

1 Лекция 1. Фазовая плоскость.

Механическая система с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Состояние такой системы в текущий момент времени однозначно определяется значением обобщенной координаты x и скоростью изменения y значения этой координаты. Плоскость переменных x и y называется фазовой плоскостью системы. данному состоянию системы, то есть, каждой паре значений x и y соответствует точка на фазовой плоскости. И наоборот, каждой точке фазовой плоскости соответствует одно и только одно состояние фазовой системы. Изменению состояния системы во времени можно сопоставить движение некоторой точки на фазовой плоскости. Такая точка получила название изображающей. Траектории движения изображающей точки по фазовой плоскости называются фазовыми траекториями. Скорость движения изображающей точки вдоль фазовой траектории называется фазовой скоростью. Вектор фазовой скорости имеет координат

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = P(x, y), \\ V_y = \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

В тех точках, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно не обращаются в ноль, фазовая скорость отлична от нуля.

Точки, в которых $P(x, x)$ и $Q(x, y)$ одновременно равны нулю, называются особыми точками. В особых точках фазовая скорость равна нулю, то есть изображающая точка не может выйти из особой точки без каких-либо внешних возмущений. Особые точки на фазовой плоскости соответствуют состояниям равновесия системы. Состояние равновесия и, соответственно, особые точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Если малое возмущение от состояния равновесия всегда остается малым, то такое состояние равновесия устойчиво. Наоборот, если малое возмущение с временем будет нарастать, то такое состояние неустойчиво.

Чтобы определить устойчивость особых состояний равновесия системы, до-

статочно рассмотреть поведение системы вблизи особых точек. В этой области уравнения (1) можно линеаризовать. Введём новые переменные ξ и η , представляющие собой отклонения переменных x и y от координат особой точки x_0, y_0 .

$$\begin{aligned}\xi &= x - x_0, \\ \eta &= y - y_0.\end{aligned}\tag{2}$$

Линеаризованные уравнения в переменных ξ и η имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta. \end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, & a_{12} &= \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, & a_{22} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0},\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3) имеет вид:

$$\begin{aligned}\xi &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \eta &= C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t},\end{aligned}\tag{4}$$

где $\lambda_{1,2}$ — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0\tag{5}$$

и

$$K_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_{1,2} - a_{22}}.\tag{6}$$

Уравнение (5) называется характеристическим уравнением, а коэффициенты $K_{1,2}$ называются коэффициентами распределения.

В зависимости от характера корней уравнения (5) различают следующие че-

тыре типа особых точек:

- Узел (λ_1 и λ_2 действительны и одного знака). Если λ_1 и λ_2 положительны, то узел является неустойчивым, если отрицательны — устойчивым.
- Седло (λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков). Седло всегда является неустойчивой особой точкой.
- Фокус (λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены). Если действительная часть $\lambda_{1,2}$ отрицательна, то фокус является неустойчивым, если положительна — устойчивым.
- Центр (λ_1 и λ_2 — мнимые). Для определения устойчивости особых точек типа центра требуется учёт членов более высокого порядка малости, чем в уравнениях (3). Если эти члены не влияют на характер особой точки, то особая точка типа центра считается устойчивой особой точкой.

Дифференциальное уравнение фазовой траектории можно получить из (1). Оно имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (7)$$

Решение уравнения (7) зависит от одной произвольной постоянной t описывает интегральные кривые. Через любую точку фазовой плоскости, кроме особых точек, проходит одна и только одна фазовая кривая. Через особую точку могут проходить либо две интегральные кривые, либо бесконечное число интегральных кривых. Кроме того, особая точка сама может представлять собой вырожденную интегральную кривую. Через особые точки типа узла и фокуса проходит бесконечное множество интегральных кривых, а через особую точку типа седла — две интегральные кривые. Особая точка типа центра представляет собой вырожденную интегральную кривую.

Движение системы вблизи состояния равновесия, соответствующую особой точке типа узла или седла, называют аperiodическим движением, а типа фокуса

или центра — колебательным движением. При этом, если состояние равновесия соответствует особой точке типа центра, то движение вблизи этого состояния будет чисто периодическим. Периодическим движениям системы соответствуют на фазовой плоскости замкнутые интегральные кривые. И наоборот, каждой замкнутой интегральной кривой на фазовой плоскости соответствует периодическое движение.

