Задачи включают параметры a, b, ω, m, n. Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает известный вам список. Условия задач включают следующие функции

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{x^2+\omega} + \left(\frac{a}{x^2+a}\right)^m + \left(\frac{b}{x^2+b}\right)^n\right). \tag{1}$$

$$g(x) = a\sin^{m+1}(x) + b\cos^{n+1}(x). \tag{2}$$

1. Рассмотрите задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ r < 1, \quad u|_{r=1} = ay^{m+1} + bx^{n+1}, \quad \text{где } r = x^2 + y^2.$$

1.1. С помощью интеграла Пуассона запишите решение u в виде функции полярных координат r, θ. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом r, добейтесь визуального совпадения графика $\{(\theta, u(r,\theta)), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$ с графиком $\{g(\theta), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$.

1.2. Проверьте экспериментально совпадение решения, данного интегралом Пуассона, с решением, полученным разделением переменных (см. ИЗ5 прошлого семестра). С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $\theta \in (-2\pi, 2\pi)$, изменяя при этом $r \in (0.01..0.99)$ *от больших значений к меньшим*, и убедитесь в визуальном совпадении этих графиков. Какой результат теории краевых задач для уравнения Лапласа проявляется в данных экспериментальных наблюдениях?

2. Рассмотрите задачу Неймана

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ r < 1, \quad \left.\frac{du}{dn}\right|_{r=1} = ay^{m+1} + bx^{n+1} + c, \quad \text{где } r = x^2 + y^2,\ c = \text{const}.$$

2.1. Подберите c так, чтобы задача имела решение. С помощью интеграла Дини запишите решение u в виде функции полярных координат r, θ. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом r, добейтесь визуального совпадения графика $\{(\theta, u_r(r,\theta)), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$ с графиком $\{g(\theta), \theta \in (-2\pi..2\pi)\}$.

2.2. Проверьте экспериментально совпадение решения, данного интегралом Дини, с решением, полученным разделением переменных при надлежащем выборе произвольной постоянной в последнем (см. ИЗ5 прошлого семестра). С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $\theta \in (-2\pi, 2\pi)$, изменяя при этом $r \in (0.01..0.99)$ *от больших значений к меньшим*, и убедитесь визуально в совпадении этих графиков. Какой результат теории краевых задач для уравнения Лапласа проявляется в данных экспериментальных наблюдениях?

3. Рассмотрите задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ r > 1, \quad u|_{r=1} = ay^{m+1} + bx^{n+1},\ \sup_{r>1}|u| < \infty, \quad \text{где } r = x^2 + y^2.$$

3.1. С помощью интеграла Пуассона запишите решение u в виде функции полярных координат r, θ. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом r, добейтесь визуального совпадения графика $\{(\theta, u(r,\theta)), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$ с графиком $\{g(\theta), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$.

3.2. Проверьте экспериментально совпадение решения, данного интегралом Пуассона, с решением, полученным разделением переменных (см. ИЗ5 прошлого семестра). С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $\theta \in (-2\pi, 2\pi)$, изменяя при этом $r \in (1.01..10)$ от меньших значений к большим, и убедитесь в визуальном совпадении этих графиков. Какой результат теории краевых задач для уравнения Лапласа проявляется в данных экспериментальных наблюдениях?

4. Рассмотрите задачу Неймана

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ r > 1, \quad \left.\frac{du}{dn}\right|_{r=1} = ay^{m+1} + bx^{n+1} + c,\ \sup_{r>1}|u| < \infty, \quad \text{где } r = x^2 + y^2,\ c = \text{const}.$$

4.1. Подберите c так, чтобы задача имела решение. С помощью интеграла Дини запишите решение u в виде функции полярных координат r, θ. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом r, добейтесь визуального совпадения графика $\{(\theta, -u_r(r,\theta)), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$ с графиком $\{g(\theta), \theta \in (-2\pi, 2\pi)\}$.
4.2. Проверьте экспериментально совпадение решения, данного интегралом Дини, с решением, полученным разделением переменных при надлежащем выборе произвольной постоянной в последнем (см. ИЗ5 прошлого семестра). С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $\theta \in (-2\pi, 2\pi)$, изменяя при этом $r \in (1.01..10)$ от меньших значений к большим, и убедитесь в визуальном совпадении этих графиков. Какой результат теории краевых задач для уравнения Лапласа проявляется в данных экспериментальных наблюдениях?

5. Рассмотрите задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ x > 0, \quad u|_{x=0} = g,\ \sup_{x>0}|u| < \infty.$$

5.1. С помощью интеграла Пуассона запишите решение u в виде функции декартовых координат x, y. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом x, добейтесь визуального совпадения графика $\{(y, u(x,y)), y \in (-2\pi, 2\pi)\}$ с графиком $\{g(y), y \in (-2\pi..2\pi)\}$.
5.2. Проверьте экспериментально совпадение решения, данного интегралом Пуассона, с решением, полученным разделением переменных (см. ИЗ5 прошлого семестра). С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $y \in (-2\pi, 2\pi)$, изменяя при этом $x \in (0.01, 5)$ от меньших значений к большим, и убедитесь в визуальном совпадении этих графиков. Какой результат теории краевых задач для уравнения Лапласа проявляется в данных экспериментальных наблюдениях?

