Л. М. Зубов, М. И. Карякин

Элементы тензорного исчисления

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие отличается от многих других руководств по тензорному анализу тем, что ориентировано в основном на студентов университетов, специализирующихся в области механики сплошной среды. Книга написана в духе бескоординатного подхода к тензорному исчислению, наиболее соответствующего, по мнению авторов, потребностям современной механики континуума.

От читателя требуется знание основ линейной алгебры и теории матриц.

Кроме ряда традиционных вопросов тензорного анализа, значительное внимание уделено теории тензорных функций, симметрии тензоров и тензорных функций.

В бескоординатной форме изложен формализм тензорных полей, определенных на поверхности в трехмерном пространстве. Этот материал тесно связан с важным разделом механики деформируемого твердого тела – теорией оболочек.

Пособие снабжено набором упражнений, многие из которых являются оригинальными.

Содержание книги входит составной частью в курс механики сплошной среды, который авторы преподают в течение многих лет на механико-математическом факультете Ростовского госуниверситета.

§1. Евклидово векторное пространство. Основной и взаимный базис. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора.

Пусть $\mathcal{Э}_n$ – конечномерное линейное пространство размерности n. Элементы этого пространства, называемые векторами, будем обозначать, как правило, маленькими латинскими буквами и выделять полужирным курсивом:

$$\boldsymbol{a} \in \mathcal{Э}_n.$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением линейных прос транств только над полем вещественных чисел.

Определение. *Евклидовым векторным пространством* $\mathcal{Э}_n$ называется линейное пространство размерности n над полем вещественных чисел, в котором определена операция скалярного умножения элементов, обозначаемая точкой: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Скалярное умножение каждой паре векторов ставит в соответствие вещественное число и обладает следующими свойствами:

1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (коммутативность);
2) $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ (дистрибутивность);
   (α, β – числа)
3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$; (положительная определенность).
   $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = 0$

Отметим, что использование точки, как знака скалярного произведения, является обязательным.

Величина $\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ называется *длиной* вектора $\boldsymbol{a}$.

При $n = 3$ векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ... являются обычными геометрическими векторами.

Пусть $\mathcal{Э}_n$ – n-мерное евклидово пространство. Тогда в нем существует базис $\boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и любой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathcal{Э}_n$ можно единственным образом разложить по этому базису:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} a^k \boldsymbol{e}_k.$$

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться *правилом суммирования Эйнштейна*, согласно которому наличие в выражении одинаковых верхнего и нижнего индексов автоматически предполагает суммирование по повторяющемуся индексу, а знак суммирования $\sum$ опускается. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = a^k \boldsymbol{e}_k.$$

Индекс, по которому производится суммирование, называется *немым*. Ясно, что обозначение этого индекса совершенно несущественно :

$$\boldsymbol{a} = a^k \boldsymbol{e}_k = a^m \boldsymbol{e}_m = a^s \boldsymbol{e}_s \text{ и т.д.}$$

Индекс, не участвующий в суммировании, называется *свободным*:

$$a^k = b^k c^m d_m,$$

k – свободный индекс. Аналогично преобразуются выражения, содержащие двойное, тройное и т.д. суммирование:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} b^i c^j = A_{ij} b^i c^j = A_{ks} b^k c^s.$$

Введенный выше векторный базис $\boldsymbol{e}_k$ назовем *основным*. Наряду с ним рассмотрим базис $\boldsymbol{e}^m$, который связан с основным соотношениями

$$\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_k^m, \tag{1.1}$$

где δ_k^m – символ Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 0, & m \neq k; \\ 1, & m = k. \end{cases}$$

Соотношения (1.1) называются условиями биортогональности, а базис $\boldsymbol{e}^m$ – *взаимным* или *биортогональным* базисом.

Рассмотрим задачу определения взаимного базиса $\boldsymbol{e}^m$ по заданному основному. Для ее решения введем в рассмотрение матрицу $\|g_{ks}\|$:

$$g_{ks} = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_s$$

(величины g_{ks} называются метрическими коэффициентами). Эта матрица, очевидно, симметрична: $g_{ks} = g_{sk}$. Кроме того, она является положительно определенной. Действительно, выражение

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^k \boldsymbol{e}_k \cdot a^s \boldsymbol{e}_s = a^k a^s (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_s) = a^k a^s g_{ks}$$

строго больше нуля при ненулевых компонентах a^k в силу свойства (3) скалярного произведения. Из положительной определенности матрицы $\|g_{ks}\|$ следует (согласно критерию Сильвестра), что ее определитель больше нуля, а значит она имеет обратную.

Будем искать базис $\boldsymbol{e}^m$ в виде разложения каждого из его векторов по базису $\boldsymbol{e}_k$:

$$\boldsymbol{e}^m = g^{mk} \boldsymbol{e}_k. \tag{1.2}$$

Здесь g^{mk} – неизвестные пока коэффициенты разложения. Умножим обе части соотношения (1.2) скалярно на вектор $\boldsymbol{e}_s$:

$$\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}_s = g^{mk} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_s$$

или (с учетом условий (1.1))

$$\delta_s^m = g^{mk} g_{ks}.$$

Справа стоит элемент произведения двух матриц, а слева – элемент единичной матрицы. Поэтому матрица $\|g^{mk}\|$ является обратной к матрице $\|g_{ks}\|$ (и тоже положительно определенной). Следовательно, взаимный базис $\boldsymbol{e}^m$ всегда существует и определяется единственным образом (в силу единственности обратной матрицы).

Вычислим произведение $\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^s$:

$$\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^s = g^{mk}\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^s = g^{mk}\delta_k^s = g^{ms}.$$

Кроме того, очевидно, что векторы основного базиса выражаются через векторы взаимного соотношениями $\boldsymbol{e}_k = g_{km}\boldsymbol{e}^m$.

Таким образом, между векторами основного и взаимного базисов существует полная аналогия, и понятия эти в евклидовом пространстве взаимны.

Как известно, в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис – совокупность n попарно ортогональных единичных векторов. Векторы такого базиса мы будем обозначать $\boldsymbol{i}_s$:

$$\boldsymbol{i}_s \cdot \boldsymbol{i}_k = \delta_{sk}. \tag{1.3}$$

Видно, что базис, взаимный к ортонормированному, совпадает с ним самим.

Любой вектор $\boldsymbol{a}$ из $Э_n$ можно разложить как по основному, так и по взаимному базису:

$$\boldsymbol{a} = a^k\boldsymbol{e}_k = a_m\boldsymbol{e}^m.$$

Коэффициенты разложения по основному базису – a^k – называются *контравариантными* компонентами вектора $\boldsymbol{a}$; коэффициенты разложения по взаимному базису – a_m – называются *ковариантными* компонентами вектора $\boldsymbol{a}$.

Установим связь между ко- и контравариантными компонентами вектора. Очевидно, что

$$a^k = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}^k; \quad a_m = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_m.$$

Отсюда находим

$$a^k = a_m\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^k = g^{km}a_m. \tag{1.4}$$

Аналогично,

$$a_m = g_{mk}a^k. \tag{1.5}$$

Ясно, что, вообще говоря, $a^k \neq a_k$. В ортонормированном же базисе этой разницы нет, как нет разницы между векторами основного и взаимного базисов. В этом случае все индексы будем писать на одном (нижнем) уровне; при этом соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу сохраняется:

$$\boldsymbol{a} = a^s\boldsymbol{i}_s = a_s\boldsymbol{i}_s.$$

§2. Преобразование базиса.

Пусть $Э_n$ – евклидово векторное пространство. Наряду с базисом $\boldsymbol{e}_k$ рассмотрим в нем некоторый другой базис $\boldsymbol{e}_{m'}$ (из дальнейших формул будет видно, что штрих удобнее ставить у индекса, а не у вектора). Тогда любой вектор $\boldsymbol{a} \in Э_n$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = a^k \boldsymbol{e}_k = a^{m'} \boldsymbol{e}_{m'}.$$

Переход от базиса $\boldsymbol{e}_k$ к базису $\boldsymbol{e}_{m'}$ в линейном пространстве осуществляется, как известно, с помощью невырожденной матрицы, элементы которой обозначим через $A^k_{m'}$:

$$\boldsymbol{e}_{m'} = A^k_{m'} \boldsymbol{e}_k. \tag{2.1}$$

Обратный переход описывается с помощью матрицы, обратной к данной:

$$\boldsymbol{e}_k = A^{m'}_k \boldsymbol{e}_{m'}, \tag{2.2}$$

где $\|A^{m'}_k\| = \|A^k_{m'}\|^{-1}$, то есть

$$A^k_{m'} A^{m'}_s = \delta^k_s; \quad A^{m'}_k A^k_{s'} = \delta^{m'}_{s'}.$$

Рассмотрим теперь, как при изменении основного базиса преобразуются векторы взаимного. Пусть

$$\boldsymbol{e}^m = B^m_{k'} \boldsymbol{e}^{k'}; \quad \boldsymbol{e}^{m'} = B^{m'}_k \boldsymbol{e}^k;$$

$$\|B^m_{k'}\| = \|B^{m'}_k\|^{-1}.$$

Выразим $B^{m'}_k$ через $A^k_{m'}$. Для этого подставим выражение для $\boldsymbol{e}^{m'}$ в соотношение

$$\boldsymbol{e}^{m'} \cdot \boldsymbol{e}_{s'} = \delta^{m'}_{s'}.$$

В результате получим

$$\delta^{m'}_{s'} = B^{m'}_k \boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_{s'} = B^{m'}_k \boldsymbol{e}^k \cdot A^m_{s'} \boldsymbol{e}_m = B^{m'}_k A^m_{s'} \delta^k_m = B^{m'}_k A^k_{s'}.$$

Отсюда следует, что матрицы $B^{m'}_k$ и $A^k_{m'}$ являются обратными, то есть

$$B^{m'}_k = A^{m'}_k.$$

Таким образом, все четыре преобразования базисных векторов описываются двумя матрицами (точнее, одной – и обратной к ней):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{m'} &= A^s_{m'} \boldsymbol{e}_s; \quad \boldsymbol{e}^{m'} = A^{m'}_s \boldsymbol{e}^s; \\ \boldsymbol{e}_s &= A^{m'}_s \boldsymbol{e}_{m'}; \quad \boldsymbol{e}^s = A^s_{m'} \boldsymbol{e}^{m'}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Теперь мы можем получить формулы преобразования компонент вектора при изменении базиса. При использовании контравариантных компонент выражение для вектора $\boldsymbol{a}$ имеет вид

$$\boldsymbol{a} = a^s \boldsymbol{e}_s = a^s A^{m'}_s \boldsymbol{e}_{m'} = a^{m'} \boldsymbol{e}_{m'},$$

откуда

$$a^{m'} = a^s A^{m'}_s. \tag{2.4}$$

При использовании ковариантных компонент вектор $\boldsymbol{a}$ записывается как

$$\boldsymbol{a} = a_k \boldsymbol{e}^k = a_k A^k_m \boldsymbol{e}^{m'} = a_{m'} \boldsymbol{e}^{m'},$$

откуда

$$a_{m'} = a_k A^k_{m'}. \tag{2.5}$$

Полученные формулы преобразования компонент вектора объясняют терминологию – ковариантные компоненты меняются при помощи той же матрицы, что и векторы основного базиса, контравариантные компоненты – при помощи матрицы, обратной к ней.

Упражнения.

1. Расшифровать следующие выражения: а) A_{ii}; б) T_{ij}; в) $a_i R_{ij}$; г) $a_i b_j S_{ij}$.

2. а) Даны матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{mn}\|$. Написать выражение для элемента c_{ks} матрицы $C = AB$.
   б) Записать в индексных обозначениях условие того, что матрица B является обратной матрице A, т.е. $BA = AB = E$, где E – единичная матрица.

3. Преобразовать (в трехмерном пространстве) следующие выражения:

а) $\mathrm{a_j}\delta_{\mathrm{ij}}$;	г) $\delta_{\mathrm{ij}}\mathrm{A_{ik}}$;
б) $\mathrm{a_i a_j}\delta_{\mathrm{ij}}$;	д) $\delta_{\mathrm{ij}}\delta_{\mathrm{jk}}$;
в) δ_{ii};	е) $\delta_{\mathrm{ij}}\delta_{\mathrm{jk}}\delta_{\mathrm{ki}}$.

4. Выписать всевозможные выражения для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через компоненты этих векторов.

5. Выписать всевозможные выражения для длины вектора $\boldsymbol{a}$ через компоненты этого вектора.

6. Доказать, что $a^k = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}^k$; $a_m = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_m$.

7. Эквивалентны ли соотношения 1 и 2:
   а) 1. $A^m_n b^n \boldsymbol{e}_m = c^m \boldsymbol{e}_m$
      2. $A^m_n b^n = c^m$
   б) 1. $c_k = A^m_k b_m$
      2. $c_j = A^n_j b_n$
   в) 1. $a^m b_m = 0$
      2. $a^m = 0$ или $b_m = 0$

В пространстве геометрических векторов $\mathcal{Э}_3$ кроме скалярного умножения существует еще одна операция – векторное произведение. Для решения следующих упражнений необходимо вспомнить некоторые элементарные свойства этой операции и связанных с ней действий и, кроме того, вывести формулу для записи векторного произведения в компонентах.

Прежде всего, векторное произведение – это вектор

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \in Э_3.$$

Изменение порядка векторов приводит к изменению знака векторного произведения:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}.$$

С использованием векторного произведения строятся такие операции как смешанное произведение

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}$$

и двойное векторное произведение:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}). \tag{2.6}$$

Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in Э_3$. Ограничиваясь случаем ортонормированного базиса, получим формулу компонентной записи векторного произведения этих векторов.

Пусть $\boldsymbol{i}_s$ – ортонормированный базис;

$$\boldsymbol{a} = a_m \boldsymbol{i}_m; \quad \boldsymbol{b} = b_k \boldsymbol{i}_k.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_m b_k \boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_k = a_m b_k \boldsymbol{d}_{mk}.$$

Для нахождения компонент неизвестного вектора $\boldsymbol{d}_{mk}$ составим их выражения через скалярные произведения

$$\boldsymbol{d}_{mk} \cdot \boldsymbol{i}_s = (\boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_k) \cdot \boldsymbol{i}_s \overset{\text{def}}{=} d_{mks}. \tag{2.7}$$

Полученные величины d_{mks} называются символами Леви-Чивита. Согласно свойствам смешанного произведения (тройка $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ считается правой) имеем

$$d_{123} = d_{231} = d_{312} = 1; \quad d_{213} = d_{321} = d_{132} = -1;$$

остальные компоненты равны нулю.

Таким образом, искомая формула для векторного произведения имеет вид:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_m b_k d_{mks} \boldsymbol{i}_s. \tag{2.6}$$

Что касается свойств символов Леви-Чивита, то очевидна их антисимметрия по любой паре индексов (перестановка двух индексов приводит к изменению знака) и независимость от круговой перестановки индексов.

Еще одно свойство, необходимое для решения упражнений, сформулируем без доказательства (вывод его будет дан ниже в п. 10):

$$d_{ijk} d_{mns} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{is} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{js} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{ks} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

8. Исходя из соотношения
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$
преобразовать:
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}.$$

9. Используя соотношение (2.9), преобразовать:
   а) $d_{ijk}d_{mnk}$;
   б) $d_{ijk}d_{mjk}$;
   в) $d_{ijk}d_{ijk}$.

10. Верны ли соотношения:
   а) $A_{ij}A_{ij}=A_{ij}^2$;
   б) $A_{ij}B_j=A_{ji}B_i$;
   в) $\delta_{jk}^2=\delta_{jk}$;
   г) $d_{mnk}d_{ijk}=d_{ijk}d_{mnk}$.

11. Вычислить:
   а) $d_{ijk}\delta_{jk}$;
   б) $d_{ijk}d_{mkj}\delta_{mi}$;
   в) $d_{ijk}\delta_{mk}\delta_{jm}$;
   г) $a_ia_jd_{ijk}$;
   д) $d_{ijk}|d_{ijk}|$.

12. Проверить формулу (2.9) для $d_{ijk}d_{mns}$.

13. Записать выражение $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ в индексном виде.

14. Доказать:
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

15. Преобразовать с использованием символов Леви- Чивита
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}.$$

16. С использованием символов Леви-Чивита доказать, что
   а) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$;
   б) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$.

17. Доказать эквивалентность формул, а затем доказать одну из них:
   1) $d_{ijk}a_{im}a_{jn}a_{ks}=d_{mns}\det A$;
   2) $\det A=\dfrac{1}{6}d_{ijk}d_{mns}a_{im}a_{jn}a_{ks}$; где $A=\|a_{ks}\|$.

18. Преобразовать:
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}).$$

19. Доказать:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

§3. Тензорное произведение двух евклидовых пространств

Рассмотрим два векторных евклидовых пространства $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_m$ размерности n и m соответственно. Элементы пространства $\mathcal{E}_n$ будем обозначать $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, ... , а элементы пространства $\mathcal{E}_m$ – $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, ...

Рассмотрим теперь множество упорядоченных пар элементов из разных пространств (т.е. декартово произведение $\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_m$), записывая эти пары в виде $\boldsymbol{ap}$, $\boldsymbol{aq}$, $\boldsymbol{br}$ и т.д. Образуем из этих пар всевозможные формальные суммы вида

$$\boldsymbol{ap} + \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{cr},$$

считая при этом, что порядок "слагаемых" в таких суммах значения не имеет. В полученном таким образом множестве формальных сумм отождествим следующие величины:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{ap}+\boldsymbol{bp};\\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{ap}+\boldsymbol{aq};\\ (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{p}).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Кроме того, будем считать равными две формальные суммы, если с помощью выписанных операций их можно привести к одному виду. Этим самым на множестве формальных сумм введено отношение эквивалентности.

Теперь введем в этом множестве линейные операции – сложение и умножение на число.

1. *Сложение.*

Суммой формальных сумм $S_1 = \boldsymbol{ap}+\boldsymbol{bq}$ и $S_2 = \boldsymbol{cr}+\boldsymbol{dt}$ назовем формальную сумму вида $\boldsymbol{ap}+\boldsymbol{bq}+\boldsymbol{cr}+\boldsymbol{dt}$.

При этом можно приводить подобные члены, пользуясь равенствами (3.1). Например, если $S_1 = \boldsymbol{ap}$, а $S_2 = \boldsymbol{at}$, то $S_1 + S_2 = \boldsymbol{at}+\boldsymbol{ap} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{p})$.

2. *Умножение на число.*

Результатом умножения формальной суммы $S = \boldsymbol{ap}+\boldsymbol{bq}$ на число λ является формальная сумма вида $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{p} + (\lambda\boldsymbol{b})q$ (или, что эквивалентно, $\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{b}(\lambda\boldsymbol{q})$).

Нулевым элементом будем называть формальную сумму, которая может быть приведена к виду $\mathbf{o}_1\mathbf{o}_2$ (где $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$ – нулевые векторы пространств $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_m$ соответственно).

Можно показать, что множество всех формальных сумм с введенными операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство (см упр.20). Это линейное пространство называется *тензорным произведением* двух линейных пространств и обозначается $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_m$.

Элемент тензорного произведения двух пространств вида $\boldsymbol{ap}$ называется тензорным (или *диадным*) произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{p}$ (или просто *диадой*).

Тензорное произведение векторов обладает обычными свойствами относительно сложения и умножения на число:

$$
\begin{aligned}
(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b})\boldsymbol{p} = \alpha(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}) + \beta(\boldsymbol{b}\boldsymbol{p}),\\
\boldsymbol{a}(\alpha \boldsymbol{p} + \beta \boldsymbol{q}) = \alpha(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}) + \beta(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q}),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

но некоммутативно: $\boldsymbol{ap} \neq \boldsymbol{pa}$, даже если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{p}$ принадлежат одному векторному пространству.

Кроме того, легко проверить (см упр.21), что $\mathbf{o}_1\boldsymbol{p} = 0$, $\boldsymbol{a}\mathbf{o}_2 = 0$, где $0 = \mathbf{o}_1\mathbf{o}_2$ – нулевой элемент линейного пространства.

Введем в $Э_n \otimes Э_m$ операцию скалярного умножения, обозначая ее точкой в кружочке $\odot$. По определению будем считать, что скалярное умножение удовлетворяет свойству дистрибутивности. Начнем с диад:

$$
(\boldsymbol{ap}) \odot (\boldsymbol{bq}) \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}). \tag{3.2}
$$

Проверим свойства скалярного произведения.

1. Коммутативность:

$$
(\boldsymbol{bq}) \odot (\boldsymbol{ap}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{ap}) \odot (\boldsymbol{bq}).
$$

2. Дистрибутивность

$$
(\alpha(\boldsymbol{ap}) + \beta(\boldsymbol{bq})) \odot (\boldsymbol{cr}) = \alpha(\boldsymbol{ap}) \odot (\boldsymbol{cr}) + \beta(\boldsymbol{bq}) \odot (\boldsymbol{cr})
$$

следует из определения.

3. Положительная определенность:

$$
(\boldsymbol{ap}) \odot (\boldsymbol{ap}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}) \geq 0.
$$

Это выражение обращается в ноль, лишь когда один из векторов диады обращается в ноль, но тогда, как отмечалось выше, диада совпадает с нулевым элементом линейного пространства.

В силу оговоренного заранее свойства дистрибутивности скалярное умножение сумм осуществляется по обычному правилу перемножения многочленов ("скобка на скобку"):

$$
(\boldsymbol{ap} + \boldsymbol{bq}) \odot (\boldsymbol{cr} + \boldsymbol{dt}) = \boldsymbol{ap} \odot \boldsymbol{cr} + \boldsymbol{bq} \odot \boldsymbol{cr} + \boldsymbol{ap} \odot \boldsymbol{dt} + \boldsymbol{bq} \odot \boldsymbol{dt}.
$$

Таким образом, тензорное произведение евклидовых пространств $Э_n \otimes Э_m$ является евклидовым пространством над полем вещественных чисел.

§4. Размерность и базис тензорного произведения двух евклидовых пространств.

В п.3 показано, что тензорное произведение двух евклидовых пространств $Э_n \otimes Э_m$ само является евклидовым пространством. Рассмотрим вопрос о том, какова его размерность, и что представляет собой его базис.

Пусть $\boldsymbol{i}_k$, $k = 1, 2, ..., \mathrm{n}$ и $\boldsymbol{j}_s$, $s = 1, 2, ..., \mathrm{m}$ – ортонормированные базисы в пространствах $Э_n$ и $Э_m$ соответственно.

Рассмотрим произвольную диаду $\boldsymbol{ap} \in Э_n \otimes Э_m$. Представляя векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{p}$ в виде их разложения по соответствующим ортонормированным базисам и используя свойства тензорного произведения (3.2), получим:

$$\boldsymbol{ap} = a_k \boldsymbol{i}_k p_s \boldsymbol{j}_s = a_k p_s \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s. \tag{4.1}$$

Таким образом, любая диада (а значит, и любая формальная сумма, т.е. любой элемент $Э_n \otimes Э_m$) может быть представлена в виде линейной комбинации диад вида $\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s$. Количество таких диад – $n\,m$, следовательно,

$$\dim(Э_n \otimes Э_m) \leq n\,m.$$

Докажем теперь линейную независимость диад вида $\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s$. Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$(\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s) \odot (\boldsymbol{i}_p \boldsymbol{j}_q) = (\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_p)(\boldsymbol{j}_s \cdot \boldsymbol{j}_q) = \delta_{kp}\delta_{sq}.$$

Полученное выражение не равно нулю, только если $s = p$, а $k = q$, то есть лишь при перемножении двух одинаковых элементов (в этом случае результат умножения – единица). Следовательно, элементы вида $\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s$ образуют ортонормированную систему в $Э_n \otimes Э_m$, а значит, они линейно независимы. Отсюда сразу следует, что $\dim(Э_n \otimes Э_m) \geq n\,m$, а с учетом предыдущего результата

$$\dim(Э_n \otimes Э_m) = n\,m.$$

Набор диад вида $\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s$ образует ортонормированный базис в $Э_n \otimes Э_m$.

Пусть теперь $\boldsymbol{e}^p$ и $\boldsymbol{f}^t$ – произвольные базисы в $Э_n$ и $Э_m$ соответственно. Тогда каждый из векторов ортонормированных базисов $\boldsymbol{i}_k$ и $\boldsymbol{j}_s$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{i}_k = D_{kp}\boldsymbol{e}^p, \quad \boldsymbol{j}_s = C_{st}\boldsymbol{f}^t,$$

а диада $\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s$ разлагается по диадам $\boldsymbol{e}^p \boldsymbol{f}^t$:

$$\boldsymbol{i}_k \boldsymbol{j}_s = D_{kp} C_{st} \boldsymbol{e}^p \boldsymbol{f}^t.$$

Из этого разложения следует, что в качестве базиса в пространстве $Э_n \otimes Э_m$ можно брать диады вида $\boldsymbol{e}^p \boldsymbol{f}^t$ или $\boldsymbol{e}_p \boldsymbol{f}_t$, или $\boldsymbol{e}_p \boldsymbol{f}^t$, или $\boldsymbol{e}^p \boldsymbol{f}_t$ (через них выражается любой элемент пространства $Э_n \otimes Э_m$, их число $n\,m$, размерность пространства $n\,m$ – значит, это базис).

§5. Тензорное произведение трех и более евклидовых пространств.

Рассмотрим три евклидовых пространства $Э_n$, $Э_m$, $Э_k$. Векторы этих пространств будем обозначать $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, ... и $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$,... соответственно. Как и в случае двух пространств, рассмотрим множество упорядоченных троек вида $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1$, и т.д., а затем формальные суммы вида $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_{10}\boldsymbol{c}_4$ и т.п.

Отождествим во множестве формальных сумм величины

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1;\\
\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1;\\
\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_2;\\
(\lambda\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1(\lambda\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1(\lambda\boldsymbol{c}_1).
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

Линейные операции вводятся аналогично случаю двух пространств. Получившееся в результате пространство называется тензорным произведением евклидовых пространств $\mathcal{Э}_n$, $\mathcal{Э}_m$ и $\mathcal{Э}_k$ и обозначается $\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m \otimes \mathcal{Э}_k$.

Возникает естественный вопрос: можно ли было сначала построить пространство $\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m$, а затем найти тензорное произведение полученного пространства и пространства $\mathcal{Э}_n$: $(\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m) \otimes \mathcal{Э}_k$. Оказывается, можно показать, что полученное таким образом линейное пространство (а также пространство $\mathcal{Э}_n \otimes (\mathcal{Э}_m \otimes \mathcal{Э}_k)$) будет изоморфно пространству $\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m \otimes \mathcal{Э}_k$. Таким образом, порядок выполнения операций тензорного произведения не существенен. Отсюда следует свойство ассоциативности вида:

$$
(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}. \tag{5.2}
$$

Скалярное произведение в $\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m \otimes \mathcal{Э}_k$ вводится аналогично случаю двух пространств:

$$
(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{c}_1) \odot (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{c}_2). \tag{5.3}
$$

Размерность пространства $\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m \otimes \mathcal{Э}_k$ равна $n\,m\,k$.

Базисом в $\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_m \otimes \mathcal{Э}_k$ будет система элементов вида $\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{f}_s\boldsymbol{h}_t$, где $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{f}_s$, $\boldsymbol{h}_t$ – базисы в $\mathcal{Э}_n$, $\mathcal{Э}_m$, $\mathcal{Э}_k$ соответственно.

Тензорное произведение большего числа евклидовых пространств строится аналогичным образом.

§6. Евклидовы тензоры. Преобразование компонент тензора при изменении базиса.

Рассмотрим евклидово пространство, являющееся тензорным произведением p идентичных евклидовых пространств $\mathcal{Э}_n$. Обозначим это пространство через $\mathcal{T}_p$:

$$
\mathcal{T}_p = \underbrace{\mathcal{Э}_n \otimes \mathcal{Э}_n \otimes \ldots \otimes \mathcal{Э}_n}_{p}. \tag{6.1}
$$

Определение. *Евклидовым тензором ранга p* называется элемент евклидова пространства, полученного тензорным умножением p идентичных евклидовых пространств.

Тензоры любого ранга будем обозначать, как правило, большими латинскими буквами и выделять жирным шрифтом: $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_p$ ($\mathbf{X}$ – тензор ранга p).

Используя введенную терминологию, вектор можно называть тензором первого ранга. Иногда бывает удобным считать числа тензорами нулевого ранга (основанием для этого, кроме простой индукции, является тот факт, что $\mathrm{R}\otimes\mathrm{R}=\mathrm{R}$, $\mathrm{R}\otimes Э_n = Э_n$, где R – множество вещественных чисел, являющееся одномерным евклидовым пространством).

Базис пространства тензоров ранга p, образованный как совокупность тензорных произведений векторов из основного базиса в евклидовом векторном пространстве и взаимного к нему, называется *простым* (или *простым полибазисом*).

Если же в совокупности тензорных произведений участвуют векторы из различных базисов векторного пространства, то такой базис называется *сложным* .

В частности, для тензоров второго ранга существует четыре типа простых базисов:

$$\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_k;\quad \boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}^k;\quad \boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}_k;\quad \boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}^k.$$

Пусть $\mathbf{T}$ – тензор второго ранга. Тогда его можно представить в виде следующих линейных комбинаций:

$$\mathbf{T} = t^{sk}\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_k = t_{sk}\boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}^k = t^{s}_{.k}\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}^k = t^{\cdot s}_{k}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_s. \tag{6.2}$$

Коэффициенты этих линейных комбинаций называются компонентами тензора:
t_{sk} – *ковариантные* компоненты;
t^{sk} – *контравариантные* компоненты;
$t^{\cdot s}_{k}$, $t^{s}_{.k}$ – *смешанные* компоненты.

Аналогично определяются компоненты евклидовых тензоров любого ранга. Например, для тензора третьего ранга $\mathbf{X}$ справедливы представления

$$\mathbf{X} = X^{mnt}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_t = X_{mnt}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n\boldsymbol{e}^t = X^{n}_{m.t}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}^t \quad \text{и т. д .}$$

Различные компоненты тензора в простом базисе на основании (1.2) выражаются друг через друга с помощью метрических коэффициентов. Например,

$$\mathbf{X} = X^{mnt}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_t = X_{ksp}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}^p = X_{ksp}g^{km}\boldsymbol{e}_m g^{sn}\boldsymbol{e}_n g^{pt}\boldsymbol{e}_t.$$

Отсюда получаем

$$X^{mnt} = X_{ksp}g^{km}g^{sn}g^{pt}.$$

Матрицу $\|g^{km}\|$, в связи с этим, называют *оператором поднятия индекса.* Опускание индекса производится с помощью обратной матрицы:

$$X_{mnt} = X^{ksp}g_{km}g_{sn}g_{pt}.$$

Не следует отождествлять тензор с его компонентами. Тензор есть инвариантный объект, не связанный с выбором базиса, в то время как его компоненты зависят от выбора базиса.

Для выяснения характера этой зависимости, как и в п.2, рассмотрим два векторных базиса $\boldsymbol{e}_k$ и $\boldsymbol{e}_{m'}$, связанных между собой матрицей $A^k_{m'}$ и обратной к ней:

$$\boldsymbol{e}_{m'} = A^k_{m'}\boldsymbol{e}_k;\quad \boldsymbol{e}_k = A^{m'}_k\boldsymbol{e}_{m'}.$$

Пусть $\mathbf{X}$ – тензор произвольного ранга. Тогда

$$\mathbf{X} = X^{ks\dots t}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_s\dots\boldsymbol{e}_t, \text{ или } \mathbf{X} = X^{k's'\dots t'}\boldsymbol{e}_{k'}\boldsymbol{e}_{s'}\dots\boldsymbol{e}_{t'}.$$

Выражая во втором равенстве векторы $\boldsymbol{e}_{k'}$, $\boldsymbol{e}_{s'}$ и т.д. через векторы $\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{e}_s$, ..., получим

$$\mathbf{X} = X^{k's'\dots t'}A^k_{k'}\boldsymbol{e}_k A^s_{s'}\boldsymbol{e}_s\dots A^t_{t'}\boldsymbol{e}_t = X^{k's'\dots t'}A^k_{k'}A^s_{s'}\dots A^t_{t'}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_t.$$

Отсюда находим

$$X^{ks\dots t} = X^{k's'\dots t'}A^k_{k'}A^s_{s'}\dots A^t_{t'}. \tag{6.3}$$

Аналогично выводятся формулы преобразования Ковариантных и смешанных компонент тензора.

§7. Действия с тензорами.

1) *Линейные операции.*

Так как $\mathcal{T}_p$ – пространство тензоров ранга p – является линейным пространством, то в нем определены действия сложения и умножения на число:

$$\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y} = (\alpha X^{mn\dots k} + \beta Y^{mn\dots k})\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\dots\boldsymbol{e}_k. \tag{7.1}$$

Если тензоры представлены своими компонентами в одном и том же базисе, то линейной комбинации тензоров соответствует та же линейная комбинация их компонент.

2) *Тензорное умножение.*

В отличие от линейных операций, это действие совершается с произвольными тензорами, не обязательно имеющими одинаковый ранг.

Если $\mathbf{X}$ – тензор ранга p, а $\mathbf{Y}$ – тензор ранга q, то результатом будет тензор ранга $p+q$, обозначаемый $\mathbf{XY}$:

$$\mathbf{X} \in \mathcal{T}_p; \;\; \mathbf{X} = X^{m\dots s}\boldsymbol{e}_m\dots\boldsymbol{e}_s;$$

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{T}_p; \;\; \mathbf{Y} = Y^{k\dots r}\boldsymbol{e}_k\dots\boldsymbol{e}_r;$$

$$\mathbf{XY} \in \mathcal{T}_{p+q}; \;\; \mathbf{XY} = X^{m\dots s}Y^{k\dots r}\boldsymbol{e}_m\dots\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_k\dots\boldsymbol{e}_r. \tag{7.2}$$

Тензорное произведение произвольного числа тензоров обладает свойством ассоциативности.