Интегральные кривые, проходящие через особые точки типа седла, называются сепаратрисами. Они разделяют фазовую плоскость на области с принципиально разным характером фазовых траекторий. Это хорошо видно на примере колебаний математического маятника, описываемых уравнением

$$\ddot{\varphi} + b \sin \varphi = 0.$$

Состояния равновесия такого маятника:

$$\varphi = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

Из них устойчивыми являются

$$\varphi = 0, \pm2\pi, \dots$$

Особые точки, соответствующие устойчивым состояниям равновесия, являются особые точки типа центра. Неустойчивым состояниям равновесия

$$\varphi = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$$

соответствуют особые точки типа седла. Из выражений (4) и (5) видно, что в случае особой точки типа седла существуют интегральные кривые, имеющие вблизи особых точек вид прямых, проходящих через эту точку. Уравнения этих прямых

в координатах (2) следующие:

$$\eta = K_1\xi,$$

$$\eta = K_2\xi,$$

где $K_{1,2}$ — определяются выражением (6). Таким образом, в случае математического маятника через особые точки

$$\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$$

под углами $\pm \arctan \sqrt{b}$ проходят интегральные кривые — сепаратрисы, разделяющие фазовую плоскость на различные области.

Если запас энергии маятника не очень велик, то маятник совершает периодические колебания относительно устойчивого положения равновесия. Это соответствует движению изображающей точки по одной из замкнутых интегральных кривых, окружающих особую точку. Если предположить, что запас энергии маятника в точности таков, что маятник должен достигнуть верхнего положения с нулевой скоростью, то такое движение будет соответствовать на фазовой плоскости движению изображающей точки на сепаратрисе. Этот вид движения получил название лимитационного. Если энергия маятника ещё хотя бы чуть-чуть увеличится, то он достигнет верхнего положения равновесия и перейдёт через него. При этом характер его движения существенно изменится: вместо колебаний маятник теперь будет двигаться в одну сторону, совершая вращательные движения.

Кроме особых точек и сепаратрис очень важными на фазовой плоскости являются предельные циклы — изолированные замкнутые траектории (соответствующие периодическим движениям системы), к которым с внутренней и с внешней стороны приближаются соседние траектории по спиралям. Пример устойчивого предельного цикла приведён на рисунке 2, на котором изображён фазовый порт-

рет системы, описываемой системой уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

Поскольку основными характеристиками системы на фазовой плоскости являются особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, то качественное изменение характера фазовых траекторий (а значит, и движений механической системы) может произойти только тогда, когда изменится число и характер либо особых точек, либо сепаратрис, либо предельных циклов значения параметров, при которых происходят такие изменения, называют бифуркационными.

2 Лекция 2. Свободные колебания нелинейных систем.

2.1 Общие понятия

Рассмотрим простейшую нелинейную систему с одной степенью свободы — груз m на нелинейной пружине.

Выберем начало координат в положении равновесия груза. Пружина в этом положении недеформирована. В горизонтальном положении на груз m никакие силы не действуют. Ось Ox направим горизонтально вправо, ось Oy — вертикально вверх.

Дадим грузу m горизонтальное перемещение x в положительном направлении оси Ox , считая, что перемещение груза в горизонтальной оси происходит без трения.

Считаем, что в положительном направлении оси Ox направлена скорость \dot{x} и ускорение \ddot{x} .

