

1 Приближённые методы расчёта периодических движений нелинейных систем

1.1 Простейший способ

Наиболее прост следующий, основанный на методе коллокаций, приём приближенного определения закона движения точки.

Решение уравнения

$$m\ddot{x} + F(x) = 0, \quad (1)$$

описывающего движение механической системы с одной степенью свободы и позиционной (зависящей только от координаты) восстанавливающей силой в случае симметрии ($-F(x) = -F(x)$) ищем в виде:

$$x = A \sin(pt + \alpha) \quad (2)$$

Потребуем, чтобы функция (2) удовлетворяла уравнению (1) в момент прохождения через положение равновесия и в моменты, когда x достигает максимума, то есть равно A . Поскольку $F(0) = 0$ и

$$x|_{x=0} = 0,$$

то функция (2) удовлетворяет уравнению (1) в моменты, прохождения через положение равновесия. Далее $x = x_{max}$ при $\sin(pt + \alpha) = 1$. Поэтому

$$\ddot{x}_{max} = -p^2 A$$

Тогда из (1) следует:

$$p^2 = \frac{F(A)}{mA} \quad (3)$$

Последняя формула определяет зависимость частоты свободных колебаний

от амплитуды. График этой зависимости называется **скелетной кривой**.

Подставляя (3) в (2), найдём приближённый закон движения рассматриваемой системы:

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{F(A)}{mA}} t + \alpha \right) \quad (4)$$

1.2 Метод линеаризации

Способ основан на непосредственной замене нелинейной характеристики $F(x)$ некоторым эквивалентным линейным выражением. Так, при симметричной характеристике вместо $F(x)$ принимается cx , где c — коэффициент, значение которого подбирается из условия минимизации интегрального квадратичного уклонения

$$\delta(c) = \int_{-A}^A [F(x) - cx]^2 dx \quad (5)$$

Найдём c , доставляющее минимальное значение уклонению.

$$\frac{d\delta}{dc} = 2 \int_{-A}^A [F(x) - cx] (-x) dx = 0 \quad (6)$$

Преобразуем (6):

$$- \int_{-A}^A xF(x) dx + c \int_{-A}^A x^2 dx = 0$$

Отсюда

$$c = \frac{3}{2A^3} \int_{-A}^A xF(x) dx \quad (7)$$

Чтобы поднять роль больших амплитуд, используют функционал вида:

$$\delta(c) = \int_{-A}^A x^2 [F(x) - cx]^2 dx \quad (8)$$

Тогда формула (7) принимает вид:

$$c = \frac{5}{2A^5} \int_{-A}^A x^3 F(x) dx \quad (9)$$

Частоту колебаний находим по формуле

$$p^2 = \frac{c}{m}$$

1.3 Метод гармонического баланса

Рассмотрим нелинейное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (10)$$

где $f(x)$ — позиционная восстанавливающая сила. Предположим, что восстанавливающая сила является симметричной, то есть $f(x) = -f(-x)$.

Ищем решение уравнения в виде

$$x = A \sin pt, \quad (11)$$

$$-Ap^2 \sin pt + f(A \sin pt) = 0, \quad (12)$$

Функция $f(A \sin pt)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(A \sin pt) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kpt, \quad (13)$$

где

$$B_k = \frac{1}{p\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(A \sin pt) \sin kpt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin k\psi dt$$

Оставим в разложении (14) одно только первое слагаемое и подставим его в (12):

$$-Ap^2 \sin pt + B_1 \sin pt = 0,$$

или

$$-Ap^2 + B_1 = 0, \quad (14)$$

Из (14) получаем выражение для скелетной кривой:

$$p^2 = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi dt, \quad (15)$$

Рассмотрим произвольный случай, когда восстанавливающая сила не является позиционной:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad (16)$$

Ищем решение в виде отрезка ряда Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos pt + B_1 \sin pt + \dots + A_N \cos Npt + B_N \sin Npt, \quad (17)$$

или

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \quad (18)$$

Подставляем (18) в (16):

$$-\sum_{n=1}^N n^2 (A_n \cos npt + B_n \sin npt) + F(t) = 0, \quad (19)$$

В формуле (19) введено обозначение

$$F(t) = f \left[A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos npt + B_n \sin npt), \right. \\ \left. \sum_{n=1}^N n (-A_n \sin npt + B_n \cos npt) \right]$$

Функция $F(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{p}$ и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt), \quad (20)$$

где

$$a_0 = \frac{p}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \cos npt dt,$$

$$b_n = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \sin npt dt,$$

Подставим разложение (20) в уравнение (19) и соберем множители при одинаковых гармониках

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1 : \frac{p}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) dt = 0, \\
 \cos pt : A_1 = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \cos pt dt, \\
 \sin pt : B_1 = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \sin pt dt, \\
 \dots\dots\dots \\
 \cos npt : n^2 A_n = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \cos npt dt, \\
 \sin npt : n^2 B_n = \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \sin npt dt, \\
 n = \overline{1, N}
 \end{array} \right. \quad (21)$$

Уравнения (21) образуют систему для определения A_i, B_i .

Получив выражения для A_1, B_1 , находим амплитуду колебаний по формуле

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$$

и строим скелетную кривую.