Для того чтобы перейти к другим действиям с тензорами, нам понадобится следующее

Определение. Тензоры, представимые в виде $\boldsymbol{abc}\dots\boldsymbol{h}$, называются *разложимыми.*

Не каждый тензор является разложимым (см. упр.22), но любой тензор может быть представлен в виде линейной комбинации разложимых.

3) *Перестановка* (i, j).

Перестановкой $\mathrm{T}(i,j)$ называется линейная функция, действующая из $\mathcal{T}_p$ в $\mathcal{T}_p$ (т.е. не меняющая ранг тензора) и состоящая для разложимых тензоров во взаимной перестановке векторов, стоящих на i-м и j-м местах:

$$(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_i\ldots\boldsymbol{a}_j\ldots\boldsymbol{a}_p)^{\mathrm{T}(i,j)} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\ldots\boldsymbol{a}_j\ldots\boldsymbol{a}_i\ldots\boldsymbol{a}_p. \tag{7.3}$$

Например, $(\boldsymbol{abcd})^{\mathrm{T}(1,4)} = \boldsymbol{dbca}$.

На произвольные тензоры операция перестановки распространяется по линейности, например:

$$\mathbf{X} \in \mathcal{T}_3;$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}(1,2)} = (X^{mnt}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_t)^{\mathrm{T}(1,2)} = X^{mnt}(\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_t)^{\mathrm{T}(1,2)} = X^{mnt}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_t.$$

Для тензоров второго ранга возможна только одна перестановка – $\mathrm{T}(1{,}2)$, обозначаемая просто буквой T:

$$(\boldsymbol{ab})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{ba}.$$

Для произвольного тензора второго ранга $\mathbf{X}$ имеем:

$$\mathbf{X} = X^{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n;$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (X^{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)^{\mathrm{T}} = X^{mn}\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_m = \left\| \begin{array}{c} \text{меняем немой индекс} \\ m \text{ на } n, \text{ а немой} \\ \text{индекс } n \text{ – на } m \end{array} \right\| = X^{nm}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n.$$

Из полученного соотношения для $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ видно, что матрица компонент тензора $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ в простом базисе является транспонированной матрицей компонент тензора $\mathbf{X}$ в том же базисе. Именно поэтому операция перестановки тензоров второго ранга называется еще *транспонированием.*

4) *Свертывание* (i,j).

Свертыванием $\mathrm{tr}_{(i,j)}$ называется линейная функция, действующая из $\mathcal{T}_p$ в $\mathcal{T}_{p-2}$ (понижающая ранг тензора на 2) и состоящая для разложимых тензоров в скалярном перемножении вектора, занимающего i-е место, на вектор, занимающий j-е место:

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}_{(i,j)}(\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_{i+1}\ldots\boldsymbol{a}_{j-1}\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_{j+1}\ldots\boldsymbol{a}_p) = \\ &= (\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j)\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}\ldots\boldsymbol{a}_{j-1}\boldsymbol{a}_{j+1}\ldots\boldsymbol{a}_p. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Например, $\mathrm{tr}_{(1,3)}(\boldsymbol{abcd}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{bd}$.

На произвольные тензоры операция свертывания переносится по линейности, например:

$$\mathbf{X} \in \mathcal{T}_3;$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{(1,3)}\mathbf{X} = \mathrm{tr}_{(1,3)}(\mathbf{X}^{mnk}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_k) = X^{mnk}\,\mathrm{tr}_{(1,3)}(\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_k) = \\ = X^{mnk}(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_n = X^{mnk}g_{mk}\boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

Для тензоров второго ранга возможно только одно свертывание – $\mathrm{tr}_{(1,2)}$, обозначаемое просто tr:

$$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

Скаляр $\mathrm{tr}\,\mathbf{X}$ называется следом тензора второго ранга $\mathbf{X}$.

Если тензор записан в смешанных компонентах, то

$$\operatorname{tr}\mathbf{X} = X^m_{.k}\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}^k = X^m_{.k}\delta^k_m = X^1_{.1} + X^2_{.2} + \ldots + X^n_{.n}$$

(n – размерность пространства $\mathcal{E}_n$). Таким образом, след тензора второго ранга совпадает со следом матрицы его смешанных компонент.

Для матриц ко- или контравариантных компонент предыдущее утверждение, вообще говоря, не верно:

$$\operatorname{tr}(X_{mk}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^k) = X_{mk}g^{mk} \neq X_{11} + X_{22} + \ldots + X_{nn}.$$

5) *Простое умножение.*

Простым умножением тензора $\mathbf{X}$ ранга p на тензор $\mathbf{Y}$ ранга q называется операция, состоящая в свертывании $(p, p+1)$ тензорного произведения $\mathbf{XY}$ и обозначаемая $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \operatorname{tr}_{(p,p+1)}(\mathbf{XY}). \tag{7.5}$$

Другими словами, простое умножение сводится к скалярному перемножению последних векторов в разложении тензора $\mathbf{X}$ на первые векторы в разложении тензора $\mathbf{Y}$. Для разложимых тензоров:

$$(\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}\boldsymbol{a}_p)\cdot(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\ldots\boldsymbol{b}_q) = (\boldsymbol{a}_p\cdot\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}\boldsymbol{b}_2\ldots\boldsymbol{b}_q.$$

Для произвольных тензоров:

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = X^{i\ldots mk}\boldsymbol{e}_i\ldots\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_k\cdot Y_{st\ldots r}\boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}^t\ldots\boldsymbol{e}^r =$$

$$= X^{i\ldots mk}Y_{st\ldots r}\delta^s_k\boldsymbol{e}_i\ldots\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}^t\ldots\boldsymbol{e}^n = X^{i\ldots mk}Y_{kt\ldots r}\boldsymbol{e}_i\ldots\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}^t\ldots\boldsymbol{e}^n.$$

В результате простого умножения тензора ранга p на тензор ранга q получается тензор ранга $p+q-2$. В частности, результатом простого умножения двух тензоров второго ранга будет тензор второго ранга.

6) *Косое умножение.*

Это действие имеет смысл только для тензоров, построенных на основе трехмерного векторного пространства $\mathcal{E}_3$. Как уже упоминалось, в $\mathcal{E}_3$ определено векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Пусть $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_p$, $\mathbf{Y}\in\mathcal{T}_q$. Операция *косого умножения*, обозначаемая $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, приводит к тензору ранга $p+q-1$ и состоит в векторном перемножении последних векторов в разложении тензора $\mathbf{X}$ на первые векторы в разложении тензора $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X}\times\mathbf{Y} = X^{ij\ldots m}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\ldots\boldsymbol{e}_m\times Y_{kl\ldots s}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l\ldots\boldsymbol{e}^s =$$

$$= X^{ij\ldots m}Y_{kl\ldots s}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\ldots(\boldsymbol{e}_m\times\boldsymbol{e}^k)\boldsymbol{e}^l\ldots\boldsymbol{e}^s. \tag{7.6}$$

Очевидно, что в случае двух векторов операция косого умножения совпадает с векторным умножением.

Для тензоров второго ранга с использованием векторного умножения строится еще одна операция – *векторный инвариант*. Это унарная (т.е. имеющая один аргумент) операция, применительно к тензору $\mathbf{T}$ обозначаемая как $\mathbf{T}_\times$, определяется для разложимых тензоров следующим образом

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})_\times = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

и распространяется на произвольные тензоры по линейности:

$$(X^{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)_\times = X^{mn}\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{e}_n$$

7) *Полное умножение.*

Пусть $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_p$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{T}_q$, причем $p \geq q$.

Операцию *полного умножения*, обозначаемую $\mathbf{X} \odot \mathbf{Y}$, определим сначала для разложимых тензоров следующим образом: при полном умножении (разложимого) тензора $\mathbf{X}$ на тензор $\mathbf{Y}$ производится скалярное умножение последнего вектора в разложении тензора $\mathbf{X}$ на последний вектор в разложении тензора $\mathbf{Y}$, затем скалярное умножение предпоследних векторов в разложениях этих тензоров и т.д., пока не будут исчерпаны все векторы в разложении тензора $\mathbf{Y}$:

$$(\boldsymbol{abcd}) \odot (\boldsymbol{uvw}) = (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{a}. \tag{7.7}$$

Для произвольных тензоров полное умножение производится по правилу "многочлен на многочлен". Результатом полного умножения тензора ранга p на тензор ранга q является тензор ранга $p - q$.

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – тензоры одинакового ранга, то полное умножение $\mathbf{X} \odot \mathbf{Y}$ совпадает с введенным ранее скалярным произведением в пространстве $\mathcal{T}_p$.

Упражнения.

20. Проверить, что описанное в пункте 3 множество формальных сумм с введенными операциями сложения и умножения на число является линейным пространством.

21. Доказать, что $\boldsymbol{a}\mathbf{o}_2 = \mathbf{o}_1\boldsymbol{p} = \mathbf{o}_1\mathbf{o}_2$.

22. Привести пример тензора, не являющегося разложимым.

23. Дано $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3$; $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2$;
    $\mathbf{X} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + 4\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 - 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2$;
    $\mathbf{Y} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2$.

    Вычислить:
    а) $\mathbf{P} = \boldsymbol{ab} + \mathbf{X} - 3(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{Y} + \operatorname{tr}[\operatorname{tr}_{(2,3)}(\mathbf{XY})]\boldsymbol{bb}$;
    б) $\mathbf{P} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{X}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{b}$;
    в) $\mathbf{P} = \boldsymbol{a} \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) + (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cdot \boldsymbol{b}$.

24. Записать в индексном виде (предварительно определив ранг входящих в выражение тензоров):
    а) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{a})$;
    б) $\operatorname{tr}[(\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{b}) \cdot \mathbf{B}]$.

25. Доказать соотношения:

а) $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$;

б) $\operatorname{tr}\mathbf{X} = \operatorname{tr}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$;

в) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}$;

г) $\operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = \operatorname{tr}(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}})$;

д) $\mathbf{X}\odot\boldsymbol{a} = \mathbf{X}\cdot\boldsymbol{a}$;

е) $\mathbf{X}\odot\mathbf{Y} = \operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}),\ \ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}\in\mathcal{T}_2$;

ж) $\mathbf{P}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$;

з) $\operatorname{tr}(\mathbf{P}\times\boldsymbol{a}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P})$;

и) $\operatorname{tr}[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P})] = \boldsymbol{b}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\operatorname{tr}\mathbf{P}$.

26. Упростить выражение $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P}\times\boldsymbol{b})$; $\quad \mathbf{P}\in\mathcal{T}_2$.

27. Решить уравнение:

а) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha\mathbf{X} = \beta\mathbf{C}$;

б) $\mathbf{X} + \alpha(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{B} = \mathbf{A}$;

в) $2\mathbf{X} + (\mathbf{A}\odot\mathbf{X})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\odot\mathbf{X})\mathbf{A} = \mathbf{C}$, где $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X}\in\mathcal{T}_p$

г) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} + \alpha(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{B} = \mathbf{A}$;

д) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \operatorname{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{X})\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{X} = \mathbf{C}$.

28. При каких условиях уравнение

$$\alpha\mathbf{X} + (\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{A} = 0$$

имеет ненулевые решения? Найти эти решения.

29. Дано

$$\mathbf{A} = 2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2;$$
$$\mathbf{B} = 3\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 5\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2.$$

Вычислить а) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\odot\mathbf{B}$;

б) $(\mathbf{B}\times\mathbf{A})\odot\mathbf{B}$.

30. Доказать, что для любых тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\odot\mathbf{B} = 0.$$

31. Доказать тождество

$$(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P})_{\times} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{tr}\mathbf{P}$$

.

§8. Теорема о линейной тензорной функции.

Рассмотрим произвольный тензор $\mathbf{L}$ ранга $p+q$: $\mathbf{L}\in\mathcal{T}_{p+q}$. Введем функцию $l(\mathbf{X})$, определенную на тензорах ранга q, вида

$$l(\mathbf{X}) = \mathbf{L}\odot\mathbf{X}. \tag{8.1}$$

Очевидно, что $l:\mathcal{T}_q \to \mathcal{T}_p$ – линейная функция, т.е.

$$l(\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Y}) = \alpha l(\mathbf{X}) + \beta l(\mathbf{Y}), \quad \alpha, \beta - \text{числа}$$

Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Всякая линейная функция, отображающая тензоры ранга q в тензоры ранга p, может быть представлена в виде полного умножения на некоторый тензор $\mathbf{L}$ ранга $p+q$, причем такое представление единственно.*

Доказательство.

Пространство $\mathcal{T}_q$ является евклидовым векторным пространством размерности n^q. Базис этого пространства вида $\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\ldots\boldsymbol{e}_s$ обозначим следующим образом:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\ldots\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{F}_1,\\
\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1\ldots\boldsymbol{e}_2 = \mathbf{F}_2,\\
\cdots\cdots\\
\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\ldots\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{F}_{n+1},\\
\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\ldots\boldsymbol{e}_2 = \mathbf{F}_{n+2},\\
\cdots\cdots\\
\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n\ldots\boldsymbol{e}_n = \mathbf{F}_{n^q}.
\end{gathered}$$

Введенный базис $\mathbf{F}_\Lambda (\Lambda = 1, 2, \ldots, n^q)$ пространства $\mathcal{T}_q$ будем считать основным. Построим взаимный к нему базис $\mathbf{F}^\Omega$:

$$\mathbf{F}_\Lambda \odot \mathbf{F}^\Omega = \delta_\Lambda^\Omega.$$

Как показано в п.1, этот базис в евклидовом пространстве, каковым является $\mathcal{T}_q$, всегда существует, причем единственный. Здесь мы использовали также тот факт, что для тензоров одинакового ранга полное умножение совпадает со скалярным произведением тензоров, как элементов евклидова пространства.

Любой тензор $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_q$ можно разложить по элементам основного базиса

$$\mathbf{X} = X^\Lambda \mathbf{F}_\Lambda.$$

Если функция $l(\mathbf{X})$ линейна, то $l(\mathbf{X}) = X^\Lambda l(\mathbf{F}_\Lambda)$. Покажем, что тензор $\mathbf{L}$ вида

$$\mathbf{L} = l(\mathbf{F}_\Omega)\mathbf{F}^\Omega \tag{8.2}$$

удовлетворяет условиям теоремы.

Действительно,

$$\begin{gathered}
\mathbf{L} \odot \mathbf{X} = l(\mathbf{F}_\Omega)\mathbf{F}^\Omega \odot X^\Lambda \mathbf{F}_\Lambda = \\
= X^\Lambda l(\mathbf{F}_\Omega)\delta_\Lambda^\Omega = X^\Lambda l(\mathbf{F}_\Lambda) = l(\mathbf{X}).
\end{gathered}$$

Существование тензора $\mathbf{L}$ доказано.

Для доказательства единственности допустим существование двух различных тензоров $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$, осуществляющих представление функции $l(\mathbf{X})$. Тогда

$$\begin{gathered}
l(\mathbf{X}) = \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{X},\\
l(\mathbf{X}) = \mathbf{L}_2 \odot \mathbf{X}.
\end{gathered}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим, что

$$(\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2) \odot \mathbf{X} = 0,$$

причем это равенство должно выполняться для всех тензоров $\mathbf{X}$ ранга q. Отсюда следует (см. упражнение 33), что

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2.$$

Доказательство завершено.

Легко проверить, что уравнению (8.1) удовлетворяет также представление $\mathbf{L} = l(\mathbf{F}^\Omega)\mathbf{F}_\Omega$. Из единственности тензора $\mathbf{L}$ вытекает равенство

$$\mathbf{L} = l(\mathbf{F}_\Omega)\mathbf{F}^\Omega = \mathbf{L} = l(\mathbf{F}^\Omega)\mathbf{F}_\Omega$$

§9. Единичный тензор.

Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве линейную функцию l, описывающую тождественное отображение пространства $Э_n$ на себя: $l(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x}$ из $Э_n$.

По доказанной в п.8 теореме ей отвечает тензор второго ранга $\mathbf{L}$, такой что $\mathbf{L} \odot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Этот тензор имеет вид

$$\mathbf{L} = l(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^k.$$

Определение. Тензор второго ранга, соответствующий тождественному преобразованию в евклидовом векторном пространстве, называется *единичным тензором* и обозначается буквой $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^k.$$

Для тензора $\mathbf{E}$ можно получить и другие представления:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^k = g^{mk}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_k = g_{mk}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_k. \tag{9.1}$$

($\boldsymbol{i}_k$ – ортонормированный базис). Матрица смешанных компонент единичного тензора $\mathbf{E}$ является единичной.

В силу равенства $\mathbf{X} \odot \boldsymbol{a} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{a}$ (Упр.25) для любого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо соотношение $\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Вычислим теперь $\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{E}$:

$$\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{E} = x_s\boldsymbol{e}^s \cdot \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^k = x_s\delta^s_k\boldsymbol{e}^k = x_k\boldsymbol{e}^k = \boldsymbol{x}.$$

Совершенно аналогично проверяется, что

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$$

для любого тензора $\mathbf{X}$ произвольного ранга.

Упражнения.

32. Линейную функцию $l(\mathbf{X})$ записать в виде полного умножения на тензор:
   а) $l(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}\mathbf{X}$;
   б) $l(\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
   в) $l(\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{b}$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
   г) $l(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$; $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
   е) $l(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$;
   ж) $l(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B})$, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
   з) $l(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\times\boldsymbol{x}$, где $\mathbf{P}\in\mathcal{T}_2$;
   и) $l(\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b} + \operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B})$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\in\mathcal{T}_2$;
   к) $l(\boldsymbol{x}) = 2\mathbf{P}\times\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{x}\times\mathbf{E}, \quad \mathbf{P}\in\mathcal{T}_2$;
   л) $l(\mathbf{X}) = 3\mathbf{X}_\times$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$.

33. Доказать, что если равенство $\mathbf{A}\odot\mathbf{X} = 0$ ($\mathbf{A}\in\mathcal{T}_p$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_q$, $p\geq q$) выполняется для всех $\mathbf{X}$, то $\mathbf{A} = 0$.

34. Найти $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b})_\times$ и $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{b})$.

35. Преобразовать: $\boldsymbol{a}\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{b}$.

36. Доказать тождество

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})\mathbf{E} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}.$$

37. Доказать тождество

$$(\mathbf{E}\times\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\times\mathbf{P}.$$

38. Доказать тождество

$$(\mathbf{E}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}\boldsymbol{k},$$

если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$.

39. Доказать тождество

$$\Big[(\mathbf{P}^{\mathrm{T}} - \mathbf{P})\times\boldsymbol{a}\Big]\odot(\mathbf{E}\times\boldsymbol{b}) = (\mathbf{P}_\times\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

§10. Тензор Леви-Чивита.

Тензор Леви-Чивита – тензор третьего ранга – вводится для трехмерного евклидова пространства соотношением

$$\text{Д} = -\mathbf{E}\times\mathbf{E}. \tag{10.1}$$

Вычисляя, находим

$$\text{Д} = -\boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}^m = -\boldsymbol{e}^k (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_m) \boldsymbol{e}^m.$$

Вектор $\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_m$ можно разложить по взаимному базису

$$\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_m = \tilde{Д}_{kmp} \boldsymbol{e}^p,$$

$\tilde{Д}_{kmp}$ – коэффициенты разложения.

Умножив полученное соотношение скалярно на $\boldsymbol{e}_s$, найдем

$$\tilde{Д}_{kms} = (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_m) \cdot \boldsymbol{e}_s.$$

Смешанное произведение трех базисных векторов запишем в виде:

$$(\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_m) \cdot \boldsymbol{e}_s = \sqrt{g} d_{ksm}.$$

Здесь $\sqrt{g}$ – модуль объема параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (смысл этого обозначения станет ясным чуть позже).

Трехиндексные символы d_{kms} называются *символами Леви-Чивита.* Они равны числу ε, если индексы k, m, s образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3, и числу -ε, если индексы образуют нечетную перестановку чисел 1, 2, 3. В свою очередь число ε равно единице, если векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ образуют правую тройку векторов, и минус единице, если эти векторы образуют левую тройку. Символы Леви–Чивита, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю. Указанные свойства символов Леви-Чивита вытекают из свойств смешанного произведения векторов.

Величины $\tilde{Д}_{kms}$, как и символы Леви-Чивита, не меняются при круговой перестановке индексов и меняют знак при перестановке двух индексов. Учитывая это, запишем представление тензора **Д** в виде

$$\text{Д} = -\tilde{Д}_{kms} \boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}^s \boldsymbol{e}^m = \tilde{Д}_{ksm} \boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}^s \boldsymbol{e}^m.$$

Таким образом, величины $\tilde{Д}_{ksm}$ являются компонентами тензора Леви-Чивита **Д** в базисе $\boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}^m \boldsymbol{e}^s$, поэтому в дальнейшем тильду будем опускать: $\tilde{Д}_{ksm} = Д_{ksm}$.

Рассмотрим теперь контравариантные компоненты тензора Леви-Чивита. Учитывая (1.2), имеем

$$\text{Д} = Д^{kms} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_s = Д_{lrt} g^{lk} g^{rm} g^{ts} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_s =$$

$$= g^{lk} g^{rm} g^{ts} (\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{e}_r) \cdot \boldsymbol{e}_t \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_s = (\boldsymbol{e}^k \times \boldsymbol{e}^m) \cdot \boldsymbol{e}^s \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_s.$$

Таким образом,

$$Д^{kms} = (\boldsymbol{e}^k \times \boldsymbol{e}^m) \cdot \boldsymbol{e}^s,$$

т. е. контравариантные компоненты тензора Леви-Чивита выражаются через векторы взаимного базиса по той же формуле, что и ковариантные – через векторы основного.

Обозначим через $\sqrt{g'}$ объем параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса, тогда

$$Д^{kms} = \sqrt{g'} d^{kms}, \quad \text{где } d^{kms} = d_{kms}.$$

В случае ортонормированного базиса

$$\mathbf{Д} = d_{kmn}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n.$$

Найдем объем параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса:

$$\sqrt{g} = |\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)|.$$

Обозначим $\boldsymbol{e}_1$ через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_2$ – через $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}_3$ – через $\boldsymbol{c}$. Смешанное произведение векторов выражается через их компоненты в ортонормированном базисе с помощью определителя вида

$$\sqrt{g} = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$g = \sqrt{g}\cdot\sqrt{g} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

(матрица второго сомножителя для удобства транспонирована – на определитель это не влияет). Так как $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = g_{11}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = g_{12}$ и т.д., то

$$g = \det\,\|g_{ik}\|.$$

Таким образом, квадрат объема параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен определителю матрицы метрических коэффициентов с нижними индексами.

Совершенно аналогично показывается, что $g' = \det\,\|g^{ik}\|$, а поскольку матрицы $\|g_{ik}\|$ и $\|g^{ik}\|$ взаимно обратны, то

$$g' = \frac{1}{g}.$$

Таким образом, для компонент тензора Леви-Чивита получаем

$$Д_{ksm} = \sqrt{g}d_{ksm};$$

$$Д^{ksm} = \frac{1}{\sqrt{g}}d^{ksm}.$$

Векторное произведение векторов основного базиса раскладывается по взаимному базису так

$$\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s = Д_{ksm}\boldsymbol{e}^m = \sqrt{g}d_{ksm}\boldsymbol{e}^m. \tag{10.2}$$

Это соотношение позволяет получить новые формулы для представления векторов взаимного базиса через векторы основного (отличные от уже известных вида (1.2)).

Положим, например, $k = 1$, $s = 2$. Тогда получим

$$\boldsymbol{e}^3 = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{g}}(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2).$$

Аналогично
$$\boldsymbol{e}^1 = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{g}}(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3);\;\; \boldsymbol{e}^2 = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{g}}(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1).$$
Иногда использование полученных представлений бывает удобнее общей формулы (1.2).

Обратная связь записывается аналогичным образом
$$\boldsymbol{e}_1 = \varepsilon\sqrt{g}(\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^3);\;\; \boldsymbol{e}_2 = \varepsilon\sqrt{g}(\boldsymbol{e}^3 \times \boldsymbol{e}^1);\;\; \boldsymbol{e}_3 = \varepsilon\sqrt{g}(\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2); \tag{10.3}$$
Из полученных формул видно, в частности, что вектор $\boldsymbol{e}^1$ взаимного базиса ортогонален плоскости векторов $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ и т.д.

В общем виде установленную связь можно задать соотношениями:
$$\boldsymbol{e}^m = \frac{1}{2}Д^{mks}(\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s); \tag{10.4}$$
$$\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{2}Д_{mks}(\boldsymbol{e}^k \times \boldsymbol{e}^s).$$
Эти формулы проверяются непосредственной подстановкой в них выражений для $Д^{mks}$ и $Д_{mks}$.

Рассмотрим теперь выражение вида $Д_{jkm}Д^{pqr}$. Преобразуем его:
$$Д_{jkm}Д^{pqr} = (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)\cdot\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{e}^p \times \boldsymbol{e}^q)\cdot\boldsymbol{e}^r.$$
Как и раньше, воспользуемся представлением смешанного произведения векторов через определитель. Для этого разложим векторы основного и взаимного базисов по ортонормированному базису $\boldsymbol{i}_s$:
$$\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k^s\boldsymbol{i}_s;\quad \boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{e}_s^p\boldsymbol{i}_s.$$
Тогда (определитель для $Д^{pqr}$ для удобства транспонирован)
$$\begin{gathered}Д_{jkm}Д^{pqr} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_j^1 & \boldsymbol{e}_j^2 & \boldsymbol{e}_j^3 \\ \boldsymbol{e}_k^1 & \boldsymbol{e}_k^2 & \boldsymbol{e}_k^3 \\ \boldsymbol{e}_m^1 & \boldsymbol{e}_m^2 & \boldsymbol{e}_m^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1^p & \boldsymbol{e}_1^q & \boldsymbol{e}_1^r \\ \boldsymbol{e}_2^p & \boldsymbol{e}_2^q & \boldsymbol{e}_2^r \\ \boldsymbol{e}_3^p & \boldsymbol{e}_3^q & \boldsymbol{e}_3^r \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^p & \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^q & \boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}^r \\ \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}^p & \boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}^q & \boldsymbol{e}^k\cdot\boldsymbol{e}^r \\ \boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}^p & \boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}^q & \boldsymbol{e}^m\cdot\boldsymbol{e}^r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_j^p & \delta_j^q & \delta_j^r \\ \delta_k^p & \delta_k^q & \delta_k^r \\ \delta_m^p & \delta_m^q & \delta_m^r \end{vmatrix}.\end{gathered} \tag{10.5}$$
Эта формула и приведенные ниже следствия из нее оказываются полезными при упрощении многих формул, содержащих косые произведения тензоров.

Следствия:
$$Д_{jkm}Д^{pqm} = \delta_j^p\delta_k^q - \delta_j^q\delta_k^p \tag{10.6}$$
$$Д_{jkm}Д^{pkm} = 2\delta_j^p \tag{10.7}$$
$$Д_{jkm}Д^{jkm} = 6 \tag{10.8}$$
В заключение заметим еще, что
$$Д_{jkm}Д^{pqr} = \sqrt{g}\,d_{jkm}\frac{1}{\sqrt{g}}\,d^{pqr} = d_{jkm}d_{pqr}.$$

§11. Тензоры второго ранга. Симметричные и антисимметричные тензоры. Представление антисимметричного тензора с помощью вектора.

Наиболее часто в механике употребляются тензоры второго ранга. Этим определяется необходимость особо подробного изучения именно этого множества тензоров.

Прежде всего вспомним, что согласно теореме параграфа 8 любую линейную функцию, действующую из $\mathcal{T}_1$ в $\mathcal{T}_1$, т.е. переводящую векторы в векторы, можно представить в виде полного умножения на некоторый тензор второго ранга $\mathbf{P}$:

$$l(\mathbf{X}) = \mathbf{P} \odot \boldsymbol{x} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Таким образом, тензор второго ранга можно интерпретировать как линейный оператор в евклидовом векторном пространстве. Значение этого оператора на векторе получается простым умножением данного тензора на вектор.

Заметим, что в общем случае

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P},$$

менять же порядок умножения вектора и тензора второго ранга можно с помощью формулы:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \quad \text{(см. упр. 25в).}$$

Определение. Тензор второго ранга $\mathbf{P}$ называется *симметричным*, если $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$. Тензор второго ранга $\mathbf{P}$ называется *антисимметричным* (кососимметричным), если $\mathbf{P} = -\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$.

Пусть $\mathbf{P} = P_{ks}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s$. Тогда условие симметричности

$$P_{ks}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_s = (P_{ks}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s)^{\mathrm{T}} = P_{ks}\boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}^k = P_{sk}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s$$

можно записать в виде:

$$P_{ks} = P_{sk}.$$

Аналогично и для контравариантных компонент:

$$P^{ks} = P^{sk}.$$

Рассмотрим случай смешанных компонент:

$$P_k^{\cdot s}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_s = (P_k^{\cdot s}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_s)^{\mathrm{T}} = P_k^{\cdot s}\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}^k = P_k^{\cdot s}g_{sm}\boldsymbol{e}^m g^{kt}\boldsymbol{e}_t = P^t_{\cdot m}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}_t = P^s_{\cdot k}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_s,$$

то есть

$$P_k^{\cdot s} = P^s_{\cdot k}.$$

Поэтому смешанные компоненты симметричного тензора можно обозначать просто P_k^s. Аналогичные соотношения (только со знаком "минус") получаются для антисимметричного тензора.

Пусть теперь тензор $\mathbf{P}$ разложен по сложному полибазису:

$$\mathbf{P} = P_{ks'}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^{s'}.$$

Тогда условие симметричности примет вид:

$$P_{ks'}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^{s'} = P_{ks'}\boldsymbol{e}^{s'}\boldsymbol{e}^k.$$

Заменять штрихованные индексы на нештрихованные (и наоборот) нельзя, поэтому в общем случае ничего нельзя сказать и о связи $P_{mn'}$ с $P_{n'm}$. Справедливо и обратное: тензор $\mathbf{P} = P_{mn}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^{n'}$ не обязательно симметричен, если $\|P_{mn'}\|$ – симметричная матрица.

Теорема. *Любой тензор второго ранга можно единственным образом представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора*:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega} \quad (\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}, \;\; \boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}).$$

Доказательство. К соотношению

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega}$$

допишем транспонированное к нему, в котором учтем свойства симметрии (антисимметрии) тензоров $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{S} - \boldsymbol{\Omega}.$$

Рассматривая полученные соотношения как систему уравнений для определения $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, находим

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathrm{T}});$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathrm{T}}).$$

Единственность представлений тензоров $\mathbf{S}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ следует из единственности решения полученной линейной системы. Доказательство закончено.

У антисимметричного тензора в трехмерном пространстве три независимых компоненты (на диагонали – нули, три элемента под диагональю противоположны по знаку соответствующим элементам над диагональю). Это наводит на мысль о связи, существующей между антисимметричными векторами и тензорами.

Теорема. *Для любого антисимметричного тензора $\boldsymbol{\Omega}$ в трехмерном пространстве найдется такой вектор $\boldsymbol{\omega}$, что тензор $\boldsymbol{\Omega}$ можно представить в виде*:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}.$$

Доказательство. Проверим, прежде всего, что $\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$. Вычисляем:

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_k \times \omega^m\boldsymbol{e}_m = \omega^m \text{Д}_{kms}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s;$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \omega^m\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^k = \omega^m \text{Д}_{mks}\boldsymbol{e}^s\boldsymbol{e}^k = \omega^m \text{Д}_{msk}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s = \omega^m \text{Д}_{kms}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^s.$$

Убедимся далее, что тензор вида $\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$ является антисимметричным. Для этого воспользуемся легко проверяемым тождеством (см. упр. 25ж).

$$\mathbf{P} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

Тензор $\mathbf{E}$, очевидно, симметричен, поэтому:

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})^{\mathrm{T}} = -(\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}.$$

Антисимметричность проверена.

Покажем теперь, как по тензору $\boldsymbol{\Omega}$ определяется вектор $\boldsymbol{\omega}$ (называемый часто вектором, *сопутствующим* тензору $\boldsymbol{\Omega}$). Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$. Тогда уравнение для определения $\boldsymbol{\omega}$ можно записать в компонентах в виде:

$$\Omega_{ks} = Д_{kms}\omega^m = -Д_{ksm}\omega^m.$$

Умножая обе части равенства на D^{ksp} и используя (10.7), получим

$$Д^{ksp}\Omega_{ks} = -2\delta^p_m\omega^m,$$

откуда

$$\omega^p = -\frac{1}{2}Д^{ksp}\Omega_{ks},$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{Д} \odot \boldsymbol{\Omega}.$$

Доказательство закончено.

Упражнения.

40. Доказать, что если тензоры $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ оба симметричны или оба антисимметричны, то тензор $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$ – антисимметричный.

В приведенных ниже упражнениях $\mathbf{P}$ – симметричный, $\mathbf{R}$ – антисимметричный тензор.

41. Доказать: а) $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{a}$;
    б) $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{a}$.

42. Доказать: $\operatorname{tr} \mathbf{R} = 0$.

43. Следует ли из соотношения $\operatorname{tr} \mathbf{R} = 0$ антисимметричность тензора $\mathbf{R}$?

44. Доказать: $\operatorname{tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) = 0$.

45. Доказать: $\mathbf{P} \odot \mathbf{R} = 0$.

46. Доказать: $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a} \times \mathbf{P}) = 0$.

47. Доказать симметричность тензора $\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$.

48. Доказать тождество: $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})_\times + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{U})_\times = 0$, если $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – симметричные тензоры

49. Вычислить $(\boldsymbol{a} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{a})^4$.

50. Доказать тождество

$$(\mathbf{E} \times \boldsymbol{a})^{2m} \odot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{b})^{2n+1} = 0$$

где m, n — целые числа.