Для того, чтобы растянуть пружину на величину x со стороны груза необхо-

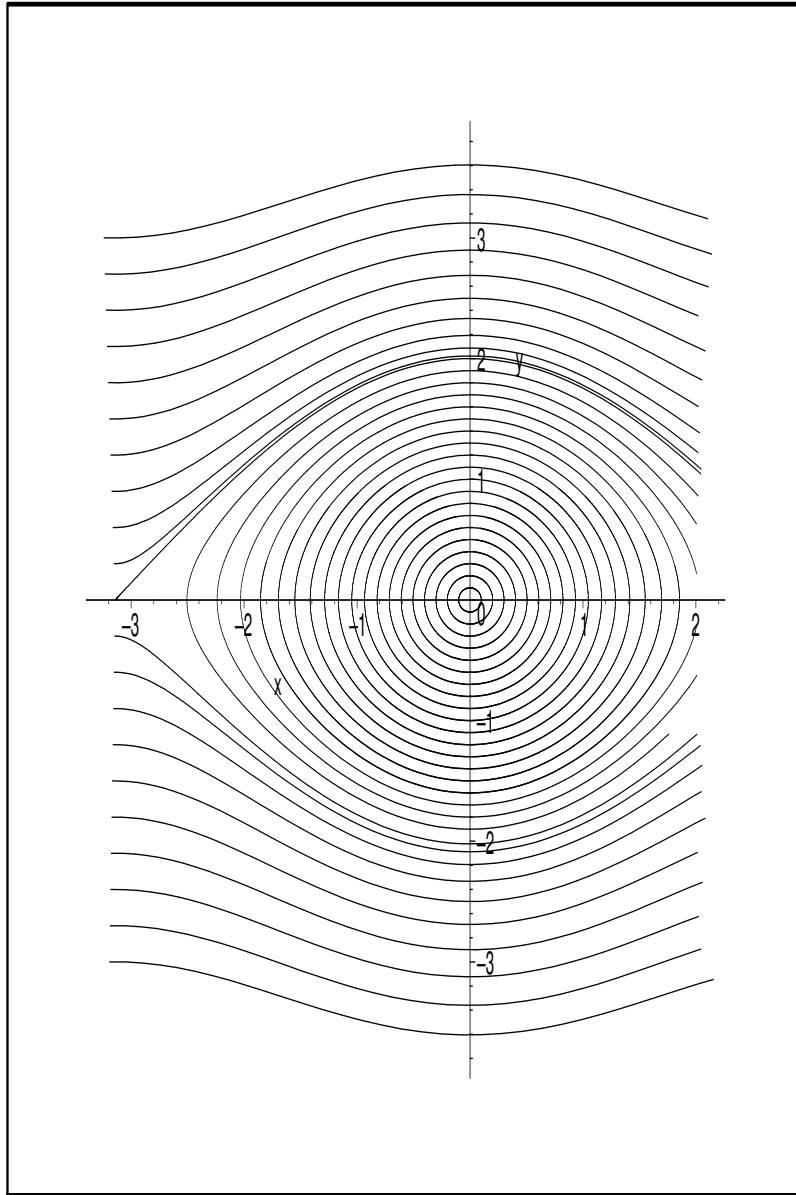


Рис. 1: Фазовый портрет математического маятника в случае $b = 1$. Горизонтальная ось соответствует параметру φ , вертикальная — $\dot{\varphi}$

