin\theta]\,dt = \frac{T}{2}\sin\theta$$

Второе уравнение (14) приобретает вид:

$$0 = -\frac{\mu a\omega}{2} - \frac{\mu}{2\pi\omega R}\int\limits_0^T f(R\cos\psi, R\sin\psi)\cos\psi d\psi + \frac{\mu P}{2\omega R}\sin\theta$$

Перепишем полученные уравнения в виде:

$$\begin{cases} P\cos\theta = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^T f(R\cos\psi, R\sin\psi)\sin\psi d\psi, \\ P\sin\theta = a\omega^2 R + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^T f(R\cos\psi, R\sin\psi)\cos\psi d\psi, \end{cases} \tag{16}$$

Возводим оба уравнения (17) в квадрат и складываем их друг с другом:

$$P^2 = [\Phi_1(R)]^2 + \left[a\omega^2 R + \Phi_2(R)\right]^2, \tag{17}$$

где

$$\begin{cases} \Phi_1(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^T f(R\cos\psi, R\sin\psi)\sin\psi d\psi, \\ \Phi_2(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^T f(R\cos\psi, R\sin\psi)\cos\psi d\psi, \end{cases}$$

Outline

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t \tag{18}$$

Принцип возможных перемещений для задачи запишется в виде:

$$\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[\ddot{x} + p^2 x + \mu f(x, \dot{x}) - H \sin \omega t \right] \delta x dt = 0 \tag{19}$$

Представим x и δx в виде отрезков ряда Фурье:

$$x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \tag{20}$$

$$\delta x = \frac{\delta A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\delta A_k \cos k\omega t + \delta B_k \sin k\omega t) \tag{21}$$

Подставляем (20) и (21) в (19), собираем слагаемые при независимых вариациях и получаем систему уравнений для определения A_k, B_k.

Варианты заданий

1. $\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon x^2 \dot{x} = H \sin \omega t$
2. $\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon x(x^2 + \dot{x}^2) = H \sin \omega t$
3. $\ddot{x} + p^2 x - \varepsilon \dot{x}(x^2 + \dot{x}^2) = H \sin \omega t$
4. $\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon x(x^2 + \dot{x}^2) = H \sin \omega t$
5. $\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon x^2(x + \dot{x}) = H \sin \omega t$
6. $\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon \dot{x}^2(x + \dot{x}) = H \sin \omega t$
7. $\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon \dot{x}^2 = H \sin \omega t$

Указания

Содержание задания:

- Построить методами гармонического баланса, Ван-Дер-Поля, Пуанкаре и Галёркина скелетные кривые и изобразить их на одном графике.

- При использовании метода гармонического баланса и Галёркина выбрать $N = 2$;
- При использовании метода Пуанкаре найти x_2

Литература I

- Н. Н. Моисеев.
  Асимптотические методы нелинейной механики.
  М.:Наука, 1969.
- И. М. Бабаков.
  Теория колебаний.
  М.:Наука, 1968.
- Я. Г. Пановко.
  Введение в теорию механических колебаний.
  М.:Наука, 1971.
- В. Л. Бидерман.
  Прикладная теория механических колебаний.
  Высшая школа, 1972.