51. При каких условиях произведение двух тензоров $\mathbf{E} \times \boldsymbol{a}$ и $\mathbf{E} \times \boldsymbol{b}$ будет симметричным тензором?

52. Доказать, что тензор $\boldsymbol{a} \times \left(\frac{1}{2}\mathbf{E} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\right)$ симметричен, если $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$.

53. Для тензора $\mathbf{T}$ найти симметричную и антисимметричную часть:
а) $\mathbf{T} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$;
б) $\mathbf{T} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - 4\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

54. Найти вектор $\boldsymbol{w}$, сопутствующий антисимметричному тензору $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a})$.

55. Вычислить: $(\mathbf{E} \times \boldsymbol{w})^n$.

§12. Связь алгебры тензоров второго ранга с алгеброй матриц. Детерминант тензора.

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – некоторые тензоры второго ранга. Из определения простого умножения следует, что тензор вида $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ также будет тензором второго ранга. Отсюда следует, что множество тензоров второго ранга замкнуто относительно операции простого умножения (в связи с этим результат операции простого умножения тензоров второго ранга будем называть просто их *произведением*).

Можно показать, что множество тензоров второго ранга с введенными операциями сложения тензоров и их умножения образуют некоммутативное кольцо.

Напомним, что кольцом называется непустое множество K, на котором заданы две операции $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение), удовлетворяющие условиям:

I. K – коммутативная группа относительно сложения, т.е.

1) для любых $x, y, z \in K$

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

2) в K существует элемент 0, называемый нулевым, такой что

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x;$$

3) для любого x из K существует элемент, обозначаемый $-x$, такой что

$$x + (-x) = 0;$$

4) Операция сложения коммутативна:

$$x + y = y + x.$$

II. K – полугруппа относительно умножения, т.е.

1) для любых $x, y, z \in K$

$$(x \cdot y) \cdot c = x \cdot (y \cdot c);$$

2) в K существует элемент e, называемый единичным, такой что

$$x \cdot e = e \cdot x = x, \quad \forall x \in K.$$

III. Операция сложения и умножения связаны дистрибутивными законами, т.е. для всех $x, y, z \in K$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$$
$$z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y.$$

Очевидно, что операции сложения и простого умножения тензоров второго ранга удовлетворяют перечисленным выше требованиям. При этом операции умножения тензоров на число и умножение тензоров удовлетворяют соотношению:

$$\lambda(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = (\lambda\mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot (\lambda\mathbf{Q}).$$

Множества подобного рода, как известно, называются *алгебрами.* Следовательно, множество тензоров второго ранга представляет собой алгебру над полем вещественных чисел.

Другим, хорошо известным, примером алгебры является множество квадратных матриц с обычными операциями сложения, умножения на число и перемножения. Мы уже видели, что между тензорами второго ранга и матрицами имеется много схожего. Изучим эту связь подробнее.

Снова считаем $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ тензорами второго ранга. Рассмотрим их линейную комбинацию вида $\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}$. Если

$$\mathbf{X} = X^{km}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m = X_{km}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m = X_k^{.m}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_m = X_{.m}^k\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^m,$$

$$\mathbf{Y} = Y^{km}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m = Y_{km}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m = Y_k^{.m}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_m = Y_{.m}^k\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^m,$$

то

$$\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y} = (\alpha X^{km} + \beta Y^{km})\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m = (\alpha X_{km} + \beta Y_{km})\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^m =$$

$$= (\alpha X_k^{\cdot m} + \beta Y_k^{\cdot m})\boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}_m = (\alpha X_{\cdot m}^{k} + \beta Y_{\cdot m}^{k})\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}^m.$$

Таким образом, линейной комбинации тензоров соответствует та же линейная комбинация матриц их компонент.

Рассмотрим теперь произведение $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$.

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = X^{km}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m \cdot Y^{ps}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_s = X^{km}Y^{ps}g_{mp}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_s,$$

т.е. произведению двух тензоров, вообще говоря, не соответствует произведение матриц ковариантных или контравариатных компонент этих тензоров. Однако, если пользоваться смешанными компонентами, то соответствие сохраняется:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = X_k^{\cdot m}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_m \cdot Y_p^{\cdot s}\boldsymbol{e}^p\boldsymbol{e}_s = X_k^{\cdot m}Y_m^{\cdot s}\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}_s,$$

т.е. произведению двух тензоров второго ранга сответствует произведение матриц их смешанных компонент в простом полибазисе.

При замене базиса $\boldsymbol{e}_k$ на базис $\boldsymbol{e}_{m'}$ матрица смешанных компонент тензора второго ранга $\mathbf{X}$ меняется, как было установлено в п.6, по формулам:

$$X_k^{\cdot m} = A_k^{k'}A_{m'}^{m}X_{k'}^{\cdot m'} = A_k^{k'}X_{k'}^{\cdot m}A_{m'}^{m},$$

т.е.

$$\|X_k^{\cdot m}\| = A \cdot \|X_{k'}^{\cdot m'}\| \cdot A^{-1},$$

где $A = \|A_k^{k'}\|$ – матрица преобразования. Отсюда следует, что при замене базиса матрица смешанных компонент заменяется подобной матрицей.

Благодаря отмеченному выше соответствию между тензорами и матрицами, многие понятия и факты из теории матриц соответствующим образом переносятся на тензоры второго ранга.

Определение. *Детерминантом* тензора второго ранга называется определитель матрицы его смешанных компонент в простом полибазисе:

$$\det \mathbf{X} = |X_k^{\cdot s}| = |X_{\cdot s}^{k}|.$$

Корректность этого определения, т.е. независимость от выбора базиса, следует из отмеченного выше подобия матриц:

$$\det \|X_k^{\cdot m}\| = \det A \det \|X_{k'}^{\cdot m'}\| \det A^{-1} = \det \|X_{k'}^{\cdot m'}\|.$$

Независимость от типа смешанных компонент доказывается аналогично:

$$|X_k^{\cdot s}| = |X_{\cdot t}^{p}g_{kp}g^{st}| = |X_{\cdot t}^{p}|gg^{-1} = |X_{\cdot t}^{p}|.$$

Выражение для детерминанта тензора через его ко- и контравариантные компоненты имеет вид:

$$\det X = |X_k^{\cdot s}| = |X_{kt}g^{kt}| = |X_{kt}|\frac{1}{g},$$

аналогично,

$$\det X = |X^{kt}|g,$$

где $g = |g_{ik}|$.

Определение. Тензор второго ранга $\mathbf{X}$, детерминант которого не равен нулю, называется *неособым* или *невырожденным.*

С учетом установленного выше соответствия, на основе результатов теории матриц получим, что если тензор $\mathbf{X}$ – неособый, то существует, причем единственный, тензор, обозначаемый $\mathbf{X}^{-1}$ и называемый *обратным* тензором, такой что

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}.$$

Как и в теории матриц введем понятие степени тензора. Положительная степень $\mathbf{X}^n$ тензора $\mathbf{X}$ вводится как n - кратное произведение тензора $\mathbf{X}$ на себя:

$$\mathbf{X}^n = \underbrace{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \cdot \cdots \cdot \mathbf{X}}_{n}.$$

Аналогично,

$$\mathbf{X}^{-m} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbf{X}^{-1} \cdot \cdots \cdot \mathbf{X}^{-1}}_{m}.$$

В очередной раз сославшись на теорию матриц, можно записать следующие соотношения:

$$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{X}^{-1};$$

$$(\mathbf{X}^n)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^n;$$

$$(\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{X}^{-\mathrm{T}}.$$

Упражнения.

56. Найти $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^{-\mathrm{T}}$.

57. Непосредственным вычислением доказать, что
    а) $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{X}^{-1}$;
    б) $(\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

58. Верно ли, что $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^n = \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{Y}^n$?

§13. Ортогональные тензоры.

Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ линейное преобразование q: $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, сохраняющее скалярное произведение векторов, т.е.

$$q(\boldsymbol{a}) \cdot q(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Легко видеть, что это преобразование не меняет длин векторов и углов между ними.

Определение. Линейное преобразование в евклидовом пространстве, сохраняющее скалярное произведение, называется *ортогональным* (или *автоморфизмом*).

По теореме п.8 всякое линейное преобразование можно представить с помощью тензора второго ранга:

$$q(\boldsymbol{a}) = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим теперь обратную задачу: каким условиям должен удовлетворять тензор $\mathbf{Q}$, чтобы соответствующее ему линейное преобразование было ортогональным. Имеем

$$q(\boldsymbol{a}) \cdot q(\boldsymbol{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Представив выражение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ в виде $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{b}$, запишем условие ортогональности:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

Это равенство должно выполняться для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому из него следует, что

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \tag{13.1}$$

Действительно, пусть $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Покажем, что тензор $\mathbf{X}$ – нулевой. В случае ортонормированного базиса, запишем интересующее нас условие в компонентах

$$X_{ks} a_k b_s = 0.$$

Положим $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, а остальные компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – равными нулю. Тогда $X_{11} = 0$. Аналогично доказывается равенство нулю остальных компонент тензора $\mathbf{X}$.

Определение. Тензоры второго ранга, удовлетворяющие соотношению (13.1), называются *ортогональными*.

Из (13.1) следует, что тензор $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ является обратным к тензору $\mathbf{Q}$, т.е. $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$. Отсюда следует, что $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$.

Вычислим детерминант ортогонального тензора. Так же как и для матриц, детерминант произведения тензоров равен произведению детерминантов; детерминант транспонированного тензора равен детерминанту исходного. На основании этого имеем:

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}) = \det\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \det\mathbf{Q} = (\det\mathbf{Q})^2,$$

значит

$$\det\mathbf{Q} = \pm 1. \tag{13.2}$$

Определение. Ортогональные тензоры с детерминантом, равным единице, называются *собственно ортогональными*. Ортогональные тензоры с детерминантом, равным минус единице, называются *несобственно ортогональными*.

Выясним геометрический смысл ортогональных тензоров.

Пусть $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ – некоторая тройка векторов из $\mathcal{E}_3$. Тогда величина $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3$ положительна, если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют правую тройку векторов, и отрицательна в противном случае.

Как известно,

$$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{sk}|,$$

$$(\boldsymbol{a}_m = a_{mk}\boldsymbol{i}_k).$$

Пусть $\mathbf{Q}$ – некоторый ортогональный тензор.Обозначим $\boldsymbol{b}_m = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{a}_m$. Установим связь между $|b_{mp}|$ и $|a_{sk}|$.

$$b_{mp} = \boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{i}_p = \boldsymbol{i}_p \cdot (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{a}_m) = Q_{pt}a_{mt}.$$

Тогда

$$|b_{mp}| = (\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2) \cdot \boldsymbol{b}_3 = |a_{mt}\mathbf{Q}_{pt}| = |a_{mt}{\mathbf{Q}_{tp}}^{\mathrm{T}}| = |a_{mt}||Q_{tp}|, \quad \text{т.е.}$$

$$(\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2) \cdot \boldsymbol{b}_3 = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3 \det \mathbf{Q}.$$

Таким образом, собственно ортогональное преобразование в трехмерном евклидовом пространстве правую тройку векторов переводит в правую, а левую – в левую, т.е. не меняет ориентации триэдра. Несобственно ортогональные преобразования меняют ориентацию триэдра на противоположную.

Собственно ортогональные преобразования соответствуют перемещению абсолютно твердого тела с неподвижной точкой (повороту). Несобственно ортогональные преобразования не допускают такой интерпретации.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Положим в ортонормированном базисе

$$\mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3.$$

Очевидно, что $\mathbf{Q}$ – ортогональный тензор, причем несобственно ортогональный: $\det\mathbf{Q} = -1$.

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{i}_3.$$

Из рис.1 видно, что тензор $\mathbf{Q}_1$ осуществляет отражение относительно плоскости векторов $\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2$.

2. Теперь рассмотрим собственно ортогональный тензор $\mathbf{Q}_2 = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{i}_3.$$

Очевидно (см. рис.2), что преобразование, описываемое тензором $\mathbf{Q}_2$, представляет собой поворот на 180^0 вокруг оси $\boldsymbol{i}_1$.

3. Тензор $-\mathbf{E}$ – преобразование, называемое *инверсией*.

В четномерном пространстве оно будет собственно ортогональным, в нечетномерном (например, в 3-мерном) – несобственно ортогональным.

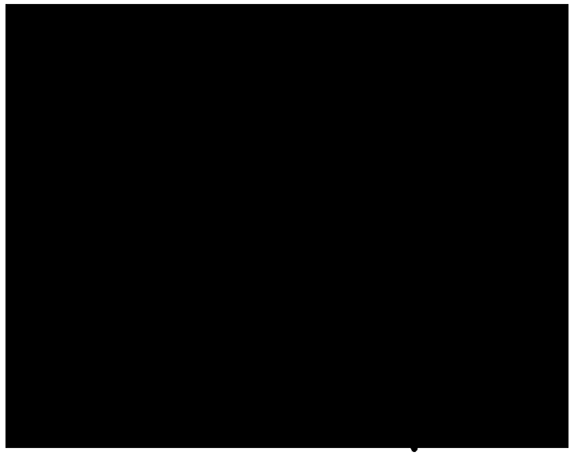


Рис. 1.

Рис. 2.

Очевидно, что в трехмерном евклидовом пространстве любое несобственно ортогональное преобразование можно представить в виде суперпозиции собственно ортогонального преобразования и инверсии, например

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{i}_3 = -\mathbf{E}\cdot(-\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{i}_3).$$

Поэтому несобственно ортогональное преобразование представляет собой совокупность поворота и некоторого отражения.

Из определения ортогонального преобразования следует, что ортогональный тензор переводит ортонормированный базис в ортонормированный, т.е. если $\boldsymbol{i}_k$ – некий ортонормированный базис, то совокупность векторов $\boldsymbol{j}_k$ вида $\boldsymbol{j}_k = \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{i}_k$ также является ортонормированным базисом.

Если $\boldsymbol{i}_k$, $\boldsymbol{i}'_k$ – два ортонормированных базиса, то очевидно, что тензор $\mathbf{Q}$, переводящий первый во второй, имеет вид:

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}'_k. \tag{13.3}$$

Ориентация базиса $\boldsymbol{i}'_k$ (левый или правый) зависит, как отмечалось выше, от ориентации базиса $\boldsymbol{i}_k$ и того, является ли $\mathbf{Q}$ собственно или несобственно ортогональным тензором.

§14. Вектор конечного поворота.

Собственно ортогональный тензор описывает вращение пространства. Из курса теоретической механики известно, что любое вращение в трехмерном пространстве есть поворот на некоторый угол вокруг некоторой оси. Получим представление ортогонального тензора, в котором ось вращения и угол поворота будут заданы явно.

Пусть $\mathbf{Q}$ – собственно ортогональный тензор. Обозначим через $\boldsymbol{k}$ единичный вектор, лежащий на оси, вокруг которой происходит поворот. В качестве базиса выберем тройку ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. Тогда (в силу (13.3)) тензор $\mathbf{Q}$ может быть записан как $\mathbf{Q} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$ (так как вектор $\boldsymbol{k}$ лежит на оси вращения, то при повороте он переходит сам в себя: $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$). Поворот в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{k}$, описывается соотношениями

$$\boldsymbol{i}' = \cos\chi\boldsymbol{i} + \sin\chi\boldsymbol{j};$$
$$\boldsymbol{j}' = -\sin\chi\boldsymbol{i} + \cos\chi\boldsymbol{j}.$$

Здесь χ – угол разворота осей. Для тензора $\mathbf{Q}$ получаем

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{i}(\cos\chi\boldsymbol{i} + \sin\chi\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{j}(-\sin\chi\boldsymbol{i} + \cos\chi\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} =$$
$$= \sin\chi(\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}) + \cos\chi(\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}.$$

Представив сумму $\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}$ как $\mathbf{E} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$, а разность $\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}$ выражением $-\mathbf{E}\times\boldsymbol{k}$ (действительно, $\mathbf{E}\times\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) + 0 = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}$), находим

$$\mathbf{Q} = \cos\chi\mathbf{E} + (1 - \cos\chi)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \sin\chi\mathbf{E}\times\boldsymbol{k}. \tag{14.1}$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами половинного аргумента

$$\cos\chi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}}; \qquad \sin\chi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\chi}{2}}.$$

и введя в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\theta} = 2\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\boldsymbol{k}$, называемый *вектором конечного поворота*, выражению для $\mathbf{Q}$ придадим вид

$$\mathbf{Q} = \frac{1 - \theta^2/4}{1 + \theta^2/4}\mathbf{E} + \frac{2\theta^2}{1 + \theta^2/4}\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{k}}{1 + \theta^2/4}\mathbf{E}\times\boldsymbol{k} =$$
$$= \frac{1}{1 + \theta^2/4}\left[(1 - \frac{\theta^2}{4})\mathbf{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}\right], \qquad \theta^2 = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}. \tag{14.2}$$

В трехмерном пространстве представление (14.1) является общим представлением собственно ортогонального тензора в том смысле, что любой собственно ортогональный тензор может быть записан в таком виде, и наоборот – для любого вектора $\boldsymbol{\theta}$ тензор $\mathbf{Q}$, вычисляемый по (14.2), является собственно ортогональным.

Получим теперь формулу для преобразования (поворота) пространства, соответствующего ортогональному тензору $\mathbf{Q}$. Пусть это преобразование переводит вектор $\boldsymbol{r}$ в вектор $\boldsymbol{R}$. Тогда

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}\cdot\mathbf{Q} = \frac{1}{1 + \theta^2/4}\left[(1 - \frac{\theta^2}{4})\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}\right].$$

Записывая первое слагаемое в скобках как

$$(1-\frac{\theta^2}{4})\boldsymbol{r}=(1+\frac{\theta^2}{4})\boldsymbol{r}-\frac{\theta^2}{2}\boldsymbol{r},$$

выражению для $\boldsymbol{R}$ придадим вид

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+(1+\frac{\theta^2}{4})^{-1}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}\right],$$

который, с учетом формулы двойного векторного произведения

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

преобразуем к форме

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+(1+\frac{\theta^2}{4})^{-1}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}\right]=$$

$$=\boldsymbol{r}+(1+\frac{\theta^2}{4})^{-1}\boldsymbol{\theta}\times\left(\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}\right). \qquad (14.3)$$

Полученное равенство носит название *формулы Родрига.*

Если вектор конечного поворота мал, т. е. $\theta \ll 1$, то $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}\approx\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}$

Упражнения.

59. Доказать, что тензор $\mathbf{A}=(\mathbf{E}-\boldsymbol{\Omega})\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Omega})^{-1}$ является ортогональным, если тензор $\boldsymbol{\Omega}$ – антисимметричен.

60. Доказать, что тензор $\mathbf{A}=\dfrac{1}{4+a^2}\left[(4-a^2)\mathbf{E}+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}-4\mathbf{E}\times\boldsymbol{a}\right]$, где $a^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$, является ортогональным.

61. Доказать, что для ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ справедливо тождество

$$(\mathbf{Q}-\mathbf{E})\odot(\mathbf{Q}-\mathbf{E})=6-2\,\mathrm{tr}\,\mathbf{Q}$$

.

62. Найти выражение вектора конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$ через собственно ортогональный тензор $\mathbf{Q}$, т.е. обратить соотношение (14.2).

§15. Спектральное разложение тензора второго ранга.

Пусть $\mathbf{X}$ – некоторый тензор второго ранга. Рассмотрим задачу нахождения ненулевого вектора $\boldsymbol{d}$, удовлетворяющего соотношению

$$\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{d}. \tag{15.1}$$

Поскольку наряду с вектором $\boldsymbol{d}$ равенству (15.1) удовлетворяет и любой вектор $\alpha\boldsymbol{d}$ (α – произвольный скаляр), то для определенности будем разыскивать только единичные векторы $\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d} = 1$). Заменяя вектор $\boldsymbol{d}$ выражением $\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{d}$ и перенося все слагаемые в левую часть уравнения, получаем

$$(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{d} = 0$$

или, в компонентах,

$$(X_k^{\cdot s} - \lambda\delta_k^s)d_s = 0. \tag{15.2}$$

Уравнения (15.2) образуют однородную систему линейных уравнений, и, таким образом, мы получили хорошо известную алгебраическую задачу. Система (15.2) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$|X_k^{\cdot s} - \lambda\delta_k^s| = 0$$

или

$$\det(\mathbf{X} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \tag{15.3}$$

Определение. Значения λ, при которых система (15.2) имеет нетривиальное решения, называются *собственными числами* или *собственными значениями* тензора $\mathbf{X}$, а соответствующие векторы $\boldsymbol{d}$ – *собственными векторами* тензора $\mathbf{X}$.

Уравнение (15.3) называется *характеристическим* уравнением для тензора $\mathbf{X}$ и в трехмерном пространстве записывается в следующем виде

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0,$$

где

$$I_1 = X_1^{\cdot 1} + X_2^{\cdot 2} + X_3^{\cdot 3};$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} X_1^{\cdot 1} & X_1^{\cdot 2} \\ X_2^{\cdot 1} & X_2^{\cdot 2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2^{\cdot 2} & X_2^{\cdot 3} \\ X_3^{\cdot 2} & X_3^{\cdot 3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3^{\cdot 3} & X_3^{\cdot 1} \\ X_1^{\cdot 3} & X_1^{\cdot 1} \end{vmatrix}; \tag{15.4}$$
$$I_3 = \det\mathbf{X}.$$

Величины I_1, I_2, I_3 являются *инвариантами* тензора $\mathbf{X}$ (они выражаются одинаковым образом в разных базисах и не зависят от выбора базиса). Инварианты тензора можно строить различными способами и получить при этом многочисленные инвариантные характеристики. Однако именно инварианты I_1, I_2, I_3 играют в дальнейших рассмотрениях особую роль, и именно они называются *главными инвариантами* тензора второго ранга.

Теорема. *Все собственные числа симметричного тензора второго ранга вещественны, а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.*

Доказательство этой теоремы (на языке теории матриц) можно найти почти в любом курсе алгебры (см., например [???]).

В случае кратных собственных значений ортогональность собственных векторов по-прежнему сохраняется в том смысле, что из множества этих векторов можно выбрать ортогональные.

Пусть теперь $\mathbf{X}$ – симметричный тензор второго ранга. Выберем в качестве базиса тройку ортогональных собственных векторов $\boldsymbol{d}_k$ этого тензора. Тогда $\mathbf{X} = X_{mn}\boldsymbol{d}_m\boldsymbol{d}_n$. Подставим это представление тензора $\mathbf{X}$ в уравнение (15.1), учитывая, что собственному числу λ_k соответствует собственный вектор $\boldsymbol{d}_k$:

$$(X_{mn}\boldsymbol{d}_m\boldsymbol{d}_n)\cdot\boldsymbol{d}_k = \lambda_k\boldsymbol{d}_k \quad \text{(не суммировать по } k\,!\text{)},$$

или

$$X_{mn}\boldsymbol{d}_m\delta_{nk} = \lambda_k\boldsymbol{d}_k,$$

откуда

$$X_{mk}\boldsymbol{d}_m = \lambda_k\boldsymbol{d}_k.$$

Из последнего равенства находим, что $X_{mk} = \lambda_k\delta_{mk}$ (не суммировать по $k\,!$). Это означает, что в ортонормированном базисе собственных векторов матрица компонент симметричного тензора является диагональной, причем диагональные элементы представляют собой собственные значения тензора:

$$\mathbf{X} = \lambda_1\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \lambda_2\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \lambda_3\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3. \tag{15.5}$$

Представление (15.5) называется *спектральным разложением* симметричного тензора второго ранга.

Вычислим главные инварианты I_k тензора $\mathbf{X}$, воспользовавшись представлением (15.5). В результате получаем формулы связи главных инвариантов с собственными значениями:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1; \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \tag{15.6}$$

Первая и вторая из полученных формул могут быть использованы для вывода следующего бескоординатного представления второго инварианта

$$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\,\mathrm{tr}^{\,2}\mathbf{X} - \,\mathrm{tr}\,\mathbf{X}^2), \tag{15.7}$$

которое справедливо (см. упр. 64) и для несимметричного тензора.

Собственные векторы тензора $\mathbf{X}$ называют иногда *главными осями* этого тензора. В связи с этим представление (15.5) называется записью тензора в главных осях.

§16. Проекторы.

Определение. Тензор вида $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1$, где $\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}_1 = 1$, рассматриваемый как линейный оператор в пространстве векторов, называется *проектором*.

Смысл этого определения состоит в том, что результатом действия такого линейного оператора на произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ евклидова пространства является проекция этого вектора на ось $\boldsymbol{d}_1$:

$$\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}_1)\boldsymbol{d}_1$$

Построение спектрального разложения (15.4) тензора $\mathbf{X}$ требует, кроме знания собственных чисел λ_k, определения и собственных векторов $\boldsymbol{d}_k$, что представляет собой достаточно сложную алгебраическую задачу. Оказывается, что для проекторов $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2$ и $\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3$ можно получить простые явные формулы.

Отметим сначала важное свойство проекторов:

$$(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1)^2 = \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1. \tag{16.1}$$

Запишем теперь разложения тензоров $\mathbf{E}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^2$ по базису $\boldsymbol{d}_k$:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{E} & = & \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3; \\ \mathbf{X} & = & \lambda_1\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \lambda_2\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \lambda_3\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3; \\ \mathbf{X}^2 & = & \lambda_1^2\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \lambda_3^2\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3. \end{array} \tag{16.2}$$

При выводе выражения для $\mathbf{X}^2$ учтено свойство (16.1), а также тот факт, что результатом перемножения разных проекторов является ноль.

На соотношения (16.2) посмотрим теперь, как на линейную систему для определения неизвестных проекторов. Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)$$

отличен от нуля в случае попарно различных собственных значений. В этом случае каждый собственный вектор $\boldsymbol{d}_k$ определен с точностью до знака, а проекторы определяются однозначно:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 &= \frac{(\mathbf{X} - \lambda_2\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{X} - \lambda_3\mathbf{E})}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}; \\ \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 &= \frac{(\mathbf{X} - \lambda_1\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{X} - \lambda_3\mathbf{E})}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}; \\ \boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3 &= \frac{(\mathbf{X} - \lambda_1\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{X} - \lambda_2\mathbf{E})}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Рассмотрим теперь случай кратных собственных значений.

1. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Тогда

$$\mathbf{X} = \lambda(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3) = \lambda\mathbf{E} = \lambda(\boldsymbol{d}_1'\boldsymbol{d}_1' + \boldsymbol{d}_2'\boldsymbol{d}_2' + \boldsymbol{d}_3'\boldsymbol{d}_3'),$$

где $\boldsymbol{d}'_k$ (k=1,2,3) – любой ортонормированный базис. В случае трехкратного собственного значения в трехмерном пространстве любая тройка взаимно ортогональных единичных векторов образует совокупность собственных векторов тензора.

Другими словами, для тензора с трехкратным собственным значением направление главных осей не определено.

2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$; $\lambda_3 \neq \lambda_2$. Тогда

$$\mathbf{X} = \lambda_1(\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2) + \lambda_3\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2$ представляет собой двумерный единичный тензор $\mathbf{E}_2$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{d}_3$. Это означает, что он может быть записан как

$$\mathbf{E}_2 = \boldsymbol{d}'_1\boldsymbol{d}'_1 + \boldsymbol{d}'_2\boldsymbol{d}'_2, \quad \text{где } \boldsymbol{d}'_k \cdot \boldsymbol{d}_3 = 0, \quad k = 1,\, 2.$$

Таким образом, в случае двукратного собственного значения в качестве собственных векторов можно взять любую пару взаимно ортогональных векторов, расположенных в плоскости, перпендикулярной третьему собственному вектору.

§17. Геометрическая интерпретация симметричного тензора второго ранга.

Пусть тензор второго ранга $\mathbf{S}$ является симметричным. Рассмотрим выражение $\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ – некоторый вектор (заметим, что для антисимметричного тензора $\boldsymbol{\Omega}$ выражение $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{x}$ тождественно равно нулю):

$$\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{x} = S_{mn}x_m x_n.$$

Считая x_k декартовыми координатами, рассмотрим теперь в трехмерном пространстве поверхность второго порядка

$$S_{mn}x_m x_n = \pm 1. \tag{17.1}$$

Если собственные значения тензора $\mathbf{S}$ имеют одинаковые знаки, то уравнение (17.1) определяет поверхность эллипсоида. Если знаки собственных значений различны, то (17.1) описывает пару сопряженных гиперболоидов.

Геометрическая интерпретация как раз и состоит в сопоставлении тензору указанной поверхности. Переход к главным осям (спектральному разложению тензора) соответствует при этом нормальной, или канонической, форме задания поверхности. Ясно, например, что тензору с двумя совпадающими собственными значениями ($\lambda_1 = \lambda_2$) будет соответствовать поверхность вращения. Тензору с трехкратным собственным значением будет соответствовать сфера. Последнее, кстати, объясняет следующее

Определение. Тензор вида $\lambda\mathbf{E}$ называется *шаровым*.

§18. Теорема Гамильтона-Кэли.

Теорема. *Любой тензор второго ранга удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Доказательство этой теоремы в рамках теории матриц дано, например в [???].

В случае тензоров, построенных на основе трехмерного евклидова пространства, теорема Гамильтона-Кэли означает, что

$$-\mathbf{X}^3 + I_1\mathbf{X}^2 - I_2\mathbf{X} + I_3\mathbf{E} = 0. \tag{18.1}$$

Данное равенство называется формулой Гамильтона-Кэли.

С помощью формулы Гамильтона-Кэли любую натуральную степень тензора второго ранга можно представить в виде квадратного трехчлена от тензора со скалярными коэффициентами, являющимися полиномами его главных инвариантов.

Получим, например, такое представление для $\mathbf{X}^4$. Для этого запишем формулу Гамильтона-Кэли в виде

$$\mathbf{X}^3 = I_1\mathbf{X}^2 - I_2\mathbf{X} + I_3\mathbf{E}, \tag{18.2}$$

а затем умножим обе части равенства на $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}^4 = I_1\mathbf{X}^3 - I_2\mathbf{X}^2 + I_3\mathbf{X}.$$

Пользуясь теперь для $\mathbf{X}^3$ в правой части формулой (18.2) и приводя подобные слагаемые, получаем

$$\mathbf{X}^4 = (I_1^2 - I_2)\mathbf{X}^2 + (I_3 - I_1I_2)\mathbf{X} + I_1I_3\mathbf{E}.$$

Аналогичная схема может быть использована для любой степени, таким образом

$$\mathbf{X}^n = a_2\mathbf{X}^2 + a_1\mathbf{X} + a_0\mathbf{E},$$

где $a_k = a_k(I_1,\, I_2,\, I_3)$ – полиномы.

В N-мерном пространстве любая степень тензора выражается полиномом $N-$1-й степени.

Если тензор $\mathbf{X}$ – неособый ($I_3(\mathbf{X}) \neq 0$), то умножая формулу Гамильтона-Кэли на $\mathbf{X}^{-1}$, получим

$$\mathbf{X}^{-1} = I_3^{-1}(\mathbf{X}^2 - I_1\mathbf{X} + I_2\mathbf{E}). \tag{18.3}$$

Данная формула может быть использована, в частности, как явная формула вычисления обратного тензора.

Следствием формулы (18.3) является тот факт, что любую целую отрицательную степень неособого тензора можно записать в виде квадратного трехчлена:

$$\mathbf{X}^{-m} = b_2\mathbf{X}^2 + b_1\mathbf{X} + b_0\mathbf{E},$$

где $b_k = b_k(I_1,\, I_2,\, I_3)$ – дробно-рациональные функции.

Вычислим след от обеих частей формулы (18.2):

$$\operatorname{tr}\mathbf{X}^3 = I_1\operatorname{tr}\mathbf{X}^2 - I_2\operatorname{tr}\mathbf{X} + 3I_3.$$

Учитывая, что $I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{X}$, а $I_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2\mathbf{X} - \operatorname{tr}\mathbf{X}^2)$, получим выражение для величины $I_3 = \det\mathbf{X}$:

$$I_3 = \frac{1}{6}(\operatorname{tr}^3\mathbf{X} - 3\operatorname{tr}\mathbf{X}\operatorname{tr}\mathbf{X}^2 + 2\operatorname{tr}\mathbf{X}^3).$$

Величины $\operatorname{tr}\mathbf{X}^k$ $(k = 1, 2, 3)$, также как и I_k являющиеся инвариантами, называются *моментами тензора* второго ранга.

Упражнения.

63. Непосредственными вычислениями доказать, что главные инварианты тензора действительно не зависят от выбора базиса.

64. Для любого тензора второго ранга доказать соотношение $I_2(\mathbf{X}) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\mathbf{X}) - \operatorname{tr}\mathbf{X}^2\right)$.

65. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{ab}$.

66. Найти главные инварианты тензора $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba})$, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

67. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\boldsymbol{a}$.

68. Вычислить главные инварианты тензора $\mathbf{P} = (\mathbf{E}\times\boldsymbol{a})^2$.

69. Доказать, что главные инварианты ортогонального тензора связаны соотношениями: $I_1 I_3 = I_2$; $I_3^2 = 1$.

70. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{aa} + \boldsymbol{bb} + \boldsymbol{cc}$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ взаимно ортогональны.

71. Доказать, что главные инварианты двух взаимно обратных симметричных тензоров 2-го ранга связаны соотношениями:
$$I_1(\mathbf{X}^{-1}) = -\frac{I_2(\mathbf{X})}{I_3(\mathbf{X})};\quad I_2(\mathbf{X}^{-1}) = \frac{I_1(\mathbf{X})}{I_3(\mathbf{X})};\quad I_3(\mathbf{X}^{-1}) = I_3^{-1}(\mathbf{X}).$$

72. Найти главные инварианты тензора
$$\mathbf{P} = (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + 3(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2) + 5\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3.$$

73. Чему равен третий инвариант антисимметричного тензора?