1.4 Пример. Уравнение Дюффинга

Рассмотрим уравнение вида:

$$\ddot{x} + k^2 x = \gamma x^3 \quad (22)$$

Решение (22) ищем в виде:

$$x = A \cos pt \quad (23)$$

Подставляем (23) в (22). Получаем:

$$-p^2 A \cos pt + k^2 A \cos pt = \gamma A^3 \cos^3 pt = \frac{\gamma A^3}{4} (3 \cos pt + \cos 3pt)^3 \quad (24)$$

Собираем слагаемые с одинаковой гармоникой, получаем;

$$-p^2 A + k^2 A = \frac{3\gamma A^3}{4} \quad (25)$$

Теперь будем искать решение в более сложном виде:

$$x = A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt \quad (26)$$

Подставляем (26) в (22):

$$\begin{aligned} -p^2 A_1 \cos pt - 9p^2 A_3 \cos 3pt + k^2 (A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt) = \\ = \gamma (A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt)^3 \end{aligned} \quad (27)$$

Разлагая правую часть (28) в ряд Фурье, получаем:

$$\begin{cases} (k^2 - p^2) A_1 = \frac{3A_1\gamma}{4} (A_1^2 + A_1 A_3 + 2A_3^2), \\ (k^2 - 9p^2) A_3 = \frac{\gamma}{4} (A_1^3 + 6A_1^2 A_3 + 3A_3^3) \end{cases} \quad (28)$$

Получаем систему, из которой можно найти A_1 и A_3 .

1.5 Свободные колебания диссипативных систем с одной степенью свободы при линейной восстанавливающей силе

Системы называются диссипативными, если их движения сопровождаются некомпенсируемыми потерями энергии и затуханием колебаний за счёт сил сопротивления.

В диссипативных системах единственным стационарным состоянием является равновесное состояние, обладающее периодической устойчивостью. В диссипативных системах невозможны строго периодические колебательные движения. Не всякая система, движение которой сопровождается расходом энергии за счёт сил сопротивления, ничем не компенсируется. Колебания таких систем затухают. Критерием диссипативности является условие, при котором скорость точки и приложенная к ней сила сопротивления, противоположно направлены.

1.5.1 Вязкое трение

Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы с учётом трения и при линейной восстанавливающей силе.

Уравнение имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - R, \quad (29)$$

c — жёсткость пружины. Зависимость силы трения от смещения при скорости определяется физической природой трения. Наиболее простым случаем является так называемое вязкое трение, когда сила пропорциональна скорости движения:

$$R = \alpha\dot{x}$$

В этом случае уравнение движения (29) запишется в виде:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0; \quad 2n = \frac{\alpha}{m}; \quad k^2 = \frac{c}{m} \quad (30)$$

Решение уравнения (30) определяется формулой

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (31)$$

$$\omega^2 = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad k > n$$

Как известно из (31), при наличии вязкого трения закон движения $x(t)$ массы

m описываются непериодической функцией по времени t . Однако часто это движение называют периодическими затухающими по времени колебаниями, несмотря на математическую неточность этого названия. Под периодом T этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величину ω называют круговой частотой затухающих колебаний.

Логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений A_k и A_{k+1} называют логарифмическим декрементом колебания.

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = nT \quad (32)$$

Представив A_{k+1} в виде $A_{k+1} = A_k - \Delta A_k$ и считая, что колебания затухают медленно

$$\frac{\Delta A_k}{A_k} \ll 1,$$

из (32) находим:

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_k - \Delta A_k} = \ln \frac{1}{1 - \Delta A_k/A_k} \approx \frac{\Delta A_k}{A_k} \quad (33)$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен относительному изменению амплитуды колебания за период T .

Из (32) и выражения для ω в (31) выводим:

$$\delta = nT = n \frac{2\pi}{\omega} = n \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

Отсюда находим:

$$n^2 = K^2 \frac{(\delta/(2\pi))^2}{1 + (\delta/(2\pi))^2} \quad (34)$$

Подставив это значение n^2 в выражение для ω в (31), получаем:

$$\omega = \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{k}{1 + (\delta/(2\pi))^2} \quad (35)$$

Из формулы (35) видно, что даже при значительном затухании частота ω затухающих колебаний мало отличается от частоты k собственных колебаний соответствующей системы без трения. Так, например, даже когда каждый следующий взмах вдвое меньше предыдущего ($\ln 2 = 0,693$), то частота ω лишь на 0,6% меньше, чем k .

1.6 Сухое трение

Рассмотрим движение упруго опёртого груза массы m по шероховатой поверхности.

Сила трения, действующая на груз, постоянна по величине и направлена против движения. Уравнение свободных колебаний такой системы при линейной восстанавливающей силе имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - R_0\dot{x}, \quad \dot{x} = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0; \\ -1, & \dot{x} < 0; \\ 0, & \dot{x} = 0; \end{cases} \quad (36)$$

Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A и отпустим его без начальной скорости. В этом случае:

$$x_0 = A, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (37)$$

Чтобы груз начал двигаться, необходимо, чтобы восстанавливающая сила A была численно больше статической силы трения R_0 , то есть движение возможно

при

$$A > \frac{R_0}{c}.$$

Зона

$$-\frac{R_0}{c} < x < \frac{R_0}{c}$$

называется зоной застоя или мёртвой зоной.

Под действием натяжения пружины на первом этапе груз будет двигаться влево ($\dot{x} < 0$) и уравнение движения будет:

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0 \quad (38)$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = k^2a; \quad (39)$$

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad a = \frac{R_0}{c}.$$

Величина a представляет собой отклонение груза под действием максимально возможной силы трения.

Общее решение уравнения (39) имеет вид:

$$x = a + C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \quad (40)$$

Определяя постоянные из начальных условий (37), получаем:

$$x = a + (A - a) \cos pt \quad (41)$$

Этот закон движения справедлив, пока $\dot{x} < 0$. Так как

$$\dot{x} = -p(A - a) \sin pt,$$

то скорость движения будет отрицательной до момента времени t_1 , определяемого