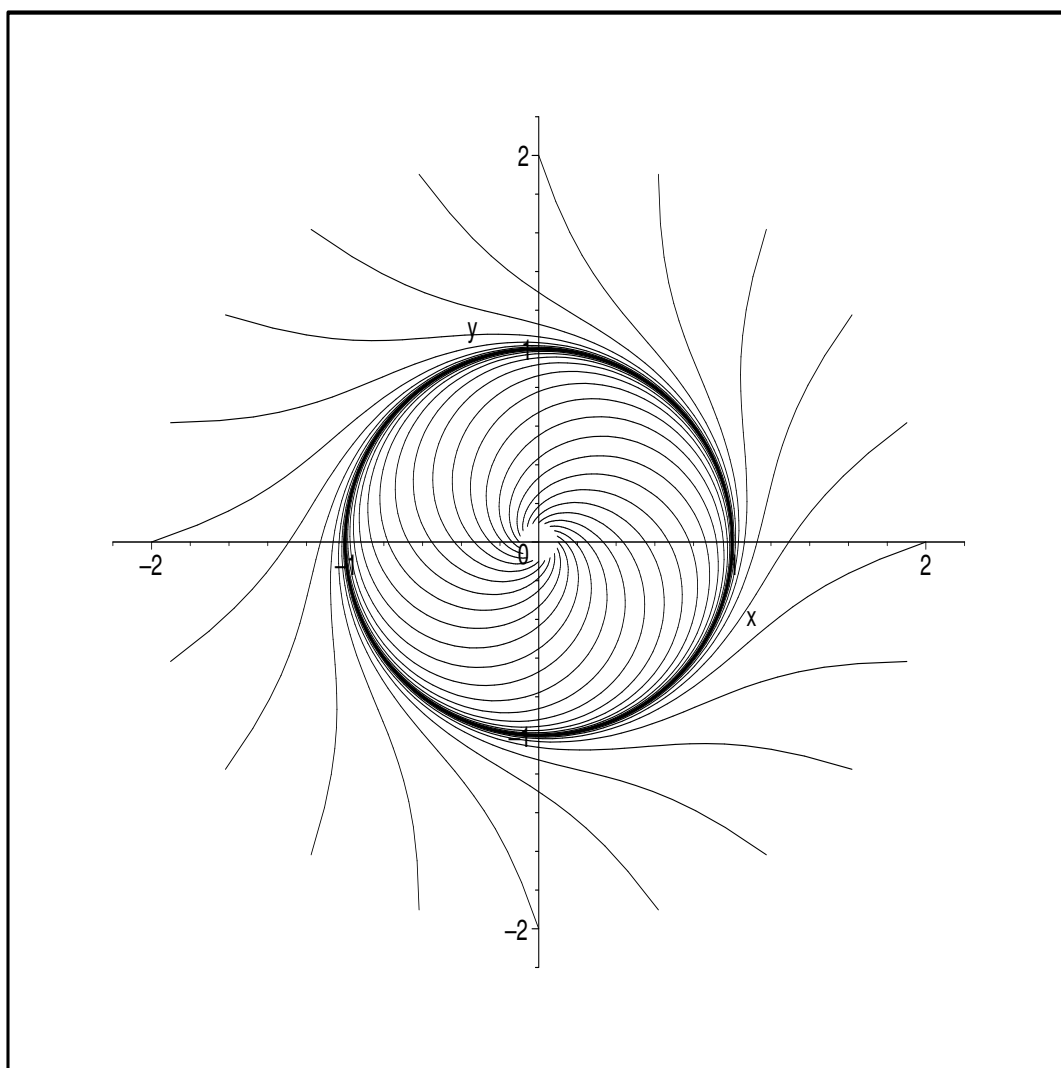


Рис. 2: Устойчивый предельный цикл. Горизонтальная ось соответствует параметру x , вертикальная — y

можно приложить некоторое усилие F .

В общем случае усилие F может зависеть как от смещения x , так и от скорости смещения \dot{x} . Если усилие F зависит только от смещения x , то эта зависимость $F = F(x)$ называется упругой характеристикой пружины. Эта зависимость может быть задана аналитически или графически.

В зависимости от вида характеристики она называется несимметричной ($F(x) \neq -F(-x)$) или симметричной ($F(x) = -F(-x)$)

Величина $F'(x)$ называется жёсткостью пружины. Если жёсткость возрастает с увеличением x , характеристика называется жёсткой, в противном случае — мягкой.

Согласно третьему закону Ньютона на груз со стороны пружины действует в противоположном направлении то же самое усилие $F(x)$, стремящееся вернуть груз в исходное положение.

На этом основании силу $F(x)$ называют восстанавливающей.

Освободим груз от связей и действие связей заменим усилиями R , $F(x)$, действующими на груз со стороны связей.

Запишем второй закон Ньютона

$$m \ddot{x} = -F(x) + R - mg \quad (8)$$

и спроектируем уравнение (8) на оси координат:

$$m \ddot{x} = -F(x); R - mg = 0 \quad (9)$$

Второе равенство определяет величину давления груза на горизонтальную поверхность. Первое определяет закон движения $x(t)$.

В более общем случае дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$\alpha \ddot{q} + F(q) = 0,$$

где q — обобщённая координата, характеризующая положение точки, и $F(q)$ — обобщённая восстанавливающая сила. Например, дифференциальное уравнение колебаний математического маятника имеет вид:

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

2.1.1 Некоторые характеристики нелинейных систем

Точные решения:

Пусть $F(c) = cx$. Тогда уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Отсюда

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t = D \cos(\omega t + \delta). \quad (10)$$

Решение (10) описывает свободные колебания линейной системы. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота свободных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

является параметром самой системы. Поэтому для линейных систем частота свободных колебаний называется «собственной частотой».

В общем случае, когда $F(x)$ не является линейной функцией, исследование свободных колебаний сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения:

$$m\ddot{x} + F(x) = 0. \quad (11)$$

Обозначив $\dot{x} = v$, приведём уравнение (11) к виду:

$$mv \frac{dv}{dx} + F(x) = 0.$$

Откуда

$$m \frac{v^2}{2} + \int_0^x F(x) dx = C = \text{const.} \quad (12)$$

Равенство (12) выражает закон сохранения энергии, первый член левой части представляет собой кинетическую энергию, второй — потенциальную.

Уравнение (12) позволяет изобразить фазовый портрет движения, то есть семейство траекторий в координатах x, \dot{x} . Так как уравнение (12) — чётное относительно $y = \dot{x}$, траектории симметричны относительно оси Ox . В случае симметричной упругой характеристики ($F(-x) = -F(x)$) фазовые траектории симметричны также и относительно вертикальной оси. Замкнутые фазовые траектории соответствуют периодическим движениям.