74. Выразить второй инвариант $I_2(\mathbf{X})$ через ковариантные компоненты тензора $\mathbf{X}$ в косоугольном базисе: $\mathbf{X} = X_{mn}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n$.

75. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{E}$.

76. Пусть $\mathbf{X}$ – симметричный тензор второго ранга; $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \dfrac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{X}\mathbf{E}$. Доказать:
    а) $I_1(\mathbf{Y}) = 0$;
    б) $I_2(\mathbf{Y}) \leq 0$.

77. Доказать, что если два собственных числа симметричного тензора различны, то соответствующие им собственные векторы ортогональны.

78. Найти собственные числа и собственные векторы тензора
    а) $\mathbf{P} = 3\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 - (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + 3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2$;
    б) $\mathbf{P} = 7\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 3(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + 7\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + 4(\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) + 7\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

79. Найти главные значения и главные оси тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$.

80. Найти собственные числа тензора $\mathbf{P} = \tau(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + \tau(\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) + \tau(\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3)$.

81. В трехмерном пространстве найти собственные числа и собственные векторы тензора $\mathbf{P} = \alpha\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

82. Найти спектральное разложение тензора $\mathbf{E} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$.

83. Найти спектральное разложение тензора $\mathbf{X} = \alpha\mathbf{E} + \beta\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \gamma\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ взаимно ортогональны.

84. Пользуясь формулой Гамильтона-Кэли, найти $\mathbf{B}^4$ и $\mathbf{B}^{-1}$, если
    а) $\mathbf{B} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 - (\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) - 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$;
    б) $\mathbf{B} = 3(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2) - (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.
    Проверить полученные результаты непосредственным вычислением.

85. Тензор второга ранга $\mathbf{X}^-$ в трехмерном пространстве, определяемый формулой $\mathbf{X}^- = \mathbf{X}^2 - I_1\mathbf{X} + I_2\mathbf{E}$, где I_1, I_2 – первый и второй инварианты $\mathbf{X}$, называется тензором, *присоединенным* к $\mathbf{X}$. Доказать, что для неособого тензора $\mathbf{X}$ верна формула $\mathbf{X}^- = (\det\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1}$.

86. Доказать, что матрица смешанных компонент присоединенного тензора $\mathbf{X}^-$ совпадает с транспонированной матрицей алгебраических дополнений матрицы смешанных компонент тензора $\mathbf{X}$.

87. Пусть $\boldsymbol{e}_k$ – основной базис в $Э_3$, $\boldsymbol{e}^s$ – взаимный базис, $\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{e}_s\cdot\mathbf{X}$. Доказать тождество
$$\mathbf{X}^- = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_s\times\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{e}^s\times\boldsymbol{e}^k).$$

88. Доказать тождество
$$\mathbf{X}^- = \frac{1}{2}d_{mnt}d_{skp}X_{sm}X_{kn}\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{i}_p; \qquad X_{sm} = \boldsymbol{i}_s\cdot\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{i}_m.$$

89. Доказать тождество $\det\mathbf{X} = \dfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{X}^-\cdot\mathbf{X})$.

90. В трехмерном пространстве доказать формулу для третьего инварианта суммы двух тензоров

$$\det(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \det\mathbf{X} + \det\mathbf{Y} + \mathrm{tr}\,(\mathbf{X}^{-}\cdot\mathbf{Y}) + \mathrm{tr}\,(\mathbf{Y}^{-}\cdot\mathbf{X}).$$

§19. Полярное разложение тензора второго ранга.

Определение. Симметричный тензор $\mathbf{S}$ называется *положительно определенным*, если для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ величина $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{a}$ строго положительна:

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{a} > 0, \quad \forall\boldsymbol{a}\neq 0.$$

Определение. Симметричный тензор $\mathbf{S}$ называется *положительно полуопределенным*, если

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0, \quad \forall\boldsymbol{a}\neq 0.$$

У положительно определенного тензора все собственные числа положительны, у полуопределенного – неотрицательны. Для доказательства этого факта достаточно в качестве вектора $\boldsymbol{a}$ взять любой из собственных векторов, тогда $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{a} = \lambda$. Очевидно, что справедливо и обратное утверждение: из положительности (неотрицательности) собственных чисел симметричного тензора следует его положительная определенность (полуопределенность).

Пусть $\mathbf{X}$ – симметричный положительно определенный тензор:

$$\mathbf{X} = \lambda_1\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \lambda_2\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \lambda_3\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3, \quad \lambda_k > 0.$$

Определение. Положительно определенным *квадратным корнем* из положительно определенного симметричного тензора $\mathbf{X}$ называется тензор, обозначаемый $\mathbf{X}^{1/2}$ и вычисляемый по формуле

$$\mathbf{X}^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3, \tag{19.1}$$

где все корни берутся в арифметическом смысле.

Очевидно, что $\left(\mathbf{X}^{1/2}\right)^2 = \mathbf{X}$, т.е. называть этот тензор именно квадратным корнем естественно.

К определению квадратного корня из тензора можно подойти и с другой стороны, занимаясь изучением уравнения

$$\mathbf{Y}^2 = \mathbf{X}. \tag{19.2}$$

В случае произвольного тензора $\mathbf{X}$ проблемы нахождения тензора $\mathbf{Y}$ достаточно подробно изложены в [Гантмахер ?]. Даже если тензор $\mathbf{X}$ – симметричный и положительно определенный, то возможно существование и несимметричных, и не положительно определенных "квадратных корней", т.е. решений уравнения (19.2). Действительно, тензор $\mathbf{Y}$ вида

$$\mathbf{Y} = \pm\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 \pm \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 \pm \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3,$$

будет удовлетворять уравнению при любой комбинации знаков, и только в одном случае он будет положительно определенным. Еще больше сложностей возникает, если тензор $\mathbf{X}$ имеет кратные собственные числа (попробуйте, например, оценить количество симметричных решений уравнения $\mathbf{Y}^2 = \mathbf{E}$).

Несмотря на все это положительно определенный симметричный корень из любого симметричного положительно определенного тензора определяется однозначно.

Теорема (о полярном разложении). *Любой неособый тензор второго ранга* $\mathbf{P}$ *может быть единственным образом представлен в виде произведения симметричного положительно определенного тензора на ортогональный тензор и наоборот:*

$$\mathbf{P} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}^*, \tag{19.3}$$

$\mathbf{Q}$ – *ортогональный,* $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^*$ – *симметричные положительно определенные тензоры.*

Предваряя доказательство, заметим, что представление (19.3) называется *полярным разложением* тензора второго ранга. Это название связано с полярным представлением комплексного числа z:

$$z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

В этом представлении положительное число $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ является аналогом положительно определенного тензора $\mathbf{H}$, а величина $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (описывающая поворот на угол φ комплексной плоскости) соответствует ортогональному тензору $\mathbf{Q}$.

Переходим к доказательству теоремы. Оказывается, что аналогично выражению ρ через z, тензор $\mathbf{H}$ выражается через $\mathbf{P}$ формулой

$$\mathbf{H} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{1/2}. \tag{19.4}$$

Однако, чтобы воспользоваться этой формулой, сначала нужно убедиться, что "подкоренное выражение", т.е. тензор $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$, является симметричным положительно определенным тензором.

1) Симметричность: $\left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$.

2) Для проверки положительной определенности вычислим

$$\boldsymbol{a} \cdot \left(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\right) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P}) \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P}).$$

Полученное выражение (скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P}$) есть величина неотрицательная. Обратиться в нуль оно может лишь в случае $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{P} = 0$; однако последнее при ненулевом векторе $\boldsymbol{a}$ означает, что тензор $\mathbf{P}$ имеет нулевое собственное число, значит, его детерминант равен нулю. Это противоречит условию неособенности тензора $\mathbf{P}$.

Заметим, что если тензор $\mathbf{P}$ – особый, то тензор $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ будет положительно полуопределенным.

Симметричность и положительная определенность тензора $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ позволяет однозначно определить симметричный положительно определенный тензор $\mathbf{H}$.

Тензор $\mathbf{Q}$ находится по формуле

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{P}. \tag{19.5}$$

Существование тензора, обратного к $\mathbf{H}$, вытекает из положительной определенности последнего.

Проверим, что построенный таким образом тензор $\mathbf{Q}$ действительно является ортогональным.

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{P}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{-1}$$

$$\left((\mathbf{H}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{H}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \text{ в силу симметричности } \mathbf{H}\right).$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H}^{2} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Ортогональность тензора $\mathbf{Q}$ доказана. Тем самым доказано и существование представления $\mathbf{P}$ в виде $\mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}$.

Проверим единственность подобного представления. Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{Q}'$ – некоторое другое полярное разложение тензора $\mathbf{P}$. Вычислим $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{Q}' \cdot (\mathbf{H}' \cdot \mathbf{Q}')^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{Q}'^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}' = \mathbf{H}'^{2}.$$

Таким образом, тензор $\mathbf{H}'$ представляет собой симметричный положительно определенный корень из тензора $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$. Но такой корень – единственен, поэтому $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$. Отсюда сразу следует, что $\mathbf{Q}' = \mathbf{H}'^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

Докажем теперь вторую часть теоремы, о представлении тензора $\mathbf{P}$ в виде $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}^{*}$. Для этого применим уже доказанную часть теоремы к тензору $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ (также, как и $\mathbf{P}$, неособому):

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}^{*} \cdot \mathbf{Q}^{*}.$$

Транспонируя это равенство, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} = \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot (\mathbf{Q}^{*} \cdot \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}}) = \\ &= (\mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \mathbf{Q}^{*}) \cdot \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Тензор $\mathbf{H}^{*}$ – симметричный положительно определенный тензор. Таковым будет и стоящий в скобках тензор $\mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \mathbf{Q}^{*}$. Действительно, симметричность его очевидна. Для проверки положительной определенности вычислим

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \mathbf{Q}^{*} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \boldsymbol{b}, \quad \text{где } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{a}.$$

В силу положительной определенности тензора $\mathbf{H}^{*}$ выражение $\boldsymbol{b} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \boldsymbol{b}$ строго больше нуля для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{b}$, а значит и для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$, поскольку $\boldsymbol{b}$ связан с $\boldsymbol{a}$ ортогональным преобразованием.

Таким образом, нами получено представление тензора $\mathbf{P}$ в виде произведения симметричного положительно определенного тензора на ортогональный тензор. В силу единственности такого представления, доказанной выше, находим

$$\mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} \cdot \mathbf{Q}^{*} = \mathbf{H}; \quad \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} = \mathbf{Q}.$$

Таким образом

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}^{*}.$$

Доказательство теоремы завершено.

Легко видеть, что тензор $\mathbf{H}^*$ связан с тензором $\mathbf{P}$ соотношением

$$\mathbf{H}^* = (\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P})^{1/2}$$

(это следует из того, что $\mathbf{H}^*$ находится аналогично $\mathbf{H}$, но для тензора $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$).

Связь между тензорами $\mathbf{H}^*$ и $\mathbf{H}$ вида $\mathbf{H}^* = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}$ дает возможность получить следующие представления:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \lambda_1 \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3,$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 + \sqrt{\lambda_2} \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 + \sqrt{\lambda_3} \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3,$$
$$\mathbf{H}^* = \sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{d}_1^* \boldsymbol{d}_1^* + \sqrt{\lambda_2} \boldsymbol{d}_2^* \boldsymbol{d}_2^* + \sqrt{\lambda_3} \boldsymbol{d}_3^* \boldsymbol{d}_3^*,$$

где $\boldsymbol{d}_k^* = \boldsymbol{d}_k \cdot \mathbf{Q}$. Симметричный тензор $\mathbf{H}^*$ имеет те же собственные числа, что и тензор $\mathbf{H}$, а главные оси тензора $\mathbf{H}^*$ повернуты по отношению к главным осям тензора $\mathbf{H}$, причем этот поворот описывается тензором $\mathbf{Q}$.

Из предыдущего, в частности, следует, что тензоры $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}$ и $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ имеют одинаковые собственные числа.

Еще одним следствием теоремы является совпадение знаков

$$\operatorname{sgn} \det \mathbf{P} = \operatorname{sgn} \det \mathbf{Q}.$$

Теорема о полярном разложении частично применима и к особым тензорам $\mathbf{P}$. Такие тензоры тоже могут быть представлены в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}^*,$$

где симметричные тензоры $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ являются положительно полуопределенными, а тензор $\mathbf{Q}$ – ортогонален. Тензоры $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ однозначно определяются формулами

$$\mathbf{H} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{1/2}, \qquad \mathbf{H}^* = (\mathbf{P}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P})^{1/2}.$$

Ортогональный же тензор в этом разложении уже не определяется однозначно.

Примером такого разложения может служить представление нулевого тензора $\mathbf{O}$ в виде

$$\mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{O}$ – положительно полуопределенный тензор, $\mathbf{Q}$ – любой ортогональный тензор.

Упражнения.

91. Доказать, что тензор $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \dfrac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{X})\mathbf{E}$, где $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, не может быть положительно определенным.

92. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{Y} = -\mathbf{X}^{-\mathrm{T}}$, если известно полярное разложение тензора $\mathbf{X}$.

93. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{aa} + \boldsymbol{bb} + \boldsymbol{cc}$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ взаимно ортогональны.

94. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$.

95. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} + \beta\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \gamma\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2$.

96. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, если известно полярное разложение тензора $\mathbf{T} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}$, а тензор $\mathbf{R}$ – ортогональный.

97. Найти полярное разложение тензора $\alpha\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, если известно полярное разложение тензора $\mathbf{X}$.

98. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = 3\mathbf{E} + 4\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 7\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

99. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + A(\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

100. Найти полярное разложение особого тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1$.

101. Найти полярное разложение особого тензора $\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$.

§20. Вычисление квадратного корня из тензора.

Приведенное выше доказательство теоремы о полярном разложении является *конструктивным*, т.е. не только гарантирует факт существования тензоров $\mathbf{H}$ и $\mathbf{Q}$, но и дает формулы для их вычисления.

Заметим, однако, что вычисление $\mathbf{H}$ связано с операцией извлечения квадратного корня из тензора и отнюдь не является простой задачей. Формула (19.1) определения квадратного корня на самом деле не является явной, поскольку ни собственные числа, ни собственные векторы не выражаются явно через тензор $\mathbf{X}$. Рассмотрим вопрос о нахождении явной формулы для определения квадратного корня из тензора более подробно.

Начнем с относительно простого случая двумерных тензоров, т.е. тензоров, построенных на основе евклидова пространства $Э_2$. Для целого ряда важных для механики сплошной среды задач "подкоренной" тензор $\mathbf{G}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

то есть $\mathbf{G} = G_{11}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + G_{12}(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + G_{22}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + G_{33}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$. Легко видеть, что в этом случае задача вычисления $\mathbf{G}^{1/2}$ "разделяется":

$$\mathbf{G}^{1/2} = \mathbf{G}_{(2)}^{1/2} + \sqrt{G_{33}}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$$

(через $\mathbf{G}_{(2)}$ обозначен двумерный тензор). Аналогичная формула справедлива и для тензоров вида

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

(она полностью совпадает с предыдущей при соответствующей перестановке индексов). Кроме того двумерные тензоры существенно используются в теории оболочек. Сказанным подтверждается важность отдельного рассмотрения двумерного случая.

Пусть $\mathbf{G}_{(2)}$ – симметричный положительно определенный тензор второго ранга, построенный на основе евклидова пространства $Э_2$. Обозначим через I_1, I_2 его главные инварианты (у двумерных тензоров два главных инварианта: $I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{G}_{(2)}$, $I_2 = \det \mathbf{G}_{(2)}$). Подлежащий определению квадратный корень из $\mathbf{G}_{(2)}$ обозначим через $\mathbf{U}_{(2)}$, а его инварианты через J_1, J_2. Запишем для $\mathbf{U}_{(2)}$ формулу Гамильтона-Кэли (учитывая его двумерность):

$$-\mathbf{U}_{(2)}^2 + J_1 \mathbf{U}_{(2)} + J_2 \mathbf{E}_{(2)} = 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{U}_{(2)}^2 = \mathbf{G}_{(2)}$, получаем

$$\mathbf{U}_{(2)} = J_1^{-1}(\mathbf{G}_{(2)} + J_2 \mathbf{E}_{(2)}).$$

Очевидно, что $I_2 = J_2^2$, откуда $J_2 = \sqrt{I_2}$. Чтобы выразить J_1 через инварианты $\mathbf{G}_{(2)}$, вычислим след предыдущего тензорного равенства:

$$J_1 = J_1^{-1}\left(I_1 + 2\sqrt{I_2}\right)$$

(тензор $\mathbf{E}_{(2)}$ - двумерный, поэтому $\operatorname{tr} \mathbf{E}_{(2)} = 2$), откуда

$$J_1 = \sqrt{I_1 + 2\sqrt{I_2}}.$$

Для тензора $\mathbf{U}_{(2)}$ окончательно получаем

$$\mathbf{U}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{I_1 + 2\sqrt{I_2}}}\left(\mathbf{G}_{(2)} + \sqrt{I_2}\mathbf{E}_{(2)}\right).$$

Перейдем к общему трехмерному случаю. Аналогично предыдущему считаем $\mathbf{G}$ симметричным и положительно определенным тензором и обозначаем через $\mathbf{U}$ подлежащий определению симметричный положительно определенный квадратный корень из $\mathbf{G}$.

Пусть G_1, G_2, G_3 – собственные числа тензора $\mathbf{G}$, тогда $\sqrt{G_1}$, $\sqrt{G_2}$, $\sqrt{G_3}$ – собственные числа тензора $\mathbf{U}$. Главные инварианты тензора $\mathbf{G}$ обозначим I_1, I_2, I_3, а главные инварианты тензора $\mathbf{U}$ обозначим J_1, J_2, J_3. Величины I_k легко можно выразить через J_s. Имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &= G_1+G_2+G_3=\left(\sqrt{G_1}+\sqrt{G_2}+\sqrt{G_3}\right)^2-\\
&\quad -2\left(\sqrt{G_1G_2}+\sqrt{G_2G_3}+\sqrt{G_3G_1}\right)=J_1^2-2J_2;\\
I_2 &= G_1G_2+G_2G_3+G_3G_1=\\
&= \left(\sqrt{G_1G_2}+\sqrt{G_2G_3}+\sqrt{G_3G_1}\right)^2-\\
&\quad -2\left(\sqrt{G_1G_2G_2G_3}+\sqrt{G_1G_2G_3G_1}+\sqrt{G_2G_3G_3G_1}\right)=\\
&= J_2^2-2\sqrt{G_1G_2G_3}\left(\sqrt{G_1}+\sqrt{G_2}+\sqrt{G_3}\right)=J_2^2-2J_1J_3;\\
I_3 &= G_1G_2G_3=\left(\sqrt{G_1}\sqrt{G_2}\sqrt{G_3}\right)^2=J_3^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливы формулы

$$I_1=J_1^2-2J_2,\quad I_2=J_2^2-2J_1J_3,\quad I_3=J_3^2. \tag{20.1}$$

Запишем формулы Гамильтона-Кэли для тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{G}$:

$$-\mathbf{U}^3+J_1\mathbf{U}^2-J_2\mathbf{U}+J_3\mathbf{E}=0; \tag{20.2}$$

$$-\mathbf{G}^3+I_1\mathbf{G}^2-I_2\mathbf{G}+I_3\mathbf{E}=0. \tag{20.3}$$

Умножив (20.2) на $\mathbf{U}^3$ и учитывая, что $\mathbf{U}^2=\mathbf{G}$, получим

$$-\mathbf{G}^3+J_1\mathbf{U}^5-J_2\mathbf{G}^2+J_3\mathbf{U}^3=0. \tag{20.4}$$

Умножая (20.2) на $\mathbf{U}^2$, находим

$$\mathbf{U}^5=J_1\mathbf{G}^2+(J_3-J_1J_2)\mathbf{G}+J_2^2\mathbf{U}-J_2J_3\mathbf{E}. \tag{20.5}$$

Подставляя (20.5) в (20.4) и снова применяя (20.2), имеем

$$\begin{gathered}
-\mathbf{G}^3+J_1^2\mathbf{G}^2+J_1(J_3-J_1J_2)\mathbf{G}+J_1J_2^2\mathbf{U}-J_1J_2J_3\mathbf{E}-\\
-J_2\mathbf{G}^2+J_3(J_1\mathbf{U}^2-J_2\mathbf{U}+J_3\mathbf{E})=0.
\end{gathered} \tag{20.6}$$

Подставим в (20.6) вместо $\mathbf{G}^3$ выражение, вытекающее из (20.3), а вместо $\mathbf{U}^2$ запишем $\mathbf{G}$. Тогда получим соотношение, в которое тензор $\mathbf{U}$ входит линейно. Разрешив полученное уравнение относительно $\mathbf{U}$ и используя формулы (20.1), после элементарных преобразований находим

$$\mathbf{U}=(J_1J_2-J_3)^{-1}\left[J_1J_3\mathbf{E}+(J_1^2-J_2)\mathbf{G}-\mathbf{G}^2\right]. \tag{20.7}$$

На этом решение проблемы нахождения квадратного корня далеко не закончено, так как необходимо еще выразить инварианты J_k $(k = 1, 2, 3)$ через инварианты I_1, I_2, I_3 тензора $\mathbf{G}$. Это можно сделать следующим образом

$$\begin{aligned} J_1 &= \sqrt{G_1} + \left(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_3}\right) = \sqrt{G_1} + \sqrt{\left(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_3}\right)^2} = \\ &= \sqrt{G_1} + \sqrt{G_2 + 2\sqrt{G_2 G_3} + G_3} = \sqrt{G_1} + \sqrt{I_1 - G_1 + 2\frac{\sqrt{I_3}}{\sqrt{G_1}}}. \end{aligned}$$

Очевидно, в этом вычислении вместо G_1 можно взять любое собственное число тензора $\mathbf{G}$. Итак, имеем

$$J_1 = \sqrt{G_k} + \sqrt{I_1 - G_k + 2\frac{\sqrt{I_3}}{\sqrt{G_k}}}. \tag{20.8}$$

где G_k – любое собственное значение тензора $\mathbf{G}$, определяемое из характеристического уравнения

$$-G^3 + I_1 G^2 - I_2 G + I_3 = 0. \tag{20.9}$$

Для решения кубического уравнения (20.9) сделаем подстановку $G = R + \frac{1}{3}I_1$, после чего придем к уравнению

$$R^3 + \frac{1}{3}\kappa R + \frac{2}{27}\varepsilon = 0; \tag{20.10}$$

$$\kappa = I_1^2 - 3I_2, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3).$$

Коэффициент $\frac{1}{3}\kappa$ неотрицателен. Это вытекает из легко проверяемого равенства

$$I_1^2 - 3I_2 = \frac{1}{6}\left[(2G_1 - G_2 - G_3)^2 + (2G_2 - G_1 - G_3)^2 + (2G_3 - G_1 - G_2)^2\right].$$

Решение уравнения (20.10) будем искать в виде

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{\kappa}\cos\frac{\varphi}{3}. \tag{20.11}$$

Уравнение (20.10) принимает форму

$$-\frac{2}{27}\kappa^{3/2}\left(4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{2}{27}\varepsilon = 0.$$

С учетом формулы для косинуса тройного угла находим

$$\cos\varphi = \varepsilon\kappa^{-3/2}.$$

Так как нам нужен хоть какой-нибудь корень уравнения (20.8), то положим

$$\varphi = \arccos(\varepsilon\kappa^{-3/2}),$$

где функция arccos понимается в смысле главного значения. Итак, выражение

$$G_k \stackrel{\text{def}}{=} r = \frac{1}{3}\left(I_1 + 2\sqrt{\kappa}\cos\frac{\varphi}{3}\right); \atop \varphi = \arccos(\varepsilon\kappa^{-3/2}) . \tag{20.12}$$

удовлетворяет уравнению (20.9). Подставив (20.12) в (20.8), получим искомое явное выражение инварианта J_1 через инварианты тензора $\mathbf{G}$

$$J_1 = \sqrt{r} + \sqrt{I_1 - r + 2\sqrt{I_3/r}}; \tag{20.13}$$

$$r = \frac{1}{3}\left(I_1 + 2\sqrt{\kappa}\cos\frac{\varphi}{3}\right), \quad \varphi = \arccos(\varepsilon\kappa^{-3/2}),$$

$$\kappa = I_1^2 - 3I_2, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3).$$

Инварианты J_2, J_3 находятся при помощи (20.1), (20.13) и имеют вид

$$J_2 = \sqrt{I_3/r} + \sqrt{r}\sqrt{I_1 - r + 2\sqrt{I_3/r}}, \quad J_3 = \sqrt{I_3}. \tag{20.14}$$

Напомним, что в формулах (20.13), (20.14) все подкоренные выражения неотрицательны, для квадратных корней берутся неотрицательные ветви, а функция arccos понимается в смысле главного значения. Формулы (7), (13), (14) дают явное и точное выражение положительно определенного квадратного корня из положительно определенного тензора в трехмерном пространстве.

Материал данного параграфа основан на работе Л.М.Зубов, А.Н.Рудев. Явное выражение для элементов полярного разложения тензора второго ранга // Доклады РАН. 1996. Т. 351. №2. С. 188–191.

§21. Псевдотензоры.

В элементарной геометрии, как известно, векторное произведение двух векторов считается вектором. Мы до сих пор придерживались такой же терминологии. Однако в действительности векторное произведение не вполне укладывается в множество, определяемое аксиомами евклидова векторного пространства. Каждый элемент пространства Э_3 меняет знак при инверсии пространства, т.е. при действии оператора $-\mathbf{E}$. В то же время, согласно правилам векторного умножения, величина $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ не меняет знака при заменах $\boldsymbol{a} \to -\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \to -\boldsymbol{b}$.

Определение. Векторные величины, не меняющие свой знак при инверсии пространства, называются *псевдовекторами* или *аксиальными* векторами.

Обычные векторы согласно такой терминологии называются *истинными* или *полярными* векторами.

Примерами псевдовекторов являются вектор угловой скорости и вектор момента силы. Отметим, что в определениях этих величин существенно используется операция векторного умножения.

Перейдем к тензорам. Как было установлено в п.6, при изменении базиса компоненты тензора изменяются по формуле

$$X^{mn\dots t} = A^m_{m'} A^n_{n'} \dots A^t_{t'} X^{m'n'\dots t'},$$

$A^m_{m'}$ – матрица перехода. Данная формула служит иногда основой для определения тензора (см. например [Кильчевский]). Мы используем такой подход для введения понятия псевдотензора.

Определение. Совокупность величин $\Phi^{mn\dots t}$, преобразующихся при изменении базиса по формуле

$$\Phi^{mn\dots t} = \operatorname{sgn} |A^p_{p'}|\, A^m_{m'} A^n_{n'} \dots A^t_{t'} \Phi^{m'n'\dots t'},$$

называются *псевдотензором* (ранг которого совпадает, естественно, с количеством индексов).

Заметим, что присутствующий в определении детерминант матрицы перехода от одного базиса к другому отрицателен, если новый базис имеет противоположную ориентацию по отношению к старому (правый вместо левого и наоборот). Если же ориентация базиса не меняется, то никакой разницы между тензорами и псевдотензорами нет.

Величина ε, использованная в п.10 для определения сиволов Леви-Чивита, является примером псевдотензора нулевого ранга, или псевдоскаляра:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{для правой системы координат} \\ -1, & \text{для левой системы координат} \end{cases}$$

Легко видеть, что псевдовектор может быть получен умножением истинного вектора на псевдоскаляр.

Введенный в п.10 тензор Леви-Чивита $\mathbf{Д} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ является, на самом деле, псевдотензором. Истинный тензор Леви-Чивита может быть записан как

$$\tilde{\mathbf{Д}} = \varepsilon \mathbf{Д}.$$

Представление истинного тензора Леви-Чивита одинаково во всех ортонормированных базисах (независимо от их ориентации):

$$\tilde{\mathbf{Д}} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3.$$

Разницу между тензорами и псевдотензорами требуется учитывать только в некоторых специальных вопросах механики сплошной среды, а в большинстве случаев эта разница не проявляется. Поэтому в дальнейшем, за немногими исключениями, мы будем называть псевдоскаляры. псевдовекторы и псевдотензоры просто скалярами. векторами и тензорами.

§22. Внутренняя симметрия тензоров.

Определение. Свойство тензора не меняться в результате действия какой-либо перестановки называется свойством *внутренней симметрии* этого тензора.

Введенные в рассмотрение в п.11 симметричные тензоры второго ранга обладают внутренней симметрией $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ или $P_{mn} = P_{nm}$. Тензор Леви-Чивита также обладает внутренней симметрией, так как он не меняется при любой круговой перестановке, например

$$\left(\mathbf{Д}^{\mathrm{T}(2,3)}\right)^{\mathrm{T}(1,2)} = \mathbf{Д}$$

(суперпозиция перестановок (2,3) и (1,2) образует круговую перестановку $1 \to 2 \to 3$).

§23. Внешняя симметрия тензоров.

Множество ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$ образует группу относительно операции простого умножения. Для проверки этого факта вспомним определение группы:

Группой называется множество, замкнутое относительно некоторой бинарной операции (обозначаемой точкой), причем последняя обладает следующими свойствами:

1. Операция "$\cdot$" ассоциативна, т.е. для любых элементов a, b, c группы

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

2. Среди элементов группы имеется элемент e, называемый единичным, такой что для любого элемента a группы

$$a \cdot e = e \cdot a = a.$$

3. Для любого элемента группы a существует, причем единственный, элемент группы, называемый обратным и обозначаемый a^{-1}, такой что

$$a \cdot a^{-1} = e.$$

Проверим выполнение групповых свойств в случае множества ортогональных тензоров и операции простого умножения.

1. Замкнутость. Если $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ – ортогональные тензоры, то тензор $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$ тоже ортогонален. Действительно

$$(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2)^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) = \underbrace{\mathbf{Q}_2^{\mathrm{T}} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}_1}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{Q}_2}_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}.$$

2. Ассоциативность выполнена в силу свойств операции простого умножения.

3. Единичный тензор $\mathbf{E}$ является ортогональным и, следовательно, принадлежит группе ортогональных тензоров.

4. Как показано в п.13, тензором, обратным к ортогональному, является транспонированный к нему и также ортогональный. Проверка завершена.

Определение. Группа всех ортогональных тензоров относительно операции простого умножения называется *полной ортогональной группой* и обозначается $\mathcal{O}$.

Множество собственно ортогональных тензоров также образует группу относительно операции простого умножения. Эта группа называется *собственно ортогональной группой*, обозначается $\mathcal{O}_+$ и является подгруппой полной ортогональной группы.

В случае тензоров, построенных на основе трехмерного евклидова пространства, полная ортогональная группа получается из собственно ортогональной группы добавлением к последней ее тензоров, умноженных на тензор $-\mathbf{E}$, то есть любой несобственно ортогональный тензор $\mathbf{Q}^-$ может быть выражен через некоторый собственно ортогональный тензор $\mathbf{Q}^+$ формулой $\mathbf{Q}^- = -\mathbf{Q}^+$.

Пусть $\mathbf{X} = X^{mn\ldots p}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\ldots\boldsymbol{e}_p$ – тензор произвольного ранга q. Рассмотрим некоторый ортогональный тензор $\mathbf{Q}$, представляющий (см. п.13) автоморфизм евклидова векторного пространства. С использованием этого тензора введем в рассмотрение операцию $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}) : \mathcal{T}_q \to \mathcal{T}_q$, определяемую соотношением

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}) = X^{mn\ldots p}(\boldsymbol{e}_m\cdot\mathbf{Q})(\boldsymbol{e}_n\cdot\mathbf{Q})\ldots(\boldsymbol{e}_p\cdot\mathbf{Q})$$

Операция $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})$ сохраняет скалярное произведение в $\mathcal{T}_q$ и поэтому является автоморфизмом в этом пространстве. Действительно, пусть $\mathbf{Y} = Y^{ks\ldots t}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_s\ldots\boldsymbol{e}_t \in \mathcal{T}_q$. Вычислим $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})\odot\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Y})$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})\odot\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Y}) &= X^{mn\ldots p}(\boldsymbol{e}_m\cdot\mathbf{Q})\ldots(\boldsymbol{e}_p\cdot\mathbf{Q})\odot Y^{ks\ldots t}(\boldsymbol{e}_k\cdot\mathbf{Q})\ldots(\boldsymbol{e}_t\cdot\mathbf{Q}) = \\ &= X^{mn\ldots p}Y^{ks\ldots t}(\boldsymbol{e}_m\cdot\mathbf{Q})\cdot(\boldsymbol{e}_k\cdot\mathbf{Q})\ldots(\boldsymbol{e}_p\cdot\mathbf{Q})\cdot(\boldsymbol{e}_t\cdot\mathbf{Q}).\end{aligned}$$

Из определения ортогонального тензора, как тензора, сохраняющего скалярное произведение, следует, что

$$(\boldsymbol{e}_m\cdot\mathbf{Q})\cdot(\boldsymbol{e}_k\cdot\mathbf{Q}) = \boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k. \tag{23.1}$$

Это же справедливо и для остальных пар. Таким образом,

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})\odot\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\odot\mathbf{Y}.$$

Формула (23.1) может быть доказана и непосредственно:

$$(\boldsymbol{e}_m\cdot\mathbf{Q})\cdot(\boldsymbol{e}_k\cdot\mathbf{Q}) = (\boldsymbol{e}_m\cdot\mathbf{Q})\cdot(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_m\cdot\underbrace{(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})}_{\mathbf{E}}\cdot\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k.$$

Для тензоров нулевого ранга (или скаляров) справедливо соотношение

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(x) = x; \tag{23.2}$$

для векторных величин

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q}; \tag{23.3}$$

для тензоров второго ранга

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}. \tag{23.4}$$

Определение. *Группой внешней симметрии* тензора $\mathbf{X}$ называется совокупность ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$, для которых выполняется соотношение

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

Таким образом, внешней симметрией тензора называется его свойство не меняться при некоторых ортогональных преобразованиях (автоморфизмах) пространства.