6. Рассмотрите задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ x > 0, \quad u|_{x=0} = \begin{cases} f(y), y > 0 \\ 0, y < 0 \end{cases},\ \sup_{x>0}|u| < \infty.$$

6.1. С помощью интеграла Пуассона запишите решение u в виде функции декартовых координат x, y. Проверьте экспериментально выполнение равенства

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(s)ds}{(y-s)^2} \stackrel{def}{=} w(y),\ \forall\, y < 0. \tag{3}$$

С этой целью, вычислите в явной форме интеграл Пуассона и интеграл, стоящий в правой части равенства (3), затем найдите u_x, и, выбирая надлежащим образом x, добейтесь визуального совпадения графика $\{(y, u_x(x,y)), y \in (-0.1, -1)\}$ с графиком $\{(y, w(y)), y \in (-0.1, -1)\}$.

6.2. Дайте теоретическое обоснование равенству (3).

7. Рассмотрите задачу Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0;\ r<1,\quad u|_{r=1}=\chi(\theta)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1,\ \theta\in(2\pi j,2\pi(j+\frac{2}{m+n})),\\ 0,\ \theta\in(2\pi(j+\frac{2}{m+n}),2\pi(j+1)),\end{cases}\quad j\in\mathbb{Z};\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

7.1. С помощью интеграла Пуассона запишите решение u в виде функции полярных координат r,θ. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом r, добейтесь визуального совпадения графика $\{(\theta,u(r,\theta),\theta\in(-2\pi,2\pi)\}$ с графиком $\{\chi(\theta),\theta\in(-2\pi..2\pi)\}$.

7.2. Найдите решение в другой форме, с помощью разложения граничной функции в ряд Фурье и разделения переменных. Полученные выражения должны быть равны тождественно. Проверьте это экспериментально. С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $\theta\in(-2\pi,2\pi)$, изменяя при этом $r\in(0.01..0.99)$ *от больших значений к меньшим*, и убедитесь в визуальном совпадении этих графиков. В частности, графики должны приближаться к графику постоянной функции при уменьшении r. Как теоретически предсказать значение этой постоянной?

8. Рассмотрите задачу Неймана

$$u_{xx}+u_{yy}=0;\ r<1,\ \left.\frac{du}{dn}\right|_{r=1}=\chi(\theta)\overset{\text{def}}{=}c+\begin{cases}1,\ \theta\in(2\pi j,2\pi(j+\frac{2}{m+n})),\\ 0,\ \theta\in(2\pi(j+\frac{2}{m+n}),2\pi(j+1)),\end{cases}\quad j\in\mathbb{Z};\ c=\text{const},\ r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8.1. Выберите c так, чтобы задача имела решение. С помощью интеграла Дини запишите решение u в виде функции полярных координат r,θ. Проконтролируйте экспериментально выполнение граничного условия. С этой целью, выбирая надлежащим образом r, добейтесь визуального совпадения графика $\{(\theta,u_r(r,\theta)),\theta\in(-2\pi,2\pi)\}$ с графиком $\{\chi(\theta),\theta\in(-2\pi..2\pi)\}$.

8.2. Найдите решение в другой форме, с помощью разложения граничной функции в ряд Фурье и разделения переменных. Полученные выражения должны быть равны тождественно. Проверьте это экспериментально. С этой целью анимируйте на общем фрейме графики этих решений как функций $\theta\in(-2\pi,2\pi)$, изменяя при этом $r\in(0.01..0.99)$ *от больших значений к меньшим*, и убедитесь в визуальном совпадении этих графиков.

Примечания.

1. Нужную информацию о рядах Фурье и их применении для решения уравнений математической физики можно найти во многих книжках из списка литературы по этому курсу, например, в лекциях Юдовича, или в моей книжке, которую я выложил в группе.

2. Формула Дини даёт решение и внешней, и внутренней задач Неймана в круге и в его внешности в виде интеграла

$$u(r,\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1+r^2-2r\cos(\sigma))f(\theta-\sigma)d\sigma$$

где f задана в граничном условии и обязательно 2π-периодична как функция угловой координаты точки окружности. При этом предполагается, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^2\pi f(\sigma)d\sigma=0,$$

так как в противном случае задача Неймана не имеет решения. Подробности см. в презенатции лекций и в кн. Лаврентьев, Шабат. Методы теории функций комплексного переменного.

3. *Maple* считает интегралы Дини быстрее, если разность стоит именно под знаком f. В частности, если f – характеристическая функция интервала $(0, h)$, $h < 2 * \pi$, то интеграл Дини рекомендую записать так

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta-h}^{\theta} \ln(1+r^2-2r\cos(\sigma))d\sigma.$$

4. Пусть χ – периодическая функция. Частичную сумму её ряда Фурье рекомендую брать симметричной по индексу суммирования, и записывать так

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\chi(s)ds + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\chi(s)\mathrm{e}^{-iks}ds\right)$$

Для вычислений лучше использовать не `sum`, а `add`.

5. Напоминаю: решение задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной. При этом интеграл Дини дает решение, равное нулю в центре круга. Следовательно, для сравнения надо выбрать ряд Фурье, представляющий решение с тем же свойством.

6. Если $f(s) = 0$ вне интервала $|s| < \rho$, то формулу Пуассона в случае полуплоскости можно записать так

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|s|<\rho}\frac{xf(s)\,ds}{x^2+(y-s)^2}.$$