Предположим, что система совершает колебательное движение, и выберем за начало отчёта времени момент, когда скорость равна нулю и достигается наибольшее отклонение системы от положения равновесия ($x_{max} = A$).

Тогда из (12) следует

$$C = \int_0^A F(x) dx,$$

$$m \frac{v^2}{2} = \int_0^A F(x) dx - \int_0^x F(x) dx = \int_x^A F(x) dx.$$

Отсюда находим:

$$y = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx}$$

$$t = \int \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx}} + B. \quad (13)$$

Так как в процессе колебаний x то возрастает, то убывает, знак перед радикалом нужно выбирать так, чтобы подынтегральное выражение оставалось положительным. В частности, рассматривая первый полупериод, имеем:

$$t = - \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx}} = \int_x^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx}}. \quad (14)$$

Знак минус перед корнем выбран потому, что в рассматриваемом интервале движения (первый полупериод) скорость отрицательна. Равенство (14) даёт обратную зависимость $t = t(x)$ вместо привычного представления перемещения x как функции времени t . Построив график $t = t(x)$ и отобразив его симметрично относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, получим графическое изображение закона движения.

Формула (14) позволяет определить период колебания как время, затрачиваемое на полный цикл движения, при котором изображающая точка обходит полностью фазовую траекторию и вновь занимает исходные координаты, допустим

$$y = \dot{x} = 0, \quad x = x_{max} = A.$$

Если характеристика восстанавливающей силы симметричная, то есть функция $F(x)$ нечётная, то время перехода системы из крайнего положения $x_{max} = A$ в

положение равновесия $x = 0$ составит четверть периода, следовательно

$$\frac{T}{4} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx}}. \quad (15)$$

Частота свободных колебаний определяется формулой

$$P = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2 \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx}}}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что частота свободных колебаний нелинейной системы зависит от частоты колебаний A . Типичная для нелинейных систем зависимость частоты колебаний от амплитуды не позволяет считать частоты колебаний параметром самой системы. Поэтому для нелинейных систем не пользуются термином «собственная частота».

2.1.2 Колебания систем с кусочно-нелинейными характеристиками

Среди нелинейных систем, колебания которых могут быть изучены точно, простейшими являются системы с кусочно-линейными характеристиками.

Метод решения таких задач состоит в том, что на каждом участке точно решается соответствующее дифференциальное уравнение, причем постоянные на каждом последующем участке определяются из условий непрерывности перемещения и скорости. Этот метод называется методом припасовывания.

В качестве примера рассмотрим систему с упругой силой F вида:

$$F(x) = \begin{cases} C_1 x & |x| \leq a \\ C_1 x + C_2(|x| - a) \operatorname{sgn} x & x > a \end{cases}$$

Очевидно, что если амплитуда колебаний меньше зазора, то груз совершает гармонические колебания с частотой

$$p_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}},$$

не зависящей от амплитуды. Пусть теперь амплитуда колебаний A больше a . Тогда дифференциальное уравнение, описывающее движение груза, имеет вид:

$$m\ddot{x} + C_1x + C_2(x - a) = 0, \quad (17)$$

Решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

имеет вид:

$$x = \frac{aC_2}{C_1 + C_2} (1 - \cos p_2t) + A \cos p_2t, \quad (18)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m}}$$

Приравнявая $x = a$, находим значение времени t_* , при котором груз перестанет касаться пружины 2.

$$a = \frac{aC_2}{C_1 + C_2} (1 - \cos p_2t_*) + A \cos p_2t_*,$$

Отсюда

$$t_* = \frac{1}{p_2} \arccos \frac{C_1 a}{(C_1 + C_2)a - aC_2},$$

$$\dot{x}(t_*) = -p_2 \left(A - \frac{aC_2}{C_1 + C_2} \right) \sin p_2t_*, \quad (19)$$

или

$$\dot{x}(t_*) = -p_2 \left(A - \frac{aC_2}{C_1 + C_2} \right) \sqrt{1 - \left[\frac{C_1 a}{(C_1 + C_2)a - aC_2} \right]^2}, \quad (20)$$

Начиная с этого момента, груз движется только под действием пружины 1 и уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + C_1 x = 0, \quad (21)$$

Обозначая $\tau = t - t_*$, имеет для интегрирования уравнения (21) условия

$$x = a, \dot{x} = \dot{x}(t_*) = \dot{x}_*, \tau = 0, \quad (22)$$

Следовательно

$$x = \cos p_1 \tau + \frac{\dot{x}_*}{p_1} \sin p_1 \tau, \quad (23)$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}}$$