Докажем корректность определения, для чего проверим, что описанное им множество тензоров действительно образует группу. Для этого запишем автоматически следующее из определения автоморфизма $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})$ равенство

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2}(\mathbf{X}) = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{X})\right].$$

Теперь проверим выполнение основных свойств.

1. Замкнутость. Пусть $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ принадлежат группе внешней симметрии. Это означает, что $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Вычисляем

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2}(\mathbf{X}) = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}\underbrace{[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{X})]}_{\mathbf{X}} = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

Таким образом, тензор $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$ также принадлежит группе симметрии.

2. Ассоциативность по-прежнему выполнена в силу свойств операции простого умножения.

3. Очевидно, что для любого тензора $\mathbf{X}$ $\mathrm{Av}_{\mathbf{E}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, т.е. единичный тензор принадлежит группе симметрии любого тензора.

4. Пусть $\mathbf{Q}$ принадлежит группе симметрии. Найдем $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X})$:

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X}) = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X}) = \mathrm{Av}_{\mathbf{E}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

Таким образом, и тензор $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$ тоже принадлежит группе симметрии. Проверка завершена.

Заметим, что группа симметрии любого тензора не является пустой: в ней всегда содержится тензор $\mathbf{E}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Группа внешней симметрии вектора состоит из поворотов вокруг оси, на которой лежит этот вектор, и отражений относительно плоскостей, проходящих через этот вектор. Геометрически очевидно, что других ортогональных преобразований, не меняющих ориентацию вектора, не существует.

2. Группа внешней симметрии симметричного тензора второго ранга, построенного на основе евклидова пространства $\mathcal{E}_3$, может быть найдена с помощью геометрической интерпретации этого тензора (см. §17).

Если все три собственные числа тензора попарно различны, то группа внешней симметрии совпадает с группой совмещений трехосного эллипсоида: повороты на 180° вокруг каждой из главных осей, отражения относительно главных плоскостей, инверсия и тождественное преобразование (т.е. отсутствие преобразования). Описанные восемь преобразований соответствуют восьми комбинациям знаков ортогонального тензора $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \pm \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 \pm \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 \pm \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3,$$

где $\boldsymbol{d}_k$ – собственные векторы рассматриваемого тензора.

Если у тензора имеется двукратное собственное значение, то ему соответствует поверхность вращения, а значит и группа симметрии расширяется за счет произвольных поворотов вокруг оси симметрии.

В случае шарового тензора группа внешней симметрии будет совпадать с полной ортогональной группой. Это можно легко доказать и не прибегая к геометрическим соображениям, а непосредственно на основе определения. Действительно,

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\lambda \mathbf{E}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \lambda \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q} = \lambda \mathbf{E}$$

для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$.

§24. Изотропные и гиротропные тензоры.

Определение. Тензор произвольного ранга называется *изотропным*, если группа его внешней симметрии совпадает с полной ортогональной группой.

Примером изотропного тензора является шаровой тензор $\alpha \mathbf{E}$. Легко убедиться, что изотропным является тензор $\mathbf{EE} \in \mathcal{T}_4$.

Имеет место утверждение:

Любая перестановка изотропного тензора также является изотропным тензором.

Для его доказательства заметим, что линейное преобразование $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})$ коммутирует с другим линейным преобразованием – перестановкой. Это означает, что $\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}(i,j)}) = [\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X})]^{\mathrm{T}(i,j)}$. Выражение в квадратных скобках совпадает с $\mathbf{X}$ в силу изотропности последнего. Следовательно, для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$

$$\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}(i,j)}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}(i,j)},$$

что означает изотропность перестановки $\mathbf{X}^{\mathrm{T}(i,j)}$.

Очевидно, что никакой тензор нечетного ранга не может быть изотропным, потому что он меняет знак при инверсии пространства: если $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_{2k-1}$, то $\mathrm{Av}_{-\mathbf{E}}(\mathbf{X}) = -\mathbf{X}$.

Теорема (об общем представлении изотропного тензора). *Любой изотропный тензор четного ранга $2k$ представляет собой линейную комбинацию перестановок тензора* $\underbrace{\mathbf{EE}\ldots\mathbf{E}}_{k\ \text{раз}}$.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашего курса и здесь не приводится. Заметим только, что любой изотропный тензор четвертого ранга имеет вид

$$\alpha\mathbf{EE} + \beta(\mathbf{EE})^{\mathrm{T}(2,3)} + \gamma(\mathbf{EE})^{\mathrm{T}(2,4)}$$

(остальные перестановки тензора $\mathbf{EE}$ совпадают с уже выписанными: $(\mathbf{EE})^{\mathrm{T}(1,4)} = (\mathbf{EE})^{\mathrm{T}(2,3)}$, $(\mathbf{EE})^{\mathrm{T}(1,3)} = (\mathbf{EE})^{\mathrm{T}(2,4)}$). Для тензоров шестого ранга число линейно независимых перестановок равно пятнадцати, для тензоров десятого ранга их – сто три.

Определение. Тензор называется *гиротропным*, если группа его симметрии совпадает с полной ортогональной группой.

Примером гиротропного тензора является рассмотренный в п.19 истинный тензор Леви-Чивита $\tilde{\text{Д}} = -\varepsilon\mathbf{E}\times\mathbf{E}$. Очевидно, что если тензор четного ранга является гиротропным, то он будет и изотропным.

Примем без доказательства еще одну теорему:

Любой гиротропный тензор ранга $2k+1$ является линейной комбинацией перестановок тензора $\tilde{\text{Д}}\underbrace{\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{k-1\ \text{раз}}$.

Изотропный тензор имеет одинаковые компоненты во всех ортонормированных базисах; гиротропный тензор имеет одинаковые компоненты во всех ортонормированных базисах одной ориентации.

Действительно, пусть тензор $\mathbf{X}$ – изотропен, а $\{\boldsymbol{i}_k\}$, $\{\boldsymbol{j}_s\}$ – два ортонормированных базиса. В базисе $\{\boldsymbol{i}_k\}$ тензор $\mathbf{X}$ имеет представление

$$\mathbf{X} = X_{ks\ldots t}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_s\ldots\boldsymbol{i}_t.$$

Выберем в качестве ортогонального тензор, переводящий базис $\{\boldsymbol{i}_k\}$ в $\{\boldsymbol{j}_s\}$, т.е. тензор $\mathbf{Q} = \boldsymbol{i}_k\boldsymbol{j}_k$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{X} = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}) &= X_{ks\ldots t}(\boldsymbol{i}_k\cdot\mathbf{Q})(\boldsymbol{i}_s\cdot\mathbf{Q})\ldots(\boldsymbol{i}_t\cdot\mathbf{Q}) = \\ &= X_{ks\ldots t}\boldsymbol{j}_k\boldsymbol{j}_s\ldots\boldsymbol{j}_t.\end{aligned}$$

Так, например, $\mathbf{E} = \delta_{ks}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_s$ во всех ортонормированных базисах.

Понятия изотропности и гиротропности применимы и к псевдотензорам. Псевдотензор $\text{Д} = -\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ будет, очевидно, изотропным. Псевдотензоры четного ранга могут быть только гиротропными. Примерами таких тензоров являются псевдотензоры второго ранга $\varepsilon\mathbf{E}$ и $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Упражнения.

102. Проверить, что множество собственно ортогональных тензоров образует группу.

103. Образует ли группу множество несобственно ортогональных тензоров?

104. Какова группа внешней симметрии тензора $\alpha\mathbf{E} - \boldsymbol{aa}$?

105. Доказать изотропность псевдотензора $\mathbf{Д} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}$.

106. Доказать изотропность тензора $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E}$.

§25. Тензорные функции.

Определение. *Тензорной функцией* называется отображение, ставящее в соответствие нескольким тензорам различных рангов из некоторого множества тензор ранга q:

$$\mathbf{X}_1 \in \mathcal{T}_{p_1}, \quad \mathbf{X}_2 \in \mathcal{T}_{p_2}, \ldots, \quad \mathbf{X}_k \in \mathcal{T}_{p_k};$$

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k); \quad \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_q.$$

Примером тензорной функции может служить рассмотренная в п.8 линейная функция $l(\mathbf{X}) = \mathbf{L} \odot \mathbf{X}$ одного тензорного аргумента, ставящая в соответствие тензорам ранга p тензоры ранга q ($\mathbf{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$). Ниже приведены примеры функций нескольких тензорных аргументов:

$$f_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2; \qquad f_1 : \mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_2;$$

$$f_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3; \qquad f_2 : \mathcal{T}_{p_1} \times \mathcal{T}_{p_2} \times \mathcal{T}_{p_3} \to \mathcal{T}_{p_1+p_2+p_3};$$

$$f_3(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \mathbf{X}_3) = \boldsymbol{x}_1 \cdot \mathbf{X}_3 \cdot \boldsymbol{x}_2; \quad f_: \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_{p-2}.$$

Рассмотрим особо случай функции одного тензорного аргумента. Пусть $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ – тензорная функция, действующая из $\mathcal{T}_p$ в $\mathcal{T}_q$. Будем считать, что исходное евклидово пространство имеет размерность n. Зафиксируем в $\mathcal{T}_p$ и $\mathcal{T}_q$ некоторые базисы:

$$\mathbf{X} = X^{ks\ldots l}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_s \ldots \boldsymbol{e}_l;$$

$$\mathbf{Y} = Y^{ij\ldots m}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \ldots \boldsymbol{e}_m.$$

Тогда функциональная зависимость $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ может быть записана в виде

$$Y^{ij\ldots m} = \tilde{f}^{ij\ldots m}(X^{ks\ldots l}).$$

Таким образом, в фиксированном базисе тензорной функции $f(\mathbf{X})$ можно поставить в соответствие n^q скалярнозначных функций от n^p скалярных аргументов. Такое представление называют *компонентным представлением* тензорной функции. Ясно, что вид компонентных функций существенно зависит от выбора базиса.

§26. Группа симметрии тензорной функции.

Определение. Совокупность ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$, для которых при всех допустимых значениях аргументов верно равенство

$$f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}_1),\, \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}_2),\, \ldots\, \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}_k)\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}\left[f(\mathbf{X}_1,\, \mathbf{X}_2, \ldots \mathbf{X}_k)\right].$$

называется *группой симметрии* тензорной функции f.

Для проверки групповых свойств множества тензоров, описанного данным определением, ограничимся случаем функции одного тензорного аргумента: $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_p$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{T}_q$. Чтобы проверить замкнутость, предположим, что $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ принадлежат группе симметрии $f(\mathbf{X})$. Это означает, что

$$f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{X})\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}\left[f(\mathbf{X})\right]; \quad f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}(\mathbf{X})\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}\left[f(\mathbf{X})\right].$$

Вычислим

$$f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{Q}_2}(\mathbf{X})\right] = f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}\left(\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{X})\right)\right] =$$
$$= \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}\left[f\left(\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(\mathbf{X})\right)\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_2}\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1}(f(\mathbf{X}))\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{Q}_2}[f(\mathbf{X})].$$

Таким образом, тензор $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$ также принадлежит группе симметрии. Ассоциативность и наличие в группе единичного элемента очевидны. Остается проверить существование в группе обратного элемента, то есть тот факт, что вместе с тензором $\mathbf{Q}$ группе симметрии принадлежит и тензор $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$. Вычисляем

$$f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X})\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{E}}\left(f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X})\right]\right) = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}\left(f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X})\right]\right) =$$
$$= \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}\left(f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X})\right]\right)\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}\left[f\left[\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}\left(\mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}(\mathbf{X})\right)\right]\right] =$$
$$= \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}\left[f\left(\mathrm{Av}_{\mathbf{E}}(\mathbf{X})\right)\right] = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}}[f(\mathbf{X})].$$

Проверка завершена. Заметим, что данная схема проверки корректности автоматически переносится на случай произвольного числа аргументов тензорной функции f.

§27. Изотропные тензорные функции.

Определение. Тензорная функция называется *изотропной* (*гиротропной*), если ее группа симметрии совпадает с полной ортогональной группой (собственно ортогональной группой).

Если функция изотропна, то ее значение на “повернутых” аргументах совпадает с “повернутым” значением функции на старых аргументах при любых поворотах.

Ниже приведены условия изотропности для наиболее часто встречающихся типов функциональных зависимостей.

1) $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$:
$$f(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{Q};$$

2) $y = f(\mathbf{X}),\ \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$:
$$f(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) = f(\mathbf{X});$$

3) $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}),\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_2$:

$$f(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot f(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Q}.$$

Теорема. *Компонентное представление изотропной тензорной функции одинаково во всех ортонормированных базисах.*

Доказательство проведем в случае функции одного аргумента $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$. Рассмотрим два ортонормированных базиса $\{\boldsymbol{i}_k\}$ и $\{\boldsymbol{j}_m\}$:

$$\mathbf{X} = X_{ks\ldots t}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_s\ldots\boldsymbol{i}_t = \tilde{X}_{ks\ldots t}\boldsymbol{j}_k\boldsymbol{j}_s\ldots\boldsymbol{j}_t;$$

$$\mathbf{Y} = Y_{mn\ldots r}\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n\ldots\boldsymbol{i}_r = \tilde{Y}_{mn\ldots r}\boldsymbol{j}_m\boldsymbol{j}_n\ldots\boldsymbol{j}_r.$$

Предположим, что компонентное представление функции $f(\mathbf{X})$ при использовании первого из них имеет вид

$$Y_{mn\ldots r} = f_{mn\ldots r}(X_{ks\ldots t}).$$

Нам необходимо доказать, что компоненты $\tilde{Y}_{mn\ldots r}$ выражаются через $\tilde{X}_{ks\ldots t}$ с помощью тех же функций $f_{mn\ldots r}$ (без тильды).

Введем в рассмотрение ортогональный тензор $\mathbf{Q} = \boldsymbol{j}_t\boldsymbol{i}_t$, переводящий базис $\boldsymbol{j}$ в базис $\boldsymbol{i}$. Обозначим

$$\mathbf{X}_1 = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{X}) = \tilde{X}_{ks\ldots t}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_s\ldots\boldsymbol{i}_t; \quad \mathbf{Y}_1 = \mathrm{Av}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Y}) = \tilde{Y}_{mn\ldots r}\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n\ldots\boldsymbol{i}_r.$$

Так как $f(\mathbf{X})$ изотропна, то тензор $\mathbf{Q}$ принадлежит ее группе симметрии, а значит
$$\mathbf{Y}_1 = f(\mathbf{X}_1).$$

Оба тензора в предыдущем равенстве заданы в базисе $\{\boldsymbol{i}_k\}$, поэтому функциональная связь между их компонентами осуществляется функциями $f_{mn\ldots r}$ (без тильды!):
$$\tilde{Y}_{mn\ldots r} = f_{mn\ldots r}(\tilde{X}_{ks\ldots t}).$$

Доказательство завершено.

Компонентное представление гиротропной тензорной функции одинаково во всех ортонормированных базисах одинаковой ориентации.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$.

$$f(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q}, \boldsymbol{y} \cdot \mathbf{Q}) = (\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q}) \cdot (\boldsymbol{Y} \cdot \mathbf{Q}) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \text{ – функция изотропна.}$$

2. $f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{T}_2$.

$$f(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q} =$$

$$= \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{Q} \text{ – функция изотропна.}$$

3. $f(\mathbf{X}) = \operatorname{tr} \mathbf{X}$.

$$\operatorname{tr}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) = \operatorname{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X}) = \operatorname{tr} \mathbf{X} \text{ – функция изотропна.}$$

Можно показать, что все рассмотренные раньше действия с тензорами, за исключением косого умножения, являются изотропными функциями своих аргументов.

4. $\boldsymbol{y} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{x}, \quad \mathbf{L} \in \mathcal{T}_2$.

$$f(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q}) = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) \cdot \boldsymbol{x};$$

$$f(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}) \cdot \boldsymbol{x}.$$

Для произвольного тензора $\mathbf{L}$ $f(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{Q} \neq f(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{Q})$, поэтому данная функция вообще говоря не будет изотропной. Однако, можно найти такие тензоры $\mathbf{L}$, при которых функция изотропна: $\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}$ или $\mathbf{L} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ при любом ортогональном тензоре $\mathbf{Q}$. Последнее условие представляет собой условие изотропности тензора $\mathbf{L}$. Таким образом, функция $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{x}$ изотропна тогда и только тогда, когда изотропен тензор $\mathbf{L}$. Заметим, что функция $f(\mathbf{X}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{x}$ изотропна.

§28. Теоремы об общих представлениях изотропных тензорных функций.

1. Скалярно-значные функции векторного аргумента

Теорема. *Любая скалярно-значная изотропная функция одного векторного аргумента есть функция длины своего аргумента.*

Утверждение теоремы геометрически очевидно: вектор можно характеризовать длиной и углами наклона к осям; при ортогональных преобразованиях (поворотах) длина остается неизменной, а углы меняются независимо друг от друга и принимая любые значения, поэтому скалярно-значная изотропная функция не может зависеть от величины этих углов.

Случай нескольких векторных аргументов аналогичен предыдущему: скалярно-значная изотропная функция совокупности векторов представляет собой функцию от скалярных произведений этих векторов.

2. Скалярно-значные функции симметричного тензорного аргумента

Определение. Любая скалярно-значная изотропная функция нескольких тензорных аргументов называется *совместным инвариантом* этих тензоров. Любая скалярно-значная изотропная функция произвольного тензора называется *инвариантом* этого тензора.

Примерами инвариантов тензора второго ранга в смысле данного определения могут служить его главные инварианты I_k и моменты $\operatorname{tr} \mathbf{X}^k$.

Теорема.*Любая изотропная скалярно-значная функция симметричного тензора второго ранга есть функция его главных инвариантов, то есть* $f(\mathbf{X}) = \varphi(I_1, I_2, I_3)$.

Прежде чем доказывать теорему, проверим, что функция главных инвариантов действительно является изотропной. Обозначим через x_1, x_2, x_3 собственные числа тензора $\mathbf{X}$. Тогда, в силу (15.5),

$$\begin{aligned} I_1 &= x_1 + x_2 + x_3; \\ I_2 &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1; \\ I_3 &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Главные инварианты симметричного тензора являются симметричными функциями его собственных значений. Таким образом, функцию главных инвариантов можно считать функцией собственных значений. Последняя же будет изотропна в силу того, что при автоморфизме собственные числа симметричного тензора не меняются:

$$\mathbf{X} = x_1 \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 + x_2 \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 + x_3 \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3;$$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q} = x_1 \boldsymbol{d}_1^* \boldsymbol{d}_1^* + x_2 \boldsymbol{d}_2^* \boldsymbol{d}_2^* + x_3 \boldsymbol{d}_3^* \boldsymbol{d}_3^*, \qquad \boldsymbol{d}_k^* = \boldsymbol{d}_k \cdot \mathbf{Q}.$$

Для доказательства теоремы запишем функцию $f(\mathbf{X})$ в виде

$$f(\mathbf{X}) = \varphi(x_k;\, \boldsymbol{d}_s),$$

где x_k – собственные числа, а $\boldsymbol{d}_s$ – собственные векторы тензора-аргумента. Как было показано выше, при автоморфизме собственные числа не меняются, а собственные векторы поворачиваются, причем выбором ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ их ориентацию можно сделать любой. Следовательно, условие изотропности $f(\mathbf{X})$ может быть записано следующим образом:

$$\varphi(x_k;\, \boldsymbol{d}_s) = \varphi(x_k;\, \boldsymbol{d}_s^*)$$

для любой ортонормированной тройки $\boldsymbol{d}_s^*$. Последнее равенство означает, что функция φ просто не зависит от $\boldsymbol{d}_s$. Следовательно, φ есть функция только собственных значений тензорного аргумента.

Теперь докажем, что условие изотропности функции $f(\mathbf{X})$ влечет свойство симметричности функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Последнее означает, что значение функции φ не меняется при любой перестановке аргументов. Взяв в качестве ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ тензор $\mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3 + \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_2 - \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_1$, осуществляющий поворот на 90° вокруг оси $\boldsymbol{d}_3$, получим

$$\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}_1 = x_2 \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 + x_1 \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 + x_3 \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3$$

Вытекающее из изотропности функции f соотношение

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}_1)$$

очевидно эквивалентно следующему

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_2, x_1, x_3).$$

Аналогично доказывается инвариантность φ относительно других перестановок аргументов x_1, x_2, x_3. Итак φ – симметричная функция собственных значений тензора или, что эквивалентно, функция его главных инвариантов I_1, I_2, I_3.

Для несимметричного аргумента предыдущая теорема несправедлива. Действительно, рассмотрим в качестве примера функцию $f(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}})$, очевидно являющуюся изотропной. Пусть $\mathbf{X} = \boldsymbol{ab}$, тогда $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = b^2\boldsymbol{aa}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}}) = a^2b^2$. Полученное значение $f(\mathbf{X})$ не может быть выражено через главные инварианты тензора $\mathbf{X}$, имеющие вид $I_1 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $I_2 = I_3 = 0$.

3. Симметрично-значные функции симметричного тензорного аргумента

Теорема. *Изотропная функция $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, аргумент и значение которой являются симметричными тензорами второго ранга, может быть представлена в виде*

$$\mathbf{Y} = f_0\mathbf{E} + f_1\mathbf{X} + f_2\mathbf{X}^2, \tag{28.1}$$

где f_0, f_1, f_2 – некоторые скалярно-значные изотропные функции тензора $\mathbf{X}$ (т.е. функции его главных инвариантов).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Если тензорная функция $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, аргумент и значение которой – симметричные тензоры, изотропна, то тензор-значение $\mathbf{Y}$ соосен с тензором аргументом $\mathbf{X}$, т.е. главные оси (или собственные векторы) этих тензоров совпадают.*

Для доказательства леммы обозначим через $\boldsymbol{d}$ собственный вектор тензора $\mathbf{X}$, а через λ – соответствующее этому вектору собственное значение. Тогда

$$\boldsymbol{d}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}\cdot\boldsymbol{d} = \lambda\boldsymbol{d}.$$

Функция $f(\mathbf{X})$ изотропна, т.е.

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot f(\mathbf{X})\cdot\mathbf{Q} = f(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{Q})$$

для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$. Возьмем в качестве $\mathbf{Q}$ тензор $\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd}$, осуществляющий отражение относительно плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{d}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{Q} &= (\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd})\cdot\mathbf{X}\cdot(\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd}) = \\ &= \mathbf{X} - 2\boldsymbol{dd}\cdot\mathbf{X} - 2\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{dd} + 4\boldsymbol{dd}\cdot\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{dd} = \\ &= \mathbf{X} - 2\lambda\boldsymbol{dd} - 2\lambda\boldsymbol{dd} + 4\lambda\boldsymbol{dd} = \mathbf{X}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$, условие изотропности запишем в виде

$$(\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd})\cdot\mathbf{Y}\cdot(\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd}) = f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y},$$

откуда

$$(\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd})\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\cdot(\mathbf{E}-2\boldsymbol{dd})$$

или

$$\boldsymbol{dd}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\cdot\boldsymbol{dd}.$$

Умножим обе части полученного тензорного равенства на вектор $\boldsymbol{d}$. В результате получим

$$\boldsymbol{d} \cdot \mathbf{Y} = (\boldsymbol{d} \cdot \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{d}.$$

Обозначая число в скобках как λ', окончательно получаем

$$\boldsymbol{d} \cdot \mathbf{Y} = \lambda' \boldsymbol{d},$$

то есть вектор $\boldsymbol{d}$ является собственным вектором и тензора-значения. Доказательство леммы завершено.

Переходим к доказательству теоремы. Обозначив через x_k и y_k собственные числа тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ соответственно, запишем спектральные разложения этих тензоров в виде

$$\mathbf{X} = x_1 \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 + x_2 \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 + x_3 \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3;$$

$$\mathbf{Y} = y_1 \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1 + y_2 \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2 + y_3 \boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3$$

(собственные векторы тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ одинаковы в силу доказанной леммы). Так как $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, то y_k есть функции от x_j. Рассмотрим теперь систему уравнений относительно f_0, f_1 и f_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_1^2; \\ y_2 = f_0 + f_1 x_2 + f_2 x_2^2; \\ y_3 = f_0 + f_1 x_3 + f_2 x_3^2. \end{array} \right. \tag{28.2}$$

Вычислим ее определитель:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{array} \right| = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Если собственные числа тензора $\mathbf{X}$ различны, то система (28.2) имеет единственное решение, и величины f_0, f_1 и f_2 являются вполне определенными функциями собственных значений тензора $\mathbf{X}$ (или его главных инвариантов).

Умножая первое из уравнений (28.2) на $\boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_1$, второе – на $\boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_2$, третье – на $\boldsymbol{d}_3 \boldsymbol{d}_3$ и складывая полученные равенства, находим

$$\mathbf{Y} = f_0 \mathbf{E} + f_1 \mathbf{X} + f_2 \mathbf{X}^2.$$

Рассмотрим теперь случай кратных собственных значений тензора $\mathbf{X}$. Функции f_0, f_1 и f_2 уже не будут определены однозначно, но представление (28.1) по-прежнему может быть построено.

Пусть, например, $x_2 = x_3 \neq x_1$. Как было показано в п.16, тензор $\mathbf{X}$ в этом случае имеет целую плоскость собственных векторов, перпендикулярных вектору $\boldsymbol{d}_1$. Следовательно, такую же плоскость имеет и тензор $\mathbf{Y}$, а значит и у него собственные значения y_2 и y_3 совпадают. В силу сказанного третье уравнение из (28.2) совпадает со вторым и поэтому может быть отброшено. Положим $f_2 = 0$. Система (28.2) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_0 + f_1 x_1 \\ y_2 = f_0 + f_1 x_2 \end{array} \right.$$

Определитель этой системы отличен от нуля, и, следовательно, величины f_0 и f_1 могут быть определены.

В случае совпадения всех трех собственных значений тензора $\mathbf{X}$ будут совпадать и все собственные числа тензора $\mathbf{Y}$, таким образом, все три уравнения (28.2) окажутся равносильными. Рассмотрим первое из них, положив в нем $f_1 = f_2 = 0$. Тогда $f_0 = y_1$, т.е. представление вида (28.1) можно построить и в этом случае. Доказательство теоремы завершено.

Заметим, что приведенное доказательство является чисто алгебраическим: никаких ограничений, связанных с гладкостью, на функцию $f(\mathbf{X})$ не накладывается.

4. Некоторые теоремы об общих представлениях изотропных тензорных функций

Все теоремы данного раздела будут приведены без доказательства.

Теорема. *Скалярно-значная функция вектора $\boldsymbol{x}$ и симметричного тензора $\mathbf{X}$ есть функция следующих шести величин:*

$$\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}},\ I_k(\mathbf{X}),\ \boldsymbol{x}\cdot\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\cdot\mathbf{X}^2\cdot\boldsymbol{x}.$$

Две последние величины называются *относительными инвариантами*; они характеризуют расположение вектора относительно главных осей тензора $\mathbf{X}$.

Теорема. *Любой совместный инвариант двух симметричных тензоров представляет собой функцию главных инвариантов каждого из тензоров $I_k(\mathbf{X}_1)$, $I_k(\mathbf{X}_2)$, а также относительных инвариантов*

$$\operatorname{tr}(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2),\ \operatorname{tr}(\mathbf{X}_1^2\cdot\mathbf{X}_2),\ \operatorname{tr}(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2^2),\ \operatorname{tr}(\mathbf{X}_1^2\cdot\mathbf{X}_2^2). \tag{28.3}$$

Любой совместный инвариант трех симметричных тензоров будет функцией следующих двадцати двух величин:
– инварианты каждого аргумента (9 величин);
– парные относительные инварианты вида (28.3) (12 величин: по четыре для каждой из трех пар);
– общий инвариант $\operatorname{tr}(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2\cdot\mathbf{X}_3)$.

Если рассматривается система произвольного числа симметричных тензоров, то их полный набор инвариантов будет состоять из совместных инвариантов каждой из возможных троек тензоров системы; при этом надо исключить из рассмотрения те из относительных инвариантов, которые тождественными преобразованиями сводятся к уже имеющимся.

Теорема. *Изотропная векторно-значная функция, аргументами которой являются вектор и симметричный тензор, может быть записана как*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mathbf{X}) = (f_0\mathbf{E} + f_1\mathbf{X} + f_2\mathbf{X}^2)\cdot\boldsymbol{x},$$

где f_k – совместные инварианты аргументов.

Теорема. *Изотропная функция двух симметричных тензорных аргументов, значением которой являются симметричные тензоры второго ранга, может быть представлена в виде*

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) = f_0\mathbf{E} + f_1\mathbf{X}_1 + f_2\mathbf{X}_1^2 + f_3\mathbf{X}_2 + f_4\mathbf{X}_2^2 +$$

$$+f_5(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1)+f_6(\mathbf{X}_1^2\cdot\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^2)+f_7(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2^2+\mathbf{X}_2^2\mathbf{X}_1)+f_8(\mathbf{X}_1^2\cdot\mathbf{X}_2^2+\mathbf{X}_2^2\mathbf{X}_1^2),$$

где f_k – совместные инварианты аргументов.

В случае произвольного числа симметричных тензорных аргументов представление изотропной функции имеет вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_1,\,\mathbf{X}_2,\ldots,\,\mathbf{X}_N)=f_0\mathbf{E}+\sum_{i=1}^{N}(f_{i1}\mathbf{X}_i+f_{i2}\mathbf{X}_i^2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\Big[f_{ij1}(\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{X}_j+\mathbf{X}_j\cdot\mathbf{X}_i)+f_{ij2}(\mathbf{X}_i^2\cdot\mathbf{X}_j+\mathbf{X}_j\cdot\mathbf{X}_i^2)+$$

$$+f_{ij3}(\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{X}_j^2+\mathbf{X}_j^2\cdot\mathbf{X}_i)+f_{ij4}(\mathbf{X}_i^2\cdot\mathbf{X}_j^2+\mathbf{X}_j^2\cdot\mathbf{X}_i^2)\Big].$$

Упражнения.

107. Доказать корректность определения группы симметрии тензорной функции нескольких тензорных аргументов

108. Каким должен быть тензор $\mathbf{A}$, чтобы функция $f(\mathbf{X})=\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})$, где $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$, была бы изотропной?

109. Доказать, что функцию $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ невозможно представить в виде квадратного трехчлена от $\mathbf{X}$.

§29. Дифференцирование тензорных функций.

Пусть $f(\mathbf{X})$ – тензорная функция, действующая из $\mathcal{T}_p$ в $\mathcal{T}_q$.

Определение. Если существует такой тензор ранга $p+q$, обозначаемый $f_{,\mathbf{X}}$, что для любого тензора $\mathbf{B}\in\mathcal{T}_p$ выполняется соотношение

$$f_{,\mathbf{X}}\odot\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\mathbf{X}+\alpha\mathbf{B})_{|\alpha=0},\tag{29.1}$$

то этот тензор $f_{,\mathbf{X}}$ называется производной тензорной функции f по тензорному аргументу $\mathbf{X}$.

Заметим, что частная производная $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ в определении производной тензорной функции может быть представлена соотношением

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(\mathbf{X}+\alpha\mathbf{B})_{|\alpha=0}=\lim_{\alpha\to0}\frac{f(\mathbf{X}+\alpha\mathbf{B})-f(\mathbf{X})}{\alpha}.$$

Таким образом, определение тензорной производной действительно является обобщением понятия производной обычной скалярно-значной функции.

Обозначим тензор $\mathbf{B}$ в определении (29.1) через $\mathrm{d}\mathbf{X}$, а $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\mathbf{X}+\alpha\mathbf{B})\big|_{\alpha=0}$ через $\mathrm{d}f$. Тогда можно получить другое определение производной тензорной функции, как линейной составляющей ее полного приращения:

$$\mathrm{d}f = f_{,\mathbf{X}} \odot \mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{29.2}$$

Соотношение (29.2) в ряде случаев является более удобным для практического вычисления тензорных производных.

Зафиксируем некоторый векторный базис $\{\boldsymbol{e}_k\}$:

$$\mathbf{X} = X^{mn\ldots k}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\ldots\boldsymbol{e}_k;$$

$$\mathbf{Y} = Y^{rs\ldots t}\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_s\ldots\boldsymbol{e}_t.$$

Компонентное представление функции f имеет вид

$$Y^{rs\ldots t} = f^{rs\ldots t}(X^{mn\ldots k}).$$

Подставив его в правую часть соотношения (29.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f^{rs\ldots t}(X^{mn\ldots k}+\alpha B^{mn\ldots k})\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_s\ldots\boldsymbol{e}_t\big|_{\alpha=0} = \frac{\partial f^{rs\ldots t}}{\partial X^{mn\ldots k}} B^{mn\ldots k}\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_s\ldots\boldsymbol{e}_t.$$

Следовательно, тензор $f_{,\mathbf{X}}$ имеет вид

$$f_{,\mathbf{X}} = \frac{\partial f^{rs\ldots t}}{\partial X^{mn\ldots k}} \underbrace{\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_s\ldots\boldsymbol{e}_t}_{q \text{ векторов}}\underbrace{\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n\ldots\boldsymbol{e}^k}_{p \text{ векторов}}. \tag{29.3}$$

Таким образом, компоненты производной тензорной функции представляют собой совокупность частных производных компонентных функций по компонентам тензора-аргумента.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Векторная функция векторного аргумента.

Получим представление производной функции $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ с использованием соотношения (29.2):

$$\mathrm{d}f = f_{,\boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

или

$$(\mathrm{d}y^k)\boldsymbol{e}_k = f_{,\boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}x^i\boldsymbol{e}_i.$$

Учтя, что $\mathrm{d}y^k = \dfrac{\partial y^k}{\partial x^s}\mathrm{d}x^s$, получаем

$$f_{,\boldsymbol{x}} = \frac{\partial y^k}{\partial x^s}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}^s.$$

Очевидно, что полученное выражение является частным случаем представления (29.3).

2. Скалярно-значная функция тензорного аргумента.

Пусть $y = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$. Выражение для дифференциала $\mathrm{d}f$ с использованием различных (ко-, контравариантных и смешанных) компонент тензора $\mathbf{X}$ имеет вид

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial X^{mn}}\mathrm{d}X^{mn} = \frac{\partial f}{\partial X_{mn}}\mathrm{d}X_{mn} = \frac{\partial f}{\partial X^{m}_{.n}}\mathrm{d}X^{m}_{.n} = \frac{\partial f}{\partial X_{m}^{.n}}\mathrm{d}X_{m}^{.n}.$$

В соответствии с этим можно построить четыре различных представления тензора $f_{,\mathbf{X}}$:

$$f_{,\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial X^{mn}}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n = \frac{\partial f}{\partial X_{mn}}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n = \frac{\partial f}{\partial X^{m}_{.n}}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}_n = \frac{\partial f}{\partial X_{m}^{.n}}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}^n.$$

Для различных компонент тензора $\mathbf{\Phi} = f_{,\mathbf{X}}$ мы получили тем самым следующие выражения:

$$\varPhi_{mn} = \frac{\partial f}{\partial X^{mn}};\quad \varPhi^{mn} = \frac{\partial f}{\partial X_{mn}};\quad \varPhi_{m}^{.n} = \frac{\partial f}{\partial X^{m}_{.n}};\quad \varPhi^{m}_{.n} = \frac{\partial f}{\partial X_{m}^{.n}}. \tag{29.4}$$

Если же функция $f(\mathbf{X})$ есть функция симметричного тензорного аргумента, то полученные формулы перестают быть справедливыми. Это связано с тем, что функция f в этом случае зависит уже не от девяти, а только от шести независимых аргументов. Для корректировки формул (29.4) заметим сначала, что производная скалярно-значной функции симметричного тензора представляет собой симметричный тензор. Действительно, если обратиться к определению (29.1), учесть, что тензор $\mathbf{B}$ – симметричный и вспомнить, что полное произведение симметричного тензора на антисимметричный равно нулю, то легко установить, что в этом случае определением (29.1) производная определяется с точностью до произвольной антисимметричной составляющей. Поэтому для определенности полагаем эту антисимметричную часть нулевой.

Сравним теперь два выражения:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial X^{11}}\mathrm{d}X^{11} + \frac{\partial f}{\partial X^{12}}\mathrm{d}X^{12} + \frac{\partial f}{\partial X^{13}}\mathrm{d}X^{13} + \ldots$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi} \odot \mathrm{d}\mathbf{X} &= \Big[\varPhi_{11}\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^1 + \varPhi_{12}(\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^1) + \ldots\Big] \odot \\ &\quad \odot \Big[\mathrm{d}X^{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}X^{12}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1) + \ldots\Big] = \\ &= \varPhi_{11}\mathrm{d}X^{11} + 2\varPhi_{12}\mathrm{d}X^{12} + \ldots.\end{aligned}$$

Это сравнение приводит к следующим выражениям для компонент производной:

$$\varPhi_{11} = \frac{\partial f}{\partial X^{11}};\quad \varPhi_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial X^{12}} \quad \text{и т.д.}$$

Рассмотрим примеры.

1) $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$.

Вычислим $f_{,\mathbf{X}}$, используя (29.1).

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{B})\big|_{\alpha=0} = \mathbf{B},$$

таким образом, $f_{,\mathbf{X}} \odot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, и мы приходим к задаче определения тензора четвертого ранга, соответствующего линейной функции $l(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$. С использованием формулы (8.1) легко показать, что этот тензор имеет вид

$$\mathbf{X}_{,\mathbf{X}} = (\mathbf{E}\mathbf{E})^{\mathrm{T}(2,3)}.$$

Аналогично доказывается соотношение

$$(\mathbf{X}^{\mathrm{T}})_{,\mathbf{X}} = (\mathbf{E}\mathbf{E})^{\mathrm{T}(2,4)}.$$

2) $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2$.
Вычислим производную этой функции с использованием определения (29.2). Получим выражение дифференциала $\mathrm{d}\mathbf{Y}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{Y} = \mathrm{d}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}.$$

Поскольку тензоры $\mathbf{X}$ и $\mathrm{d}\mathbf{X}$ не обязаны быть коммутативными, то $\mathrm{d}\mathbf{X}^2 \neq 2\mathbf{X} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}$; таким образом получить общую формулу дифференцирования степени тензора, аналогичную случаю функции одного переменного, невозможно. Возвращаясь к примеру и вспоминая, что дифференциал $\mathrm{d}\mathbf{Y}$ должен быть представлен в виде

$$\mathrm{d}\mathbf{Y} = f_{,\mathbf{X}} \odot \mathrm{d}\mathbf{X},$$

как и в предыдущем случае получаем задачу определения тензора $\mathbf{L}$, соответствующего линейной функции

$$l(\mathrm{d}\mathbf{X}) = \mathrm{d}\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}.$$

Легко проверить, что этот тензор (как раз и представляющий собой искомую производную) имеет вид

$$\mathbf{L} = (\mathbf{X}\mathbf{E})^{\mathrm{T}(2,4)} + (\mathbf{X}\mathbf{E})^{\mathrm{T}(2,3)}.$$

§30. Группа симметрии производной тензорной функции.

Теорема. Производная изотропной тензорной функции является изотропной тензорной функцией.

Доказательство теоремы проведем для частного случая скалярно-значной функции $f : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_0$, условие изотропности которой имеет вид

$$f(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) = f(\mathbf{X}).$$

Производную функции $f(\mathbf{X})$ обозначим через $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$. Используя условие изотропности, вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{B})\big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q} + \alpha \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q})\big|_{\alpha=0}.$$

С учетом определения производной (29.1) предыдущее равенство можно преобразовать к виду

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) \odot \mathbf{B} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \odot (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}).$$

Правая часть полученного соотношения преобразуется следующим образом

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \odot (\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q}\right) =$$

$$= \operatorname{tr}\left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right) = \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\right) \odot \mathbf{B}.$$

Таким образом, для любого тензора $\mathbf{B}$ должно выполняться соотношение

$$\left[\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\right] \odot \mathbf{B} = 0$$

Из произвольности $\mathbf{B}$ следует, что выражение в квадратных скобках должно быть тождественно равно нулю. Таким образом,

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

или

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Q}.$$

Полученное равенство (выполняющееся для всех значений аргумента $\mathbf{X}$ и для любого ортогонального тензора $\mathbf{Q}$) означает изотропность функции $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$. Доказательство завершено.

Легко видеть, что на самом деле было доказано более общее, чем сама теорема, утверждение, а именно тот факт, что если ортогональный тензор $\mathbf{Q}$ принадлежит группе симметрии функции $f(\mathbf{X})$, то он принадлежит и группе симметрии ее производной. Это означает, что группа симметрии производной тензорной функции содержит в себе группу симметрии самой исходной функции.

§31. Дифференцирование главных инвариантов тензора второго ранга.

Любая скалярно-значная изотропная функция симметричного тензорного аргумента есть функция главных инвариантов своего аргумента:

$$f(\mathbf{X}) = f(I_1, I_2, I_3).$$

Это представление позволяет получить следующее выражение для производной функции f:

$$f_{,\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} I_{1,\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_2} I_{2,\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_3} I_{3,\mathbf{X}}.$$

Частные производные $\partial f / \partial I_k$ связаны с конкретным представлением функции $f(\mathbf{X})$, а вот производные главных инвариантов тензора могут быть вычислены явно. Именно этому вычислению и посвящен данный пункт.

1) $I_1(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}\mathbf{X}$.
Для вычисления $I_{1,\mathbf{X}}$ преобразуем выражение

$$\mathrm{d}I_1 = \mathrm{d}(\operatorname{tr}\mathbf{X}) = \mathrm{d}(\operatorname{tr}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{X})) = \mathrm{d}(\mathbf{E}\odot\mathbf{X}) = \mathbf{E}\odot\mathrm{d}\mathbf{X}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$I_{1,\mathbf{X}} = \mathbf{E}. \tag{31.1}$$

2) $I_2(\mathbf{X}) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{tr}^2\mathbf{X} - \operatorname{tr}\mathbf{X}^2)$.
Вычисляем

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}I_2 &= \frac{1}{2}[2\operatorname{tr}\mathbf{X}\,\mathrm{d}(\operatorname{tr}\mathbf{X}) - \operatorname{tr}\mathrm{d}(\mathbf{X}^2)] = \\
&= \frac{1}{2}[2\operatorname{tr}\mathbf{X}\,\mathbf{E}\odot\mathrm{d}\mathbf{X} - \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} + \mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X})] = \\
&= \frac{1}{2}[2\operatorname{tr}\mathbf{X}\,\mathbf{E}\odot\mathrm{d}\mathbf{X} - 2\operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X})] \\
&= (\operatorname{tr}\mathbf{X}\,\mathbf{E} - \mathbf{X}^{\mathrm{T}})\odot\mathrm{d}\mathbf{X}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_{2,\mathbf{X}} = \mathbf{E}\operatorname{tr}\mathbf{X} - \mathbf{X}^{\mathrm{T}}. \tag{31.2}$$

3) $I_3 = \det\mathbf{X}$.
Для вычисления производной зададим тензор $\mathbf{X}$ его компонентами в некотором ортонормированном базисе и воспользуемся определением (29.1). Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{vmatrix} X_{11}+\alpha B_{11} & X_{12}+\alpha B_{12} & X_{13}+\alpha B_{13} \\ X_{21}+\alpha B_{21} & X_{22}+\alpha B_{22} & X_{23}+\alpha B_{23} \\ X_{31}+\alpha B_{31} & X_{32}+\alpha B_{32} & X_{33}+\alpha B_{33} \end{vmatrix}_{\alpha=0}.$$

Заметим, что данная производная будет совпадать с коэффициентом при α в первой степени в разложении приведенного выше определителя по степеням α (член с α^0 обратится в нуль при дифференцировании; члены с α^2 и α^3 после дифференцирования будут пропорциональны α и α^2 соответственно, а следовательно, обратятся в нуль при подстановке $\alpha = 0$). С учетом сказанного, выражению для производной определителя можно придать вид

$$X_{11}(X_{22}B_{33} + B_{22}X_{33} - X_{23}B_{32} - B_{23}X_{32}) + B_{11}(X_{22}X_{33} - X_{23}X_{32}) -$$

$$X_{12}(X_{33}B_{21} + B_{33}X_{21} - X_{23}B_{31} - B_{23}X_{31}) - B_{12}(X_{21}X_{33} - X_{23}X_{31}) +$$

$$X_{13}(X_{21}B_{32} + B_{21}X_{32} - X_{22}B_{31} - B_{22}X_{31}) + B_{11}(X_{21}X_{32} - X_{22}X_{31}).$$

Собирая слагаемые при величинах B_{ks}, полученное выражение запишем как

$$B_{11}(X_{22}X_{33} - X_{23}X_{32}) + B_{22}(X_{11}X_{33} - X_{13}X_{31}) + B_{33}(X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}) +$$

$$B_{12}(X_{31}X_{23} - X_{21}X_{33}) + B_{13}(X_{21}X_{32} - X_{31}X_{22}) + B_{21}(X_{12}X_{33} - X_{13}X_{32}) +$$

$$B_{23}(X_{12}X_{31} - X_{11}X_{32}) + B_{31}(X_{12}X_{23} - X_{13}X_{22}) + B_{32}(X_{13}X_{21} - X_{11}X_{23}).$$

Легко видеть, что коэффициенты при B_{ks} представляют собой алгебраические дополнения к элементам X_{ks} матрицы компонент тензора $\mathbf{X}$.

Определение. Тензор, матрица смешанных компонент которого совпадает с транспонированной матрицей алгебраических дополнений матрицы смешанных компонент тензора $\mathbf{X}$ (в алгебре такая матрица называлась присоединенной) называется *присоединенным* тензором для тензора $\mathbf{X}$ и обозначается $\mathbf{X}^{-}$.

С учетом сделанного определения выражению для производной определителя можно придать вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left|X_{mn}+\alpha B_{mn}\right|\Big|_{\alpha=0}=B_{sk}\tilde{X}_{ks},$$

где $\tilde{X}_{ks}$ – компоненты присоединенного тензора. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}I_3(\mathbf{X}+\alpha\mathbf{B})\Big|_{\alpha=0}=(\mathbf{X}^{-})^{\mathrm{T}}\odot\mathbf{B},$$

следовательно

$$I_{3,\mathbf{X}}=(\mathbf{X}^{-})^{\mathrm{T}}. \tag{31.3$_1$}$$

Если тензор $\mathbf{X}$ неособый, то, как известно из алгебры, обратный к нему может быть выражен через присоединенный по формуле $\mathbf{X}^{-1}=(\det\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^{-})^{\mathrm{T}}$. Следовательно, в этом случае формула производной третьего инварианта примет вид

$$I_{3,\mathbf{X}}=I_3\mathbf{X}^{-\mathrm{T}}. \tag{31.3$_2$}$$

С учетом полученных формул (31.1)–(31.3$_2$) выражению производной скалярно-значной изотропной функции симметричного тензорного аргумента можно придать вид

$$f_{,\mathbf{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial f}{\partial I_2}\right)\mathbf{E}-\frac{\partial f}{\partial I_2}\mathbf{X}+I_3\frac{\partial f}{\partial I_3}\mathbf{X}^{-1}. \tag{31.4}$$

§32. Дифференцирование изотропной тензорной функции, аргумент и значение которой являются симметричными тензорами второго ранга.

Пусть задана изотропная тензорная функция

$$\mathbf{Y}=f(\mathbf{X}) \tag{32.1}$$

симметричного тензорного аргумента, значениями которой являются симметричные тензоры второго ранга. Запишем спектральное представление ее аргумента и значения:

$$\mathbf{X}=\sum_{k=1}^{3}x_k\boldsymbol{d}_k\boldsymbol{d}_k;\qquad \mathbf{Y}=\sum_{k=1}^{3}y_k\boldsymbol{d}_k\boldsymbol{d}_k, \tag{32.2}$$

где $\boldsymbol{d}_k$ – единичные собственные векторы тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, x_k и $y_k=y_k(x_1,x_2,x_3)$ – их собственные значения.

Пусть тензор $\mathbf{X}$ является, в свою очередь, функцией некоторого скалярного параметра t. Связь (32.1) превращает тензор $\mathbf{Y}$ в функцию этого же параметра. Наша цель будет состоять в выражении производной $\mathrm{d}\mathbf{Y}/\mathrm{d}t$ (которую мы будем обозначать $\dot{\mathbf{Y}}$) через производную $\dot{\mathbf{X}}$.

На основании (32.2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \sum_{k=1}^{3}(\dot{x}_k \boldsymbol{d}_k\boldsymbol{d}_k + x_k\dot{\boldsymbol{d}}_k\boldsymbol{d}_k + x_k\boldsymbol{d}_k\dot{\boldsymbol{d}}_k); \\ \dot{\mathbf{Y}} &= \sum_{k=1}^{3}(\dot{y}_k \boldsymbol{d}_k\boldsymbol{d}_k + y_k\dot{\boldsymbol{d}}_k\boldsymbol{d}_k + y_k\boldsymbol{d}_k\dot{\boldsymbol{d}}_k). \end{aligned} \tag{32.3}$$

Дифференцируя равенство $\boldsymbol{d}_s \cdot \boldsymbol{d}_k = \delta_{sk}$, получаем

$$\dot{\boldsymbol{d}}_s\boldsymbol{d}_k + \boldsymbol{d}_s\dot{\boldsymbol{d}}_k = 0, \tag{32.4}$$

а в частном случае, при $s = k$

$$\dot{\boldsymbol{d}}_k \cdot \boldsymbol{d}_k = 0 \quad \text{(не суммировать по } k!\text{)}. \tag{32.5}$$

Из (32.3), (32.5) находим

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_1 = \dot{x}_1, \quad \boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2 = \dot{x}_2, \quad \boldsymbol{d}_3 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3 = \dot{x}_3;$$

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_1 = \dot{y}_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial y_1}{\partial x_3}\dot{x}_3.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_1) + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2) + \frac{\partial y_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{d}_3 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3).$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_1) + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2) + \frac{\partial y_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{d}_3 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3), \\ \boldsymbol{d}_3 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_3 &= \frac{\partial y_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_1) + \frac{\partial y_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2) + \frac{\partial y_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{d}_3 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3). \end{aligned} \tag{32.6}$$

Умножим теперь (32.3) слева на $\boldsymbol{d}_1$, а справа – на $\boldsymbol{d}_2$. Учитывая (32.4), получим

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_2 = y_2\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_2 + y_1\dot{\boldsymbol{d}}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2 = (y_1 - y_2)\dot{\boldsymbol{d}}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2,$$

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2 = (x_1 - x_2)\dot{\boldsymbol{d}}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2.$$

Из последнего равенства находим:

$$\dot{\boldsymbol{d}}_1 \cdot \boldsymbol{d}_2 = \frac{\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2}{x_1 - x_2},$$

а значит,

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_2.$$

Аналогично получаем

$$\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_3 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\boldsymbol{d}_1 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3,$$
$$\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_3 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3. \tag{32.7}$$

Формулы (32.6), (32.7) дают выражение всех компонент тензора $\dot{\mathbf{Y}}$ через компоненты тензора $\dot{\mathbf{X}}$.

Для функции частного вида $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^p$ частные производные $\partial y_k / \partial x_s$ обращаются в ноль при $k \neq s$. В этом случае формулы (32.7) могут быть уточнены для случая совпадения какой-либо пары собственных чисел тензора $\mathbf{X}$. Пусть, например, $x_2 = x_3$. Тогда и $y_2 = y_3$, и после предельного перехода последняя формула в (32.7) принимает вид

$$\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{Y}} \cdot \boldsymbol{d}_3 = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2}\boldsymbol{d}_2 \cdot \dot{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{d}_3.$$

33. Аналитические функции тензора второго ранга.

Пусть $f : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_2$.

Определение. Если тензорно-значную функцию $f(\mathbf{X})$ можно представить в виде сходящегося ряда

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{X}^k, \tag{33.1}$$

то такая тензорная функция называется *аналитической*.

Сходимость ряда (33.1) понимается по норме $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X} \odot \mathbf{X}}$. Легко видеть, что этот ряд представляет собой изотропную тензорную функцию.

Данное определение дает возможность вводить такие функции как $\sin \mathbf{X}$, $\exp \mathbf{X}$ и т.п., пользуясь соответствующими аналитическими разложениями классических скалярных функций. В случае симметричного тензорного аргумента

$$f(\mathbf{X}) = f(\lambda_1 \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_2^k \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_3^k \boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3.$$

Полученное равенство означает, что в этом случае функции типа $\sin \mathbf{X}$ могут быть эквивалентным образом введены следующим определением:

$$\sin \mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} \sin \lambda_1 \boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_1 + \sin \lambda_2 \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_2 + \sin \lambda_3 \boldsymbol{d}_3\boldsymbol{d}_3.$$

Тензор $\mathbf{X}$ в определении (33.1) вовсе не обязан быть быть симметричным. Тем не менее, с использованием формулы Гамильтона-Кэли каждую степень $\mathbf{X}$ в (33.1) можно представить в виде квадратного трехчлена от $\mathbf{X}$ с коэффициентами, зависящими от инвариантов. Следовательно, любая аналитическая функция допускает представление

$$f(\mathbf{X}) = f_0 \mathbf{E} + f_1 \mathbf{X} + f_2 \mathbf{X}^2. \tag{33.2}$$

Сравнивая этот результат с результатом п.28 (представление (28.1)), получаем, что в виде (33.2) могут быть представлены изотропные функции симметричного аргумента и произвольные аналитические функции. В случае изотропных функций, не являющихся аналитическими, условие симметричности аргумента существенно: даже такую простую функцию, как $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ (очевидно, изотропную и не аналитическую) невозможно представить в виде квадратного трехчлена.

Рассмотрим в качестве примера функцию

$$\exp \mathbf{X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{X}^k.$$

Очевидно, что $(\exp \mathbf{X})^{\mathrm{T}} = \exp(\mathbf{X}^{\mathrm{T}})$. В отличие от классического анализа, вообще говоря $\exp \mathbf{X} \cdot \exp \mathbf{Y} \neq \exp(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$. Последнее равенство будет выполняться лишь для коммутирующих тензоров, то есть при условии $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$. Если тензор $\mathbf{X}$ неособый, то $\exp \mathbf{X} \cdot \exp(-\mathbf{X}) = \mathbf{E}$.

Записав экспоненту симметричного тензора $\mathbf{X}$ в виде

$$\exp \mathbf{X} = \sum_{s=1}^{3} \mathrm{e}^{\lambda_s} \boldsymbol{d}_s \boldsymbol{d}_s,$$

для $\det(\exp \mathbf{X})$ получаем выражение

$$\det(\exp \mathbf{X}) = \mathrm{e}^{\lambda_1} \mathrm{e}^{\lambda_2} \mathrm{e}^{\lambda_3} = \mathrm{e}^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} \mathbf{X}}. \tag{33.3}$$

Можно доказать, что формула (33.30 верна и для несимметричных тензоров.

Рассмотрим теперь случай антисимметричного аргумента, т.е. выражение $\exp \boldsymbol{\Omega}$ при $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\Omega}$. Как было показано выше, $(\exp \boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{T}} = \exp(-\boldsymbol{\Omega})$, следовательно

$$\exp \boldsymbol{\Omega} \cdot (\exp \boldsymbol{\Omega})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E},$$

то есть тензор $\exp \boldsymbol{\Omega}$ является ортогональным. Если тензор $\boldsymbol{\Omega}$ представить в виде $\boldsymbol{\Omega} = \chi \boldsymbol{k} \times \mathbf{E}$ ($\boldsymbol{k}$ –единичный вектор), то ортогональный тензор $\mathbf{Q} = \exp(\chi \boldsymbol{k} \times \mathbf{E})$ запишется так (ср. с формулой (14.1))

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}) \cos \chi + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k} \times \mathbf{E} \sin \chi.$$

Как отмечалось в п.29, дифференцирование функции $\mathbf{X}^n$ является весьма трудоемкой задачей, причем выражение для производной такой функции состоит из n слагаемых. Это означает, что формулы дифференцирования классического анализа не могут быть применены к аналитическим функциям тензорного аргумента.

Практическая формула дифференцирования может быть получена для скалярно-значной функции $\varphi(\mathbf{X})$ вида $\varphi(\mathbf{X}) = \operatorname{tr} f(\mathbf{X})$, где $f(\mathbf{X})$ – аналитическая функция вида (33.1). В этом случае

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}(\operatorname{tr} f(\mathbf{X})) = \operatorname{tr} \mathrm{d} f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{tr} \mathrm{d}(\mathbf{X}^k).$$

Выражение $\mathrm{tr}\,\mathrm{d}(\mathbf{X}^k)$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\mathrm{d}(\mathbf{X}^k) &= \mathrm{tr}\,(\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\underbrace{\mathbf{X}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}}_{k-1}+\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}+\ldots+\underbrace{\mathbf{X}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}}_{k-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}) = \\ &= \mathrm{tr}\,(k\mathbf{X}^{k-1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}) = k(\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{k-1}\odot\mathrm{d}\mathbf{X}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\,\mathrm{tr}\,\mathbf{X}^k)_{,\mathbf{X}} = k(\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{k-1},$$

а значит

$$(\,\mathrm{tr}\,f(\mathbf{X}))_{,\mathbf{X}} = f'(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}).$$

В последнем равенстве f и f' соответствуют скалярным функциям классического анализа. Так, например,

$$(\,\mathrm{tr}\,\sin(\mathbf{X}))_{,\mathbf{X}} = \cos\mathbf{X}^{\mathrm{T}}.$$

Воспользовавшись выражениями I_2 и I_3 через моменты $\mathrm{tr}\,\mathbf{X}^k$, можно получить выражения для производных функций $I_2(f(\mathbf{X}))$ и $I_3(f(\mathbf{X}))$.

Упражнения.

110. Доказать теорему об изотропности производной изотропной тензорной функции для случая произвольных рангов аргумента и значения функции

111. Найти производную тензорной функции

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{K}\odot\mathbf{X})\mathbf{E}, \quad \mathbf{K},\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2.$$

112. Найти производную тензорной функции

$$y(\mathbf{X}) = \,\mathrm{tr}\,\cos\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}\in\mathcal{T}_2.$$

113. Найти производную функции

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})\mathbf{E}, \quad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} = \mathrm{const}.$$

114. Найти производную функции

$$y(\mathbf{X}) = 3(I_1-3)^{\alpha} + 4(I_2-3)^{\beta}$$

где I_1, I_2 – главные инварианты тензора $\mathbf{X}$.

115. Найти производную функции

$$y(\mathbf{X}) = \,\mathrm{tr}\,\exp\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}\in\mathcal{T}_2.$$

116. Найти производную тензорной функции

$$y(\mathbf{X}) = \ln \det \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2.$$

117. Найти производную функции

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{x}, \quad \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2,\ \mathbf{B} = \mathrm{const}.$$

118. Найти производную по тензорному аргументу функции

$$\boldsymbol{y}(\mathbf{X}) = 3(\operatorname{tr} \mathbf{X})\mathbf{X}_{\times}.$$

119. Продифференцировать по тензорному аргументу функцию

$$y(\mathbf{X}) = \sqrt{\mathbf{X} \odot \mathbf{X}},$$

где $\mathbf{X}$ – тензор произвольного ранга.

120. Найти производную функции

$$y(\mathbf{X}) = (\operatorname{tr} \cos \mathbf{X})^{\alpha}.$$

121. Продифференцировать функцию

$$y(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}), \quad \mathbf{B} = \mathrm{const}, \quad \mathbf{B}, \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2.$$

122. Найти вторую производную функции

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{x}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathrm{const}.$$

123. Вычислить производную по тензорному аргументу $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$ функции

$$y(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \odot \mathbf{X}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2.$$

124. Продифференцировать по тензорному аргументу функцию

$$y(\mathbf{X}) = (\det \mathbf{X})^4,$$

где $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$.

125. Найти вторую производную по векторному аргументу $(y_{,\boldsymbol{x}})_{,\boldsymbol{x}}$ для функции $y = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x})^2$, где $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$.

126. Найти производную тензорной функции

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{X}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$, $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$.

127. Найти производную тензорной функции

$$\mathbf{y} = (\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{a},$$

где $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$, $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$.

§34. Евклидово точечное пространство.

Определение. *Точечным евклидовым (аффинным) пространством* $\mathcal{E}_3$ называется множество элементов, именуемых *точками* и обозначаемых $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ и т.д., которое связано с векторным евклидовым пространством $Э_3$ отображением l : $\mathcal{E}_3\times\mathcal{E}_3\to Э_3$, ставящим в соответствие каждой упорядоченной паре точек некоторый вектор $l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$, обозначаемый $\overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}}$ и обладающий следующими свойствами:
1. Для любых трех точек $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ из $\mathcal{E}_3$

$$\overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}} + \overrightarrow{\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{c}} + \overrightarrow{\underset{\sim}{c}\underset{\sim}{a}} = 0.$$

2. Для любой точки $\underset{\sim}{a}\in\mathcal{E}_3$ и любого вектора $\boldsymbol{h}\in Э_3$ существует, причем единственная точка $\underset{\sim}{b}$, такая что $\overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}} = \boldsymbol{h}$.

Из свойства 1 отображения $l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ сразу вытекает, что

$$\overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{a}} = 0;$$

$$\overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}} + \overrightarrow{\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{a}} = 0 \quad \text{или} \quad \overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}} = -\overrightarrow{\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{a}}\ .$$

Свойство 2 дает основания для следующей условной записи:

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} + \boldsymbol{h}.$$

Легко видеть, что

$$(\underset{\sim}{a} + \boldsymbol{h}) + \boldsymbol{k} = \underset{\sim}{a} + (\boldsymbol{h} + \boldsymbol{k}).$$

Действительно, обозначим через $\underset{\sim}{b}$ точку $\underset{\sim}{a} + \boldsymbol{h}$, а через $\underset{\sim}{c}$ – точку $\underset{\sim}{b} + \boldsymbol{k}$. Тогда

$$0 = \overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b}} + \overrightarrow{\underset{\sim}{b}\underset{\sim}{c}} + \overrightarrow{\underset{\sim}{c}\underset{\sim}{a}} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{k} + \overrightarrow{\underset{\sim}{c}\underset{\sim}{a}}\ .$$

Следовательно

$$\overrightarrow{\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{c}} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{k}, \quad \text{то есть } \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} + (\boldsymbol{h} + \boldsymbol{k}).$$

Пространство $\mathcal{E}_3$ не является линейным; в нем не определены операции сложения точек или умножения точек на числа.

Если зафиксировать некоторую точку $\underset{\sim}{O}$ в $\mathcal{E}_3$, то тогда любой точке $\underset{\sim}{x}\in\mathcal{E}_3$ (в силу свойства 2) можно поставить в соответствие однозначно определенный вектор $\boldsymbol{R}$, такой что $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{O} + \boldsymbol{R}$. Фиксирование точки $\underset{\sim}{O}$ называется выбором *начала отсчета*, а вектор $\boldsymbol{R}$ называется *радиус-вектором* точки $\underset{\sim}{x}$. После выбора начала отсчета между элементами $\mathcal{E}_3$ и $Э_3$ устанавливается взаимно однозначное соответствие, т.е. каждая точка имеет свой радиус-вектор, и любому радиус-вектору соответствует некоторая точка.

Если в пространстве $Э_3$ зафиксировать некоторый ортонормированный базис $\boldsymbol{i}_k$, то компоненты X_k радиус-вектора $\boldsymbol{R} = X_k\boldsymbol{i}_k$, соответствующего точке $\underset{\sim}{x}$, в этом ортонормированном базисе будем называть *декартовыми координатами* точки $\underset{\sim}{x}$.

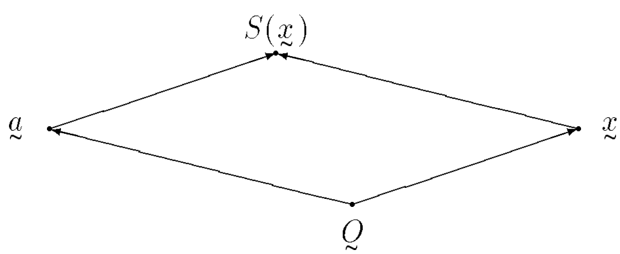
Автоморфизмом в пространстве $\mathcal{E}_3$ называется отображение $S(\underset{\sim}{x}) : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, обладающее следующим свойством:

$$| \overrightarrow{\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{y}} | = | \overrightarrow{S(\underset{\sim}{x})S(\underset{\sim}{y})} |.$$

Из геометрических соображений очевидно, что преобразование $S(\underset{\sim}{x})$ должно сводиться к комбинации поворота и параллельного переноса, а следовательно, записываться в виде

$$S(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{a} + \overrightarrow{\underset{\sim}{O}\underset{\sim}{x}} \cdot \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{Q}$ – некоторый ортогональный тензор (заметим, что для данного преобразования $\underset{\sim}{a} = S(\underset{\sim}{O})$). Действительно, пусть $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ (нет поворота). Тогда $S(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{a} + \overrightarrow{\underset{\sim}{O}\underset{\sim}{X}}$:



Очевидно, что в этом случае $S(\underset{\sim}{x})$ описывает параллельный перенос (трансляцию) на вектор $\overrightarrow{\underset{\sim}{O}\underset{\sim}{a}}$. Пусть теперь $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{O}$. Тогда преобразование $S(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{O} + \overrightarrow{\underset{\sim}{O}\underset{\sim}{x}} \cdot \mathbf{Q}$ представляет собой поворот (плюс, быть может, отражение) вокруг точки $\underset{\sim}{O}$.

§35. Тензорное поле. Градиент тензорного поля.

Определение. *Тензорным полем* называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке некоторой области аффинного пространства $\mathcal{E}_3$ определенный тензор произвольного ранга:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\underset{\sim}{x}).$$

Если в $\mathcal{E}_3$ фиксировано начало отсчета, то тензорное поле может быть задано как функция радиус-вектора точки или ее декартовых координат:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{P}(X_1, X_2, X_3).$$

Примерами тензорных полей могут служить поле нормалей $\boldsymbol{N}$ на сфере (векторное поле), поле радиус-вектора $\boldsymbol{R}$ (векторное поле), поле вида $\mathbf{E} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}$ (поле тензоров второго ранга).

Пусть $\mathbf{P}(\underset{\sim}{x}) \in \mathcal{T}_q$ – некоторое тензорное поле.

Определение. Если существует тензор ранга $q+1$, обозначаемый $\nabla\mathbf{P}$ или $\mathrm{Grad}\,\mathbf{P}$, такой что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется соотношение

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbf{P}(\underset{\sim}{x}+\alpha\boldsymbol{a})_{|\alpha=0},$$

то этот тензор $\nabla\mathbf{P}$ называется *градиентом* тензорного поля $\mathbf{P}(\underset{\sim}{x})$.

Обозначив $\boldsymbol{a}$ как $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$, получим следующее соотношение:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\nabla\mathbf{P} = \mathrm{d}\mathbf{P}. \tag{35.1}$$

Оно означает, что через градиент выражается линейная часть приращения тензорного поля при перемещении из одной точки в соседнюю с ней.

Получим выражение градиента тензорного поля с использованием декартовых координат:

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbf{P}(X_k+\alpha a_k)_{|\alpha=0} = a_k\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k} =$$
$$= a_s\delta_{sk}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k} = a_s\boldsymbol{i}_s\cdot\boldsymbol{i}_k\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k} = \boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{i}_k\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k}\right).$$

С учетом произвольности вектора $\boldsymbol{a}$ получаем

$$\nabla\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_k\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k}. \tag{35.2}$$

Если $\varphi(\underset{\sim}{x})$ – скалярное поле, то его градиент представляет собой вектор, вычисляемый по формуле $\nabla\varphi = \boldsymbol{i}_k\partial\varphi/\partial X_k$. Оператор вычисления градиента

$$\nabla = \boldsymbol{i}_k\frac{\partial}{\partial X_k}$$

называется *набла-оператором Гамильтона*. Заметим, что он имеет ранг вектора.

§36. Дивергенция и ротор тензорного поля.

Определение. *Дивергенцией* тензорного поля $\mathbf{P}$ называется величина, обозначаемая $\nabla\cdot\mathbf{P}$ или $\mathrm{Div}\,\mathbf{P}$ и вычисляемая по формуле

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \mathrm{tr}_{(1,2)}\nabla\mathbf{P}. \tag{36.1}$$

С учетом соотношения (34.1) в случае декартовых координат для дивергенциии получаем следующее выражение

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_k\cdot\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k}.$$

В качестве примера ниже приведены выражения дивергенции вектора и тензора второго ранга:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}_k\cdot\frac{\partial}{\partial X_k}(a_m\boldsymbol{i}_m)=\delta_{km}\frac{\partial a_m}{\partial X_k}=\frac{\partial a_m}{\partial X_m}=\frac{\partial a_1}{\partial X_1}+\frac{\partial a_2}{\partial X_2}+\frac{\partial a_3}{\partial X_3};$$

$$\nabla\cdot\mathbf{P}=\boldsymbol{i}_k\cdot\frac{\partial}{\partial X_k}(P_{mn}\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n)=\frac{\partial P_{mn}}{\partial X_m}\boldsymbol{i}_n=$$

$$\left(\frac{\partial P_{11}}{\partial X_1}+\frac{\partial P_{21}}{\partial X_2}+\frac{\partial P_{31}}{\partial X_3}\right)\boldsymbol{i}_1+\left(\frac{\partial P_{12}}{\partial X_1}+\frac{\partial P_{22}}{\partial X_2}+\frac{\partial P_{32}}{\partial X_3}\right)\boldsymbol{i}_2+\left(\frac{\partial P_{13}}{\partial X_1}+\frac{\partial P_{23}}{\partial X_2}+\frac{\partial P_{33}}{\partial X_3}\right)\boldsymbol{i}_3.$$

Заметим, что результатом операции дивергенция является тензорное поле, ранг которого на единицу меньше, чем ранг исходного.

Определение. *Ротором* тензорного поля $\mathbf{P}$ называется величина, обозначаемая $\nabla\times\mathbf{P}$ или $\operatorname{Rot}\mathbf{P}$ и вычисляемая в случае декартовых координат по формуле

$$\nabla\times\mathbf{P}=\boldsymbol{i}_k\times\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k}. \tag{36.2}$$

В случае тензорного поля произвольного ранга выражение его ротора может быть записано в виде

$$\nabla\times\mathbf{P}=\boldsymbol{i}_k\times\frac{\partial}{\partial X_k}(P_{mn\ldots t}\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n\ldots\boldsymbol{i}_t)=d_{kmp}\frac{\partial P_{mn\ldots t}}{\partial X_k}\boldsymbol{i}_p\boldsymbol{i}_n\ldots\boldsymbol{i}_t.$$

В частности, для векторного поля получаем

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=d_{kmp}\frac{\partial a_m}{\partial X_k}\boldsymbol{i}_p=\left(\frac{\partial a_3}{X_2}-\frac{\partial a_2}{\partial X_3}\right)\boldsymbol{i}_1+\left(\frac{\partial a_1}{X_3}-\frac{\partial a_3}{\partial X_1}\right)\boldsymbol{i}_2+\left(\frac{\partial a_2}{X_1}-\frac{\partial a_1}{\partial X_2}\right)\boldsymbol{i}_3.$$

Последнее равенство может быть записано в виде хорошо известного символического определителя

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial X_1} & \dfrac{\partial}{\partial X_2} & \dfrac{\partial}{\partial X_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}.$$

Ротор тензорного поля имеет тот же ранг, что и само поле.

Для любого дважды непрерывно дифференцируемого тензорного поля справедливы соотношения, называемые фундаментальными тождествами тензорного анализа:

$$\nabla\times(\nabla\mathbf{P})=0; \tag{36.3}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{P})=0 \tag{36.4}$$

(ротор градиента и дивергенция ротора любого тензорного поля тождественно равны нулю).

Первое из них доказывается очень просто. Вычисляем

$$\nabla\times(\nabla\mathbf{P})=\boldsymbol{i}_k\times\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\boldsymbol{i}_m\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_m}\right)=\boldsymbol{i}_k\times\boldsymbol{i}_m\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial X_k\partial X_m}.$$

Если в полученном выражении сделать замену немых индексов ($m \to k$, $k \to m$), то оно запишется в виде

$$\boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_k \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial X_m \partial X_k}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_k = -\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_m$, а в силу непрерывности вторых производных

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial X_k \partial X_m} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial X_m \partial X_k},$$

получаем, что ротор градиента противоположен по знаку самому себе, а следовательно, равен нулю.

Для доказательства тождества (36.4) запишем тензор $\mathbf{P}$ в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_k \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{i}_k \mathbf{P}_k \quad (\mathbf{P}_k \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{i}_k \cdot \mathbf{P}).$$

Тогда

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{P}) = \boldsymbol{i}_m \cdot \frac{\partial}{\partial X_m} \left[\boldsymbol{i}_n \times \frac{\partial}{\partial X_n} (\boldsymbol{i}_k \mathbf{P}_k) \right] = \underbrace{\boldsymbol{i}_m \cdot (\boldsymbol{i}_n \times \boldsymbol{i}_k)}_{\mathrm{I}} \underbrace{\frac{\partial^2 \mathbf{P}_k}{\partial X_m \partial X_n}}_{\mathrm{II}}.$$

Выражение I антисимметрично по индексам m, n, а выражение II – симметрично по этим индексам. Поэтому произведения этих выражений. просуммированные по индексам m, n равны нулю.

Операции дивергенции и градиент используются для введения еще одного дифференциального оператора тензорного анализа – оператора Лапласа $\triangle$:

$$\triangle \mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{P}) = \nabla^2 \mathbf{P}.$$

§37. Криволинейные координаты.

Пусть $Q^M = Q^M(X_1, X_2, X_3)$ ($M = 1, 2, 3$) – некоторые функции декартовых координат. Если Q^M – непрерывно дифференцируемые функции и якобиан $\left| \frac{\partial Q^M}{\partial X_k} \right|$ отличен от нуля везде, за исключением, быть может, нескольких особых точек или линий, то эти функции называются *криволинейными координатами.* Условие

$$\left| \frac{\partial Q^M}{\partial X_k} \right| \neq 0 \tag{37.1}$$

обеспечивает взаимно однозначное соответствие между декартовыми (X^k) и криволинейными (Q^M) координатами точки.

Координатной поверхностью называется двумерное многообразие в $\mathcal{E}_3$, получающееся в результате фиксирования какой-либо одной из трех координат Q^M при произвольном изменении двух других. *Координатная линия* представляет собой множество точек, соответствующих произвольному изменению одной из трех криволинейных координат при фиксации двух других.

Рассмотрим совокупность векторов

$$\boldsymbol{R}^M = \nabla Q^M = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial Q^M}{\partial X_k}. \tag{37.2}$$

В силу (37.1) матрица $\left\| \frac{\partial Q^M}{\partial X_k} \right\|$ является неособой, следовательно, векторы $\boldsymbol{R}^M$ линейно независимы, а значит, их можно выбрать в качестве базиса.

Построим базис, взаимный к только что рассмотренному:

$$\boldsymbol{R}^M \cdot \boldsymbol{R}_N = \delta^M_N.$$

Разыскивая $\boldsymbol{R}_N$ в виде $\boldsymbol{R}_N = B^s_N \boldsymbol{i}_s$, для компонент B^s_N получаем

$$\boldsymbol{i}_k \frac{\partial Q^M}{\partial X_k} \cdot B^s_N \boldsymbol{i}_s = \delta^M_N$$

или

$$\frac{\partial Q^M}{\partial X_s} B^s_N = \delta^M_N.$$

Последнее соотношение означает, что матрица $\|B^s_N\|$ обратна матрице $\|\frac{\partial Q^M}{\partial X_k}\|$, следовательно

$$B^s_N = \frac{\partial X_s}{\partial Q^N}$$

(действительно,

$$\frac{\partial Q^M}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial Q^N} = \frac{\partial Q^M}{\partial Q^N} = \delta^M_N,$$

т.е. матрица $\|\frac{\partial X_s}{\partial Q^N}\|$ обратна матрице $\|\frac{\partial Q^M}{\partial X_k}\|$).

Таким образом,

$$\boldsymbol{R}_N = \frac{\partial X_s}{\partial Q^N} \boldsymbol{i}_s = \frac{\partial}{\partial Q^N}(X_s \boldsymbol{i}_s) = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial Q^N}. \tag{37.3}$$

Это означает, что векторы $\boldsymbol{R}_N$ являются касательными к соответствующим координатным линиям.

Векторные базисы $\{\boldsymbol{R}_N\}$ и $\{\boldsymbol{R}^M\}$ называют *естественными* базисами, ассоциированными с криволинейными координатами. В общем случае оба они являются косоугольными и, в отличие от естественного базиса декартовых координат, зависят от точки пространства.

Наряду с криволинейными координатами Q^M рассмотрим какую-нибудь другую систему координат $Q^{N'}$, связанную с данной соотношениями

$$Q^{N'} = Q^{N'}(Q^M). \tag{37.4}$$

Замена координат (37.4) приводит к новому естественному базису

$$\boldsymbol{R}_{N'} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial Q^{N'}},$$

связанному со старым соотношениями

$$\boldsymbol{R}_{N'} = \frac{\partial Q^N}{\partial Q^{N'}}\boldsymbol{R}_N, \tag{37.5}$$

или

$$\boldsymbol{R}_N = \frac{\partial Q^{N'}}{\partial Q^N}\boldsymbol{R}_{N'}. \tag{37.6}$$

Базис $\boldsymbol{R}^N$ преобразуется по аналогичным формулам:

$$\boldsymbol{R}^N = \frac{\partial Q^N}{\partial Q^{N'}}\boldsymbol{R}^{N'} \tag{37.7}$$

Соотношения (37.5)–(37.6) совпадают по форме с равенствами (2.3) с той разницей, что в данном случае матрица преобразования базисов $A^N_{N'}$ является переменной, т.е. зависит от точки.

Пусть $\boldsymbol{R}^*_N(X_1, X_2, X_3)$ – некоторый произвольный базис (гладко зависящий от точки). В общем случае нельзя найти такие функции $Q^M(X_k)$, чтобы базис $\boldsymbol{R}_N$ был ассоциирован с криволинейными координатами Q^M. Действительно, рассмотрим выражение $\boldsymbol{R}_N\,\mathrm{d}Q^N$. В силу вышесказанного его можно представить в виде

$$\boldsymbol{R}_N\,\mathrm{d}Q^N = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial Q^N}\mathrm{d}Q^N = \mathrm{d}\boldsymbol{R},$$

т.е. оно является полным дифференциалом. Для произвольного же базиса величина $\boldsymbol{R}^*_N\,\mathrm{d}Q^N$ полным дифференциалом не является. Данный факт дает объяснение названию "естественный" базис. Базис $\boldsymbol{R}^*_N$, для которого нельзя найти функции $Q^M(X_k)$, называется *неголономным*.

Запишем представление градиента тензорного поля в криволинейных координатах

$$\nabla\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_k\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial X_k} = \boldsymbol{i}_k\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial Q^M}\frac{\partial Q^M}{\partial X_k} = \nabla Q^M\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial Q^M} = \boldsymbol{R}^M\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial Q^M}.$$

Формула

$$\nabla = \boldsymbol{R}^M\frac{\partial}{\partial Q^M}$$

дает выражение оператора Гамильтона в криволинейных координатах. Операцию дивергенции в криволинейных координатах можно записать в виде

$$\nabla\cdot\mathbf{P} = \boldsymbol{R}^M\cdot\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial Q^M},$$

операцию ротора – в виде

$$\nabla\times\mathbf{P} = \boldsymbol{R}^M\times\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial Q^M}.$$

Величины $G_{MN} = \boldsymbol{R}_M\cdot\boldsymbol{R}_N$ называются метрическими коэффициентами криволинейной системы координат Q^M. Как и для любых базисов евклидова векторного пространства, для них справедливы соотношения

$$\boldsymbol{R}_M = G_{MN}\boldsymbol{R}^N;$$

$$G^{MN} = \boldsymbol{R}^M \cdot \boldsymbol{R}^N;$$
$$\boldsymbol{R}^N = G^{MN} \boldsymbol{R}_M.$$

§38. Символы Кристоффеля второго рода. Ковариантная производная.

Осуществление любой дифференциальной операции (вычисление ротора, дивергенции, градиента или их комбинаций) в криволинейных координатах требует решения задачи о дифференцировании базисных векторов. Например,

$$\nabla \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^K \frac{\partial}{\partial Q^K}(a^N \boldsymbol{R}_N) = \boldsymbol{R}^K \left(\frac{\partial a^N}{\partial Q^K} \boldsymbol{R}_N + a^N \frac{\partial \boldsymbol{R}_N}{\partial Q^K} \right).$$

Последнюю производную представим в виде разложения по базису $\boldsymbol{R}_M$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}_N}{\partial Q^K} = \Gamma^M_{NK} \boldsymbol{R}_M. \tag{38.1}$$

Коэффициенты Γ^M_{NK} в таком разложении называются *символами Кристоффеля второго рода.*

Символы Кристоффеля второго рода в естественном базисе симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^M_{NK} = \Gamma^M_{KN}.$$

Это следует из равенства производных

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}_N}{\partial Q^K} = \frac{\partial \boldsymbol{R}_K}{\partial Q^N},$$

выполняющегося в силу совпадения вторых смешанных производных

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial Q^K \partial Q^N} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial Q^N \partial Q^K}.$$

Символы Кристоффеля можно ввести и для неголономного базиса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}^*_N}{\partial Q^K} = \Gamma^{*M}_{NK} \boldsymbol{R}^*_M$$

(Q^M – произвольные криволинейные координаты), но в этом случае они не будут симметричными:

$$\Gamma^{*M}_{NK} \neq \Gamma^{*M}_{KN}.$$

Для вычисления символов Кристоффеля второго рода можно использовать следующее представление (доказываемое в курсах дифференциальной геометрии):

$$\Gamma^M_{NK} = \frac{1}{2} G^{MS} \left(\frac{\partial G_{NS}}{\partial Q^K} + \frac{\partial G_{KS}}{\partial Q^N} - \frac{\partial G_{NK}}{\partial Q^S} \right). \tag{38.2}$$

Для вывода формулы дифференцирования векторов взаимного базиса $\boldsymbol{R}^M$ преобразуем выражение для производной по Q^M произведения $\boldsymbol{R}^N \cdot \boldsymbol{R}_K$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial Q^M}(\boldsymbol{R}^N \cdot \boldsymbol{R}_K) = \frac{\partial \boldsymbol{R}^N}{\partial Q^M} \cdot \boldsymbol{R}_K + \boldsymbol{R}^N \cdot \Gamma^S_{MK}\boldsymbol{R}_S = \frac{\partial \boldsymbol{R}^N}{\partial Q^M} \cdot \boldsymbol{R}_K + \Gamma^N_{MK}.$$

Умножив равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}^N}{\partial Q^M} \cdot \boldsymbol{R}_K = -\Gamma^N_{MK}$$

на $\boldsymbol{R}^K$ и просуммировав по K, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}^N}{\partial Q^M} \cdot \underbrace{\boldsymbol{R}_K \boldsymbol{R}^K}_{\mathbf{E}} = -\Gamma^N_{MK}\boldsymbol{R}^K,$$

то есть

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}^N}{\partial Q^M} = -\Gamma^N_{MK}\boldsymbol{R}^K.$$

Возвращаясь к поставленной в начале данного пункта задаче вычисления градиента векторного поля, запишем выражение для $\nabla \boldsymbol{a}$ в виде

$$\nabla \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^K \frac{\partial a^N}{\partial Q^K}\boldsymbol{R}_N + \boldsymbol{R}^K a^N \Gamma^M_{NK}\boldsymbol{R}_M.$$

Во втором слагаемом полученного выражения сделаем замену немых индексов $M \to N$, $N \to M$. Тогда для градиента получаем

$$\nabla \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a^N}{\partial Q^K} + a^M \Gamma^N_{MK}\right)\boldsymbol{R}^K \boldsymbol{R}_N. \qquad (38.3)$$

Выражение в скобках обозначается $\nabla_K a^N$ и называется *ковариантной производной* векторной компоненты:

$$\nabla \boldsymbol{a} = \nabla_K a^N \boldsymbol{R}^K \boldsymbol{R}_N. \qquad (38.4)$$

Получим теперь выражение для градиента тензора второго ранга $\mathbf{P} = P^{MN}\boldsymbol{R}_M\boldsymbol{R}_N$.

$$\nabla \mathbf{P} = \frac{\partial P^{MN}}{\partial Q^S}\boldsymbol{R}^S\boldsymbol{R}_M\boldsymbol{R}_N + P^{MN}\boldsymbol{R}^S\Gamma^T_{MS}\boldsymbol{R}_T\boldsymbol{R}_N + P^{MN}\boldsymbol{R}^S\boldsymbol{R}_M\Gamma^T_{NS}\boldsymbol{R}_T.$$

Сделав во втором слагаемом замену немых индексов $T \leftrightarrow M$, а в третьем $T \leftrightarrow N$, получаем

$$\nabla \mathbf{P} = \nabla_S P^{MN}\boldsymbol{R}^S\boldsymbol{R}_M\boldsymbol{R}_N, \qquad (38.5)$$

где $\nabla_S P^{MN}$ – ковариантная производная компоненты тензора второго ранга, даваемая соотношением

$$\nabla_S P^{MN} = \frac{\partial P^{MN}}{\partial Q^S} + \Gamma^M_{TS}P^{TN} + \Gamma^N_{TS}P^{MT}. \qquad (38.6)$$

С использованием ковариантных производных могут быть получены следующие выражения дивергенции и ротора тензора второго ранга:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla_M P^{MN} \boldsymbol{R}_N; \tag{38.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{P} = \nabla_S P^{MN} \boldsymbol{R}^S \times \boldsymbol{R}_M \boldsymbol{R}_T. \tag{38.8}$$

§39. Ортогональные криволинейные координаты.

Определение. Криволинейные координаты Q^M называются *ортогональными*, если соответствующие им метрические коэффициенты G_{MN} обращаются в ноль при $M \neq N$.

Очевидно, что в таком случае координатные линии, проходящие через любую точку пространства, будут ортогональны друг другу.

Положительные диагональные элементы матрицы метрических коэффициентов G_{MM} (не суммировать по M!) записываются в этом случае как

$$G_{MM} = H_M^2 \quad \text{(не суммировать по } M!).$$

Величины H_M называются *коэффициентами Ламе* ортогональной системы координат Q^M.

Для выяснения геометрического смысла коэффициентов Ламе вычислим квадрат длины элемента некоторой дуги:

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial Q^M}\mathrm{d}Q^M \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial Q^N}\mathrm{d}Q^N =$$

$$= \boldsymbol{R}_M \cdot \boldsymbol{R}_N \mathrm{d}Q^M \mathrm{d}Q^N = G_{MN}\mathrm{d}Q^M \mathrm{d}Q^N = H_N^2 \left(\mathrm{d}Q^N\right)^2.$$

Возьмем теперь в качестве дуги первую координатную линию. Поскольку вдоль этой линии $\mathrm{d}Q^2 = \mathrm{d}Q^3 = 0$, то для элемента дуги получаем

$$\mathrm{d}S_{(1)}^2 = H_1^2 \left(\mathrm{d}Q^1\right)^2$$

или

$$\mathrm{d}S_{(1)} = H_1 \mathrm{d}Q^1.$$

Таким образом, коэффициент Ламе является коэффициентом пропорциональности в зависимости приращения длины дуги координатной линии от приращения соответствующей координаты.

Данное геометрическое истолкование упрощает в ряде случаев вычисление коэффициентов Ламе. Рассмотрим, например, цилиндрические координаты $Q^1 = R$, $Q^2 = \varPhi$, $Q^3 = Z$ (рис. 3).

Очевидно, что $\mathrm{d}S_R = \mathrm{d}R$, $\mathrm{d}S_\varPhi = R\,\mathrm{d}\varPhi$, $\mathrm{d}S_Z = \mathrm{d}Z$; следовательно, для коэффициентов Ламе получаем следующие выражения:

$$H_R = 1; \quad H_\varPhi = R; \quad H_Z = 1.$$

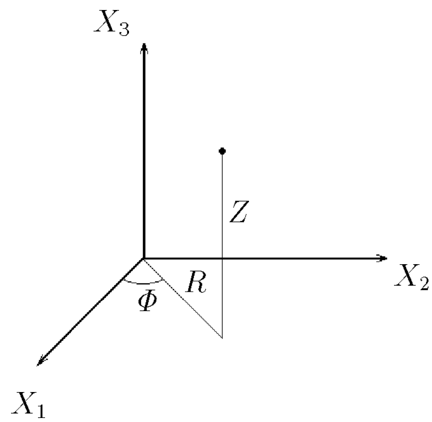


Рис. 3.

В случае ортогональных координат удобнее использовать ортонормированный базис

$$\boldsymbol{e}_M \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{H_M}\boldsymbol{R}_M \quad \text{(не суммировать по } M!).$$

Векторы $\boldsymbol{e}_M$ единичны в силу того, что H_M представляет собой длину вектора $\boldsymbol{R}_M$ ($H_M^2 = \boldsymbol{R}_M \cdot \boldsymbol{R}_M = |\boldsymbol{R}_M|^2$).

В отличие от декартовых координат ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_M\}$ меняется от точки к точке, т.е. является переменным.

По общей формуле для векторов взаимного базиса

$$\boldsymbol{R}^N = G^{NM}\boldsymbol{R}_M.$$

Матрица $\|G_{MS}\|$ диагональна, поэтому матрица $\|G^{NK}\|$ получается обращением диагональных значений:

$$G^{NK} = 0 \text{ при } N \neq K; \quad G^{NN} = \frac{1}{H_N^2} \quad \text{(не суммировать по } N!).$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{R}^N = \frac{1}{H_N^2}\boldsymbol{R}_N = \frac{1}{H_N}\boldsymbol{e}_N \quad \text{(не суммировать по } N!).$$

Таким образом, набла-оператор в ортогональных координатах может быть представлен в следующем виде

$$\nabla = \sum_{N=1}^{3} \boldsymbol{e}_N \frac{1}{H_N}\frac{\partial}{\partial Q^N}.$$

Для цилиндрических координат, например,

$$\nabla = \boldsymbol{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R}\boldsymbol{e}_\Phi\frac{\partial}{\partial \Phi} + \boldsymbol{e}_Z\frac{\partial}{\partial Z}.$$

При вычислении дифференциальных операций в ортогональных координатах удобно заранее вычислить матрицу производных единичных базисных векторов (формулы ковариантного дифференцирования с использованием символов Кристоффеля второго рода относятся к случаю базиса $\{\boldsymbol{R}_M\}$, а не $\{\boldsymbol{e}_M\}$). В простых случаях (например, для цилиндрических координат) такая матрица может быть построена на основе геометрических соображений.

Обозначим орты, соответствующие цилиндрическим координатам, через $\boldsymbol{e}_R$, $\boldsymbol{e}_\Phi$, $\boldsymbol{e}_Z$. Очевидно, что $\boldsymbol{e}_Z = \boldsymbol{i}_3 = \mathrm{const}$, следовательно, все производные этого вектора будут равны нулю, С другой стороны, векторы $\boldsymbol{e}_R$ и $\boldsymbol{e}_\Phi$ не зависят от координаты Z, поэтому в матрице производных будут нулевыми и третья строка, и третий столбец. Для вычисления оставшихся производных рассмотрим координатную плоскость R, Φ ($Z = \mathrm{const}$).

Переместим точку на $\mathrm{d}R$ вдоль первой координатной линии (рис. 4).

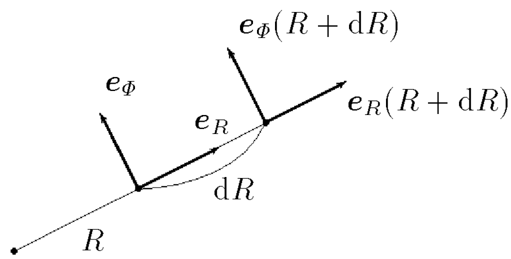


Рис. 4.

Очевидно, что векторы $\boldsymbol{e}_R$ и $\boldsymbol{e}_\Phi$ при этом не изменятся, т.е.

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\Phi}{\partial R} = 0.$$

Теперь рассмотрим случай приращения $\mathrm{d}\Phi$ угловой координаты (рис. 5).

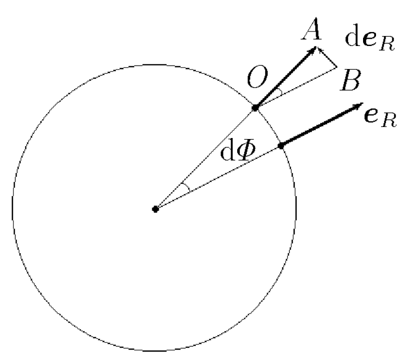


Рис. 5.

Так как длина ребер треугольника AOB равна единице, то $|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_R| \sim \mathrm{d}\varPhi$. Сам же вектор $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_R$ в пределе становится перпендикулярным вектору $\boldsymbol{e}_R$, следовательно

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \varPhi} = \boldsymbol{e}_\varPhi.$$

Изменение вектора $\boldsymbol{e}_\varPhi$ может быть проанализировано аналогичным образом (рис. 6).

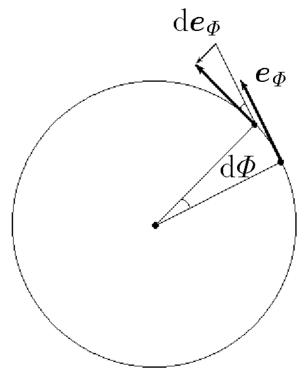


Рис. 6.

Окончательно получаем:

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial R} = 0; & \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \varPhi} = \boldsymbol{e}_\varPhi; & \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial Z} = 0; \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\varPhi}{\partial R} = 0; & \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\varPhi}{\partial \varPhi} = -\boldsymbol{e}_R; & \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_\varPhi}{\partial Z} = 0; \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_Z}{\partial R} = 0; & \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_Z}{\partial \varPhi} = 0; & \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_Z}{\partial Z} = 0.
\end{array}$$

В более сложных случаях вычисление коэффициентов Ламе и матрицы производных может быть проведено по следующей схеме (которую мы опять применим к случаю цилиндрических координат).

Сначала зададим формулы связи декартовых координат с криволинейными:

$$\begin{cases} X_1 &= R\cos\varPhi; \\ X_2 &= R\sin\varPhi; \\ X_3 &= Z. \end{cases}$$

Затем запишем выражение радиус-вектора $\boldsymbol{R}$ с использованием этих формул:

$$\boldsymbol{R} = X_k \boldsymbol{i}_k = R\cos\varPhi \boldsymbol{i}_1 + R\sin\varPhi \boldsymbol{i}_2 + Z\boldsymbol{i}_3.$$

Вычисляем векторы $\boldsymbol{R}_N = \partial\boldsymbol{R}/\partial Q^N$:

$$\boldsymbol{R}_1 = \partial\boldsymbol{R}/\partial R = \cos\varPhi \boldsymbol{i}_1 + \sin\varPhi \boldsymbol{i}_2;$$

$$\boldsymbol{R}_2 = \partial \boldsymbol{R}/\partial \Phi = R(-\sin\Phi \boldsymbol{i}_1 + \cos\Phi \boldsymbol{i}_2);$$

$$\boldsymbol{R}_3 = \partial \boldsymbol{R}/\partial Z = \boldsymbol{i}_3.$$

Очевидно, что получившиеся векторы $\boldsymbol{R}_N$ ортогональны друг другу, т.е. рассматриваемая система координат действительно является ортогональной. Коэффициенты Ламе представляют собой длины полученных векторов:

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\cos^2\Phi + \sin^2\Phi} = 1; \\ H_2 &= \sqrt{R^2\sin^2\Phi + R^2\cos^2\Phi} = R; \\ H_3 &= 1. \end{aligned}$$

Разделив векторы $\boldsymbol{R}_N$ на коэффициенты Ламе (т.е. на их длины), получим выражения для ортогональных векторов $\boldsymbol{e}_K$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_R &= \cos\Phi \boldsymbol{i}_1 + \sin\Phi \boldsymbol{i}_2; \\ \boldsymbol{e}_\Phi &= -\sin\Phi \boldsymbol{i}_1 + \cos\Phi \boldsymbol{i}_2; \\ \boldsymbol{e}_Z &= \boldsymbol{i}_3. \end{aligned}$$

Из полученных формул видно, что базис $\{\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_\Phi, \boldsymbol{e}_Z\}$ действительно является переменным, но зависит только от угловой координаты Φ. Вычисляя производные, непосредственно получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \Phi} = -\sin\Phi \boldsymbol{i}_1 + \cos\Phi \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{e}_\Phi;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\Phi}{\partial \Phi} = -\cos\Phi \boldsymbol{i}_1 - \sin\Phi \boldsymbol{i}_2 = -\boldsymbol{e}_R.$$

Данные результаты, естественно, совпадают с полученными ранее.

В более сложном случае сферических координат R, Φ, Θ $(0 \le \Phi < 2\pi;\ -\frac{\pi}{2} \le$

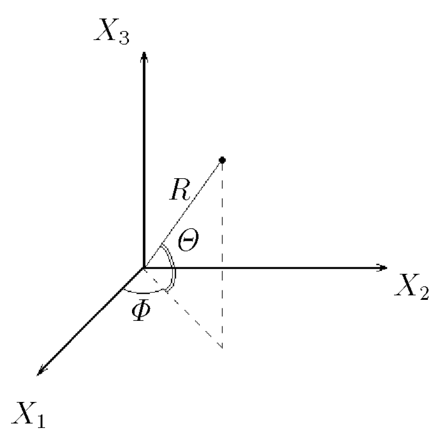


Рис. 7.

$\Theta \le \frac{\pi}{2})$ (рис. 7) коэффициенты Ламе также могут быть легко найдены из чисто геометрических соображений:

$$H_R = 1; \quad H_\Phi = R\cos\Theta; \quad H_\Theta = R.$$

следовательно, выражение набла-оператора имеет вид

$$\nabla = \boldsymbol{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R\cos\Theta} \boldsymbol{e}_\Phi \frac{\partial}{\partial \Phi} + \frac{1}{R} \boldsymbol{e}_\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}.$$

Вычисление производных векторов $\boldsymbol{e}_R$, $\boldsymbol{e}_\Phi$, $\boldsymbol{e}_\Theta$ по R и Θ производится аналогично случаю цилиндрических координат. Для вычисления производных этих векторов по Φ удобно ввести два единичных вектора $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{e}_\rho$ в плоскости $\Phi =$ const (рис. 8).

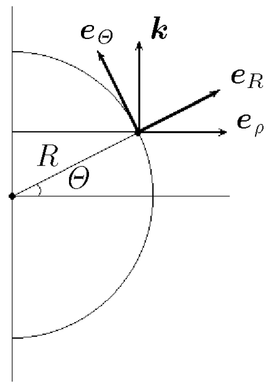


Рис. 8.

Тогда, очевидно,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{e}_\rho \cos\Theta + \boldsymbol{k}\sin\Theta; \\ \boldsymbol{e}_\Theta = -\boldsymbol{e}_\rho \sin\Theta + \boldsymbol{k}\cos\Theta. \end{cases} \tag{39.1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_R \cos\Theta - \boldsymbol{e}_\Theta\sin\Theta; \\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_R \sin\Theta + \boldsymbol{e}_\Theta\cos\Theta. \end{cases} \tag{39.2}$$

Производные векторов $\boldsymbol{e}_\rho$ и $\boldsymbol{k}$ по Φ даются соотношениями

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial \Phi} = \boldsymbol{e}_\Phi; \qquad \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \Phi} = 0.$$

тем самым по (39.1) находятся производные $\frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \Phi}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{e}_\Theta}{\partial \Phi}$. Величина $\frac{\partial \boldsymbol{e}_\Phi}{\partial \Phi} = -\boldsymbol{e}_\rho$ может быть выражена через $\boldsymbol{e}_R$ и $\boldsymbol{e}_\Phi$ с помощью (39.2).

Окончательно получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \Phi} = \cos\Theta \boldsymbol{e}_\Phi; \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_R}{\partial \Theta} = \boldsymbol{e}_\Theta;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\Phi}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\Phi}{\partial \Phi} = -\cos\Theta \boldsymbol{e}_R + \sin\Theta \boldsymbol{e}_\Theta; \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\Phi}{\partial \Theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\Theta}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\Theta}{\partial \Phi} = -\sin\Theta \boldsymbol{e}_\Phi; \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\Theta}{\partial \Theta} = -\boldsymbol{e}_R.$$

Упражнения.

128. Раскрыть скобки в выражении
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}).$$

129. Раскрыть скобки в выражении
$$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}).$$

130. Раскрыть скобки в выражении
$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{f}), \quad \mathbf{P} \in \mathcal{T}_2.$$

131. Доказать тождество
$$\nabla \cdot [(\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{R}] = 2\boldsymbol{\omega} + (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{R}.$$

132. Доказать тождество
$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \times \boldsymbol{R}) = (\nabla \cdot \mathbf{P}) \times \boldsymbol{R} \quad \text{при } \mathbf{P} = \mathbf{P}^T.$$

133. Доказать тождество
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{F}), \quad \mathbf{F} \in \mathcal{T}_p.$$

134. Доказать тождество
$$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cdot \nabla \boldsymbol{f} - \boldsymbol{R}(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) + 2\boldsymbol{f}.$$

135. Доказать тождество
$$\mathrm{tr}\,(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})) = -2\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

136. Доказать ортогональность и найти коэффициенты Ляме системы координат λ, μ, z
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda\mu; \\ x_2 & = & \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}; \\ x_3 & = & z. \end{array} \right.$$

137. Доказать ортогональность и найти коэффициенты Ляме системы координат σ, τ, φ
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \sigma\tau\cos\varphi; \\ x_2 & = & \sigma\tau\sin\varphi; \\ x_3 & = & (\tau^2 - \sigma^2)/2. \end{array} \right.$$

138. Доказать ортогональность и найти коэффициенты Ляме системы координат σ, τ, z

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}; \\ x_2 &= \dfrac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}; \\ x_3 &= z. \end{cases}$$

139. Дано векторное поле $\boldsymbol{f} = R\Phi\Theta\boldsymbol{e}_\Phi$. Найти

$$\nabla\boldsymbol{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{f}, \quad \nabla\times\boldsymbol{f}.$$

140. Дано векторное поле $\boldsymbol{f} = R\Phi\cos\Theta\boldsymbol{e}_\Theta$. Найти

$$\nabla\boldsymbol{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{f}, \quad \nabla\times\boldsymbol{f}.$$

141. Дано векторное поле $\boldsymbol{f} = R\Phi Z\boldsymbol{e}_\Phi$. Найти

$$\nabla\boldsymbol{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{f}, \quad \nabla\times\boldsymbol{f}.$$

142. Получить выражение для оператора Лапласа в цилиндрической системе координат.

143. Получить общее выражение для дивергенции вектора в сферической системе координат.

144. Получить выражение для оператора Лапласа в сферической системе координат.

145. Вычислить дивергенцию тензора

$$\mathbf{P} = a(R)\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R + b(R)\boldsymbol{e}_\Phi\boldsymbol{e}_\Phi + b(R)\boldsymbol{e}_\Theta\boldsymbol{e}_\Theta.$$

146. Вычислить дивергенцию тензора

$$\mathbf{P} = P_{12}(R)\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_\Phi + P_{21}(R)\boldsymbol{e}_\Phi\boldsymbol{e}_R + P_{13}(R)\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_Z + P_{31}(R)\boldsymbol{e}_Z\boldsymbol{e}_R.$$

147. Вычислить дивергенцию тензора

$$\mathbf{P} = a(R)\boldsymbol{e}_R\boldsymbol{e}_R + b(R)\boldsymbol{e}_\Phi\boldsymbol{e}_\Phi + c(R)\boldsymbol{e}_Z\boldsymbol{e}_Z.$$

148. Доказать тождество

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\boldsymbol{b}).$$

149. Найти ротор тензорного поля $R^2\mathbf{E}$, где $R^2 = \mathbf{R}\cdot\mathbf{R}$.

150. Вычислить $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{R})$, где $\boldsymbol{a} = \text{const}$.

151. Доказать тождество

$$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \nabla \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \nabla \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{b}.$$

152. Вычислить $\nabla \times (\boldsymbol{R}\boldsymbol{R})$.

153. Найти выражение $\nabla \times \boldsymbol{a}$ в цилиндрических координатах R, Φ, Z, полагая

$$\boldsymbol{a} = a_R \boldsymbol{e}_R + a_\Phi \boldsymbol{e}_\Phi + a_Z \boldsymbol{e}_Z.$$

154. Вычислить $\nabla \cdot (\mathbf{E}\boldsymbol{R})$.

155. Доказать тождество

$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{a}) = (\nabla \phi) \cdot \boldsymbol{a} + \phi (\nabla \cdot \boldsymbol{a}).$$

156. Доказать, что $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{R}) = 0$, если $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

157. Найти выражение $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ в цилиндрических координатах, полагая

$$\boldsymbol{a} = a_R \boldsymbol{e}_R + a_\Phi \boldsymbol{e}_\Phi + a_Z \boldsymbol{e}_Z.$$

158. Вычислить $\nabla \times (R\mathbf{E})$, где $R = \sqrt{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}}$.

159. Доказать тождество

$$\mathbf{T} = -\frac{1}{2} \nabla \times [\nabla \times (\boldsymbol{R} \times \mathbf{T} \times \boldsymbol{R})]^{\mathrm{T}},$$

если $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathrm{const}$.

160. Вычислить $\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{R})$, где $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ и $\mathbf{T} = \mathrm{const}$.

161. Доказать тождество

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \nabla \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a}.$$

162. Вычислить $\nabla \times (R\boldsymbol{R})$, где $R = \sqrt{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}}$.

163. Доказать тождество

$$\nabla \times (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = (\nabla \times \boldsymbol{a}) \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times (\nabla \boldsymbol{b}).$$

164. Вычислить $\nabla \cdot (R^2 \mathbf{B})$, где $R^2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$ и $\mathbf{B} = \mathrm{const}$.

165. $\nabla \times (R^\alpha \mathbf{B})$, где $R = \sqrt{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}}$, $\mathbf{B}$ – постоянный тензор произвольного ранга.

166. Вычислить $\nabla \times (\dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{R}}{R^n})$, где $R = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}$, $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

167. Доказать тождество: $\nabla \cdot [(\nabla \phi) \times (\nabla \psi)] = 0$, где ϕ, ψ – скалярные поля.

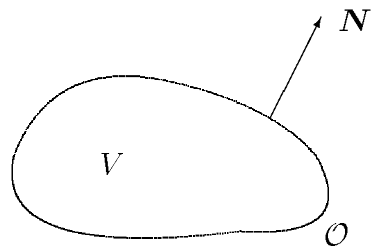


Рис. 9.

168. Доказать, что след ротора симметричного тензора второго ранга равен нулю.

169. Вычислить $\nabla \cdot [(\nabla \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} - (\nabla \cdot \boldsymbol{a})\mathbf{E}]$.

170. Доказать, что тензор $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Phi})^{\mathrm{T}}$ симметричен, если $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$.

171. Доказать тождество: $\nabla \times [(\nabla \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\nabla \cdot \boldsymbol{a}] = 0$.

172. Вычислить $\nabla(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{a})$, где $\mathbf{A}$ – постоянный тензор второго ранга, $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

173. Доказать тождество: $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{a} - \triangle \boldsymbol{a}$.

174. Вычислить $\nabla(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$, $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$, $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})$, где $\boldsymbol{\omega}$ – постоянный вектор.

175. Доказать тождество: $\operatorname{tr}[\nabla \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})] = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \odot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \odot (\nabla \times \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$, где $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$.

176. Вычислить $\nabla \cdot (\mathbf{T} \times \boldsymbol{R})$, если $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ и $\nabla \cdot \mathbf{T} = \boldsymbol{f}$, где $\boldsymbol{f}$ – известное векторное поле.

§40. Формула Остроградского-Гаусса для тензорных полей.

Пусть замкнутая кусочно-гладкая поверхность $\mathcal{O}$ ограничивает область V трехмерного пространства; $\boldsymbol{N}$ – внешняя нормаль к $\mathcal{O}$ (рис. 9).

Пусть $P(X_1, X_2, X_3)$, $Q(X_1, X_2, X_3)$, $R(X_1, X_2, X_3)$ – заданные в V непрерывно дифференцируемые функции декартовых координат. Из курса математического анализа известно соотношение, называемое формулой Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial X_1} + \frac{\partial Q}{\partial X_2} + \frac{\partial R}{\partial X_3} \right) \mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} P \,\mathrm{d}X_2 \,\mathrm{d}X_3 + Q \,\mathrm{d}X_3 \,\mathrm{d}X_1 + R \,\mathrm{d}X_1 \,\mathrm{d}X_2.$$

Мы будем использовать несколько другой вид этой формулы. Для элементарных площадок $\mathrm{d}X_i\,\mathrm{d}X_j$ справедливы следующие представления

$$\mathrm{d}X_2\,\mathrm{d}X_3 = \cos(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{i}_1})\mathrm{d}\mathcal{O} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{i}_1\,\mathrm{d}\mathcal{O},$$

$$\mathrm{d}X_3\,\mathrm{d}X_1 = \cos(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{i}_2})\mathrm{d}\mathcal{O} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{i}_2\,\mathrm{d}\mathcal{O},$$

$$\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2 = \cos(\widehat{\boldsymbol{N},\boldsymbol{i}_3})\mathrm{d}\mathcal{O} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{i}_3\,\mathrm{d}\mathcal{O}.$$

Введем вектор $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i}_1 + Q\boldsymbol{i}_2 + R\boldsymbol{i}_3$. Тогда

$$\int\limits_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\mathcal{O}.$$

Оказывается, что эта формула справедлива не только для векторных полей, но и для непрерывно дифференцируемого тензорного поля произвольного ранга:

$$\int\limits_V \nabla\cdot\mathbf{P}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\cdot\mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathcal{O}. \qquad (40.1)$$

Соотношение (40.1) называется *формулой Остроградского-Гаусса* для тензорных полей; утверждение о его справедливости называют еще *теоремой о дивергенции.*

Рассмотрим произвольное гладкое тензорное поле $\mathbf{P}$. Применим теперь формулу (40.1) к полю $\mathbf{EP}$. Поскольку

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{EP}) &= \boldsymbol{i}_k\cdot\frac{\partial}{\partial X_k}(\boldsymbol{i}_s\boldsymbol{i}_s\mathbf{P}_{mn\ldots t}\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n\ldots\boldsymbol{i}_t) = \\ &= \boldsymbol{i}_s\frac{\partial}{\partial X_s}(\mathbf{P}_{mn\ldots t}\boldsymbol{i}_m\boldsymbol{i}_n\ldots\boldsymbol{i}_t) = \nabla\mathbf{P},\end{aligned}$$

а

$$\boldsymbol{N}\cdot(\mathbf{EP}) = \boldsymbol{N}\mathbf{P},$$

то

$$\int\limits_V \nabla\mathbf{P}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathcal{O}. \qquad (40.2)$$

Применив (40.1) к тензорному полю $\mathbf{E}\times\mathbf{P}$, аналогично предыдущему получим

$$\int\limits_V \nabla\times\mathbf{P}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\times\mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathcal{O}. \qquad (40.3)$$

Обобщением формул (40.1)-(40.3) является соотношение

$$\int\limits_V L(\nabla)\mathbf{P}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\mathcal{O}} L(\boldsymbol{N})\mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathcal{O},$$

где $L(\nabla)$ – дифференциальный оператор.

§41. Формула Стокса для тензорных полей.

Формула Стокса для тензорных полей получается обобщением аналогичной формулы классического анализа и имеет вид:

$$\int\limits_S \boldsymbol{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{P})\, \mathrm{d}S = \oint\limits_\Gamma \boldsymbol{t} \cdot \mathbf{P}\, \mathrm{d}\Gamma. \tag{41.1}$$

Приведенное равенство читается следующим образом: поток ротора тензорного поля через поверхность, опирающуюся на замкнутый контур Γ, равен циркуляции этого поля по этому замкнутому контуру.

В (41.1) $\boldsymbol{t}$ – единичный вектор касательной к контуру Γ; поверхность S предполагается кусочно-гладкой, а тензорное поле $\mathbf{P}$ – непрерывно дифференцируемым вблизи S. Правило согласования направления $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{N}$ стандартно: наблюдатель, направленный по вектору нормали к поверхности $\boldsymbol{N}$, должен двигаться вдоль контура Γ так, чтобы поверхность оставалась слева от него.

Обозначая величину $\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\Gamma$ через $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$, формуле (41.1) придадим вид

$$\int\limits_S \boldsymbol{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{P})\, \mathrm{d}S = \oint\limits_\Gamma \mathrm{d}\boldsymbol{R} \cdot \mathbf{P}. \tag{41.2}$$

Применяя соотношение (41.2) к тензорному полю $\mathbf{E} \times \mathbf{P}$ и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{P}) &= \\
&= \boldsymbol{i}_k \frac{\partial}{\partial X_k}(\mathbf{E} \times \boldsymbol{i}_n \mathbf{P}_n) = (i_k \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{i}_n)\frac{\partial \mathbf{P}_n}{\partial X_k} = \\
&= (\boldsymbol{i}_n \boldsymbol{i}_k - \delta_{kn}\mathbf{E})\frac{\partial \mathbf{P}_n}{\partial X_k} = \boldsymbol{i}_n \boldsymbol{i}_k \frac{\partial \mathbf{P}_n}{\partial X_k} - \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial X_k} = (\nabla \mathbf{P})^{\mathrm{T}(1,2)} - \mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{P},
\end{aligned}$$

получаем

$$\oint\limits_\Gamma \mathrm{d}\boldsymbol{R} \times \mathbf{P} = \int\limits_S \boldsymbol{N} \cdot \left[\nabla \mathbf{P}^{\mathrm{T}(1,2)} - \mathbf{E}\nabla \cdot \mathbf{P}\right] \mathrm{d}S.$$

Упражнения.

177. Преобразовать в интеграл по контуру:

$$\int\limits_S \boldsymbol{N}\, \mathrm{d}S.$$

178. Доказать тождество:

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{T})\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \int\limits_V \boldsymbol{R} \times (\nabla \cdot \mathbf{T})\, \mathrm{d}V$$

для $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$.

179. Вычислить $\int\limits_V \mathbf{T}\,\mathrm{d}V$, если $\nabla\cdot\mathbf{T} = \mathbf{f}$, $\boldsymbol{N}\cdot\mathbf{T}\big|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$, где $\mathcal{O}$ – поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{f},\boldsymbol{F}$ – известные функции.
Указание: рассмотреть интеграл $\int\limits_V \nabla\cdot(\mathbf{T}\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}V$.

180. Доказать, что $\int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}\mathcal{O} = 0$, если $\mathcal{O}$ – замкнутая поверхность, а $\boldsymbol{N}$ – единичная нормаль к $\mathcal{O}$.

181. Вычислить интеграл по замкнутой поверхности

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\mathcal{O}.$$

182. Вычислить интеграл по замкнутой поверхности

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \nabla(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\mathcal{O}.$$

183. Вычислить интеграл по замкнутой поверхности

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}\mathcal{O},$$

где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

§42. Формулы теории поверхностей.

Поверхность в трехмерном пространстве может быть задана уравнением в параметрической форме:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(q^1, q^2), \tag{42.1}$$

где $\boldsymbol{P}$ – радиус-вектор точки поверхности, а параметры q^1, q^2 называются *гауссовыми координатами* на поверхности. Поверхность предполагается кусочно-гладкой, причем требуемая степень гладкости (т.е. порядок непрерывных производных функций (42.1)) будет ясна из контекста и специально оговариваться не будет.

Геометрическое место точек, для которых значение одной из координат зафиксировано, образует кривую на поверхности, называемую координатной линией.

Предполагается выполненным условие

$$\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial q^1}\times\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial q^1}\neq 0.$$

В этом случае векторы $\boldsymbol{P}_\alpha = \partial \boldsymbol{P}/\partial q^\alpha$, являющиеся касательными к координатным линиям, образуют базис в плоскости, касающийся поверхности в данной точке. Здесь и в дальнейшем греческие индексы принимают значения 1, 2. В общем случае векторы $\boldsymbol{P}_\alpha$ не являются взаимно ортогональными и единичными.

При переходе от одних гауссовых координат к другим (скажем, $q^{\beta'}$) базисные векторы преобразуются по формулам

$$\boldsymbol{P}_{\beta'} = \boldsymbol{P}_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^{\beta'}}.$$

Числа $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha} = \boldsymbol{P}_\alpha \cdot \boldsymbol{P}_\beta$ называются коэффициентами *первой квадратичной формы*. Через них выражается элемент длины дуги кривой на поверхности:

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{P} = G_{\alpha\beta} \mathrm{d}q^\alpha \mathrm{d}q^\beta.$$

Единичный вектор нормали к поверхности задается соотношением

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2}{|\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2|}. \tag{42.2}$$

Векторы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{N}$ образуют базис в трехмерном евклидовом пространстве, изменяющийся при переходе от одной точки поверхности к другой. Векторный базис на поверхности, взаимный к $\boldsymbol{P}_\alpha$, находится из уравнений

$$\boldsymbol{P}^\beta \cdot \boldsymbol{P}_\alpha = \delta_\alpha^\beta, \qquad \boldsymbol{P}^\beta \cdot \boldsymbol{N} = 0. \tag{42.3}$$

Аналогично (1.2) получим

$$\boldsymbol{P}^\beta = G^{\alpha\beta} \boldsymbol{P}_\alpha, \qquad G^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \qquad \boldsymbol{P}^\alpha \cdot \boldsymbol{P}^\beta = G^{\alpha\beta} \tag{42.4}$$

Заметим, что формулу (42.2) можно записать иначе

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2}{\sqrt{G}}, \qquad G = G_{11} G_{22} - G_{12}^2.$$

Так как площадь элементарного параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{P}_1 \mathrm{d}q^1$, $\boldsymbol{P}_2 \mathrm{d}q^2$ равна $|\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2| \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 = \sqrt{G} \mathrm{q}^1 \mathrm{d}q^2$, элемент площади поверхности выражается формулой

$$\mathrm{d}\mathcal{O} = \sqrt{G}\, \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \tag{42.5}$$

Пусть в каждой точке поверхности определен тензор произвольного ранга $\mathbf{X}$, построенный на основе трехмерного евклидова пространства. Тензор $\mathbf{X}$ будем называть *принадлежащим поверхности*, если для любой его перестановки $\mathrm{tr}_{(k,s)}$ выполняется соотношение

$$\boldsymbol{N} \cdot \mathrm{tr}_{(k,s)}(\mathbf{X}) = 0. \tag{42.6}$$

Примером такого тензора может служить тензор второго ранга

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} = G^{\alpha\beta} \boldsymbol{P}_\alpha \boldsymbol{P}_\beta = G_{\alpha\beta} \boldsymbol{P}^\alpha \boldsymbol{P}^\beta = \boldsymbol{P}^\alpha \boldsymbol{P}_\alpha \tag{42.7}$$

называемый *первым фундаментальным тензором* поверхности. Он является единичным тензором в плоскости, касательной к поверхности.

Если тензор второго ранга $\mathbf{X}$ принадлежит поверхности, то детерминант (третий инвариант) $\mathbf{X}$, рассматриваемого как трехмерный тензор, равен нулю. Поэтому детерминантом тензора, принадлежащего поверхности, будем называть его второй инвариант. Эта терминология оправдывается тем, что последний равен определителю матрицы смешанных компонент тензора $\mathbf{X}$ в векторном базисе на поверхности:

$$\begin{gathered}
\mathbf{X} = X^{\alpha}_{.\beta}\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{P}^{\beta} = X^{.\alpha}_{\beta}\boldsymbol{P}^{\beta}\boldsymbol{P}_{\alpha}, \\
\det \mathbf{X} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2\mathbf{X} - \operatorname{tr}\mathbf{X}^2\right), \\
\operatorname{tr}\mathbf{X} = \mathbf{E}\odot\mathbf{X} = \mathbf{G}\odot\mathbf{X}.
\end{gathered} \tag{42.8}$$

Под тензором $\mathbf{X}^{-1}$, обратным к тензору второго ранга $\mathbf{X}$, принадлежащему поверхности, будем понимать тензор второго ранга, также принадлежащий поверхности и удовлетворяющий соотношению $\mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{G}$. Очевидно, что матрицы (размера 2×2) смешанных компонент тензоров $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^{-1}$ взаимно обратны.

Формула Гамильтона-Кэли для двумерных, т.е. принадлежащих поверхности, тензоров второго ранга приобретает вид

$$\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}\operatorname{tr}\mathbf{X} + \mathbf{G}\det\mathbf{X} = 0 \tag{42.9}$$

Дифференцируя по координатам равенство $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N} = 1$, видим, что вектор $\partial\boldsymbol{N}/\partial q^{\alpha}$ принадлежит поверхности и может быть представлен в виде

$$\partial\boldsymbol{N}/\partial q^{\alpha} = -B_{\alpha\beta}\boldsymbol{P}^{\alpha}. \tag{42.10}$$

Для определения величин $B_{\alpha\beta}$ продифференцируем равенство $\boldsymbol{P}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{N} = 0$:

$$\boldsymbol{P}_{\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial q^{\beta}} = -\boldsymbol{N}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}.$$

С учетом (42.10) полученное соотношение можно записать в виде

$$B_{\alpha\beta} = \boldsymbol{N}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial q^{\alpha}\partial q^{\beta}} = B_{\beta\alpha}.$$

Числа $B_{\alpha\beta}$ называются коэффициентами *второй квадратичной формы* поверхности, а тензор второго ранга

$$\mathbf{B} = B_{\alpha\beta}\boldsymbol{P}^{\alpha}\boldsymbol{P}^{\beta} = B^{\alpha\beta}\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{P}_{\beta} = B^{\alpha}_{\beta}\boldsymbol{P}_{\alpha}\boldsymbol{P}^{\beta}, \tag{42.11}$$

$$B^{\alpha\beta} = G^{\alpha\gamma}G^{\beta\delta}B_{\gamma\delta}, \qquad B^{\alpha}_{\beta} = G^{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta}$$

называется *вторым фундаментальным тензором* поверхности. Он характеризует кривизну поверхности в данной точке.

Тензор $\mathbf{B}$, как и $\mathbf{G}$, симметричен и принадлежит поверхности. Как и любой симметричный тензор, он имеет вещественные собственные значения K_1, K_2, называемые *главными кривизнами* поверхности в заданной точке. Спектральное разложение тензора $\mathbf{B}$ записывается в виде

$$\mathbf{B} = K_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + K_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2,$$

где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ – единичные ортогональные векторы, принадлежащие поверхности. Кривые на поверхности, касательные к которым направлены по главным осям $\boldsymbol{e}_\alpha$ тензора $\mathbf{B}$ в этой точке, называются линиями кривизны. Первым и вторым инвариантами тензора $\mathbf{B}$ будут соответственно удвоенная средняя кривизна $2H$ и гауссова кривизна K поверхности:

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{B} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \qquad K = \det\mathbf{B} = K_1K_2. \tag{42.12}$$

Принадлежащий поверхности антисимметричный тензор второго ранга $\mathbf{e}$, определяемый соотношением

$$\mathbf{e} = -\mathbf{G}\times\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}\times\mathbf{G} = \boldsymbol{N}\cdot\mathbf{Д} = \mathbf{Д}\cdot\boldsymbol{N}, \tag{42.13}$$

называется *дискриминантным тензором* поверхности. Здесь $\mathbf{Д}$ – тензор Леви-Чивита (см. п.10). Из (42.13) получим

$$\mathbf{e} = e^{\alpha\beta}\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{P}_\beta = e_{\alpha\beta}\boldsymbol{P}^\alpha\boldsymbol{P}^\beta, \tag{42.14}$$

$$e_{11} = e^{11} = e_{22} = e^{22} = 0, \qquad e_{12} = -e_{21} = \sqrt{G}, \qquad e^{12} = -e^{21} = 1/\sqrt{G}.$$

Имеют место тождества

$$e^{\alpha\beta}e_{\eta\gamma} = \delta^\alpha_\eta\delta^\beta_\gamma, \qquad \mathbf{e}^2 = -\mathbf{G}.$$

Тензор Леви-Чивита выражается через дискриминантный тензор поверхности следующим образом:

$$\mathbf{Д} = \mathbf{e}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}\mathbf{e} - \mathrm{tr}_{(1,2)}(\boldsymbol{N}\mathbf{e}). \tag{42.15}$$

§43. Дифференциальные операторы на поверхности.

Дифференциальный оператор

$$\nabla' = \boldsymbol{P}^\alpha\partial/\partial q^\alpha \tag{43.1}$$

называется набла-оператором на поверхности, а тензор $\nabla'\mathbf{X}$ называется градиентом тензорного поля $\mathbf{X}$, заданного на поверхности. Здесь $\mathbf{X}$ – тензор произвольного ранга в трехмерном евклидовом пространстве. С помощью набла-оператора записывается линейная часть приращения тензорного поля $\mathbf{X}$ при смещении из одной точки поверхности в соседнюю:

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\mathbf{X}. \tag{43.2}$$

На основании (42.10), (43.1) второму фундаментальному тензору поверхности можно дать следующее бескоординатное определение:

$$\boldsymbol{B} = -\nabla'\boldsymbol{N}. \tag{43.3}$$

Учитывая, что тензор Леви-Чивита постоянный, а тензор $\nabla' \boldsymbol{N}$ симметричен, из предпоследнего равенства в (42.13) получаем тождество

$$\nabla' \cdot \mathbf{e} = \nabla' \cdot (\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{Д}) = -\mathbf{Д} \odot \nabla' \boldsymbol{N} = 0.$$

Для любого дважды дифференцируемого тензорного поля, определенного на поверхности, справедливы тождества, аналогичные соотношениям (36.3), (36.4):

$$\nabla' \times (\nabla' \mathbf{X}) = -\boldsymbol{N} \times \mathbf{B} \cdot \nabla' \mathbf{X}, \tag{43.4}$$

$$\nabla' \cdot (\nabla' \times \mathbf{X}) = \boldsymbol{P}^\alpha \cdot \mathbf{B} \cdot \left(\boldsymbol{N} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q^\alpha} \right). \tag{43.5}$$

Используя непосредственно проверяемое тождество

$$\boldsymbol{N} \cdot (\nabla' \times \mathbf{Y}) = -\nabla' \cdot (\boldsymbol{N} \times \mathbf{Y}) = \nabla' \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{Y}) \tag{43.6}$$

и умножив (43.4) слева на вектор $\boldsymbol{N}$, придем к важному тождеству

$$\nabla' \cdot (\mathbf{e} \cdot \nabla' \mathbf{X}) = 0. \tag{43.7}$$

При вычислении градиента тензорного поля на поверхности наряду с формулами дифференцирования вектора нормали (42.10) нужны выражения производных векторов базиса по координатам. Они имеют вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \boldsymbol{P}_\gamma + B_{\alpha\beta} \boldsymbol{N}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{P}^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \boldsymbol{P}^\gamma + B^\alpha_\beta \boldsymbol{N}. \tag{43.8}$$

Символы Кристоффеля $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ на поверхности выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы формулами, повторяющими (38.2), с той разницей, что индексы пробегают значения (1, 2).

Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{a}(q^1, q^2)$. Разложим вектор $\boldsymbol{a}$ на составляющую по нормали к поверхности и составляющую, принадлежащую поверхности:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + a\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{G} = a^\alpha \boldsymbol{P}_\alpha = a_\alpha \boldsymbol{P}^\alpha, \quad a = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{N}.$$

Для градиента векторного поля согласно (42.10), (43.8) получим

$$\nabla' \boldsymbol{a} = (\nabla' \boldsymbol{a}') \cdot \mathbf{G} - a\mathbf{B} + (\nabla' a + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{a}')\boldsymbol{N}. \tag{43.9}$$

Принадлежащий поверхности тензор $(\nabla' \boldsymbol{a}') \cdot \mathbf{G}$ имеет следующее представление:

$$(\nabla' \boldsymbol{a}') \cdot \mathbf{G} = \nabla_\alpha a^\beta \boldsymbol{P}^\alpha \boldsymbol{P}_\beta = \nabla_\alpha a_\beta \boldsymbol{P}^\alpha \boldsymbol{P}^\beta, \tag{43.10}$$

где ∇_α – символ ковариантной производной на поверхности:

$$\nabla_\alpha a^\beta = \frac{\partial a^\beta}{\partial q^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} a^\gamma, \quad \nabla_\alpha a_\beta = \frac{\partial a_\beta}{\partial q^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} a_\gamma. \tag{43.11}$$

Приведем еще представление вектора $\nabla' \cdot \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – принадлежащий поверхности тензор второго ранга:

$$\begin{gathered} \nabla' \cdot \mathbf{X} = \nabla_\alpha X^{\alpha\eta} \boldsymbol{P}_\eta + \boldsymbol{N} \operatorname{tr}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}), \\ \nabla_\beta X^{\alpha\eta} = \frac{\partial X^{\alpha\eta}}{\partial q^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^{\gamma\eta} + \Gamma^\eta_{\beta\gamma} X^{\alpha\gamma}. \end{gathered} \tag{43.12}$$

§44. Интегральные формулы для тензоров на поверхности.

Для теории оболочек важное значение имеет теорема о дивергенции на поверхности, являющаяся аналогом формулы (40.1). Для ее вывода воспользуемся формулой Стокса (41.1).

Предварительно отметим, что тензор произвольного ранга $\mathbf{X}$ можно представить в виде следующего разложения:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{N} \times \mathbf{X}_1 + \boldsymbol{N}\mathbf{X}_2. \tag{44.1}$$

В самом деле, имея в виду тождество $\mathbf{G} = -\boldsymbol{N} \times (\boldsymbol{N} \times \mathbf{G})$, можно написать

$$\mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{G} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}) \cdot \mathbf{X} = -\boldsymbol{N} \times (\boldsymbol{N} \times \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{X},$$

откуда

$$\mathbf{X}_1 = -\boldsymbol{N} \times \mathbf{G} \cdot \mathbf{X} = -\boldsymbol{N} \times \mathbf{X} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}_2 = \boldsymbol{N} \cdot \mathbf{X}.$$

Применим к тензору $\mathbf{X}_1$ формулу Стокса

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}_1)\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{t} \cdot \mathbf{X}_1 \, \mathrm{d}\mathit{\Gamma}, \tag{44.2}$$

где $\boldsymbol{t}$ – единичный вектор касательной к контуру $\mathit{\Gamma}$. Далее имеем

$$\boldsymbol{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}_1) = \boldsymbol{N} \cdot (\nabla' + \boldsymbol{N}\frac{\partial}{\partial Z}) \times \mathbf{X}_1 = \boldsymbol{N} \cdot (\nabla' \times \mathbf{X}_1).$$

Здесь Z – координата, отсчитываемая по нормали к поверхности. Таким образом, хотя в исходной форме теоремы Стокса (41.1) фигурирует тензорное поле, заданное в трехмерной области, левая часть равенства (44.2) не зависит от способа продолжения поля, определенного на поверхности, в трехмерную область, примыкающую к поверхности. Приходим к формуле Стокса, применимой для тензорного поля, определенного только на поверхности:

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \boldsymbol{N} \cdot (\nabla' \times \mathbf{X}_1)\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{t} \cdot \mathbf{X}_1 \, \mathrm{d}\mathit{\Gamma}. \tag{44.3}$$

В соответствии с требуемым в формуле Стокса направлением обхода контура верно равенство

$$\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{N},$$

где $\boldsymbol{m}$ – единичная нормаль к контуру $\mathit{\Gamma}$, лежащая в касательной к поверхности плоскости ($\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{N} = 0$) и направленная в сторону, внешнюю по отношению к поверхности.

Сославшись на (43.6) и тождество $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{N}) \cdot \mathbf{X}_1 = \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{N} \times \mathbf{X}_1)$, вместо (44.3) получим

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \nabla' \cdot (\boldsymbol{N} \times \mathbf{X}_1)\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{N} \times \mathbf{X}_1) \, \mathrm{d}\mathit{\Gamma}. \tag{44.4}$$

Далее на основании (43.3), (42.10) имеем

$$\nabla' \cdot (\boldsymbol{N}\mathbf{X}_2) = (\nabla' \cdot \boldsymbol{N})\mathbf{X}_2 = -2H\mathbf{X}_2. \tag{44.5}$$

Из (44.1), (44.4), (44.5) получаем искомую формулу, справедливую для произвольного непрерывно дифференцируемого тензорного поля $\mathbf{X}$:

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\nabla' \cdot \mathbf{X} + 2H\boldsymbol{N} \cdot \mathbf{X})\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{m} \cdot \mathbf{X}\, \mathrm{d}\mathit{\Gamma}. \tag{44.6}$$

Из (44.6) можно получить более общую формулу. Положим $\mathbf{X} = \mathbf{G}\mathbf{Y}$ и заметим, что $\nabla' \cdot \mathbf{G} = 2H\boldsymbol{N}$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\nabla'\mathbf{Y} + 2H\boldsymbol{N}\mathbf{Y})\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{m}\mathbf{Y}\, \mathrm{d}\mathit{\Gamma} \tag{44.7}$$

Из (44.7) следует формула, аналогичная (40.3):

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\nabla' \times \mathbf{X} + 2H\boldsymbol{N} \times \mathbf{X})\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{m} \times \mathbf{X}\, \mathrm{d}\mathit{\Gamma}. \tag{44.8}$$

Наконец, положив в (44.8) $\mathbf{X} = \boldsymbol{N}\mathbf{Y}$, придем к такой интегральной формуле:

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \nabla' \times (\boldsymbol{N}\mathbf{Y})\, \mathrm{d}\mathcal{O} = -\oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \boldsymbol{t}\mathbf{Y}\, \mathrm{d}\mathit{\Gamma}. \tag{44.9}$$

ЛИТЕРАТУРА.

[1] *Вакуленко А.А.* Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1965.

[2] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

[3] *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

[4] *Зубов Л.М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовск. ун-та, 1982.

[5] *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М.: Гостехиздат. Часть 1. 1947. Часть 2. 1948.

[6] *Картан Э.* Пространства афинной, проективной и конформной связности. Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1961.

[7] *Кильчевский Н.А.* Элементы тензорного анализа и его применения к механике. М. Гостехиздат, 1954.

[8] *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. Наука, 1965.

[9] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

[10] *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963.

[11] *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[12] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

[13] *Румер Ю.Б., Фет А.И.* Теория унитарной симметрии. М.: Наука, 1970.

[14] *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971.

[15] *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974.

[16] *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.

[17] *Федоров Ф.И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.

[18] *Широков П.А.* Тензорное исчисление. Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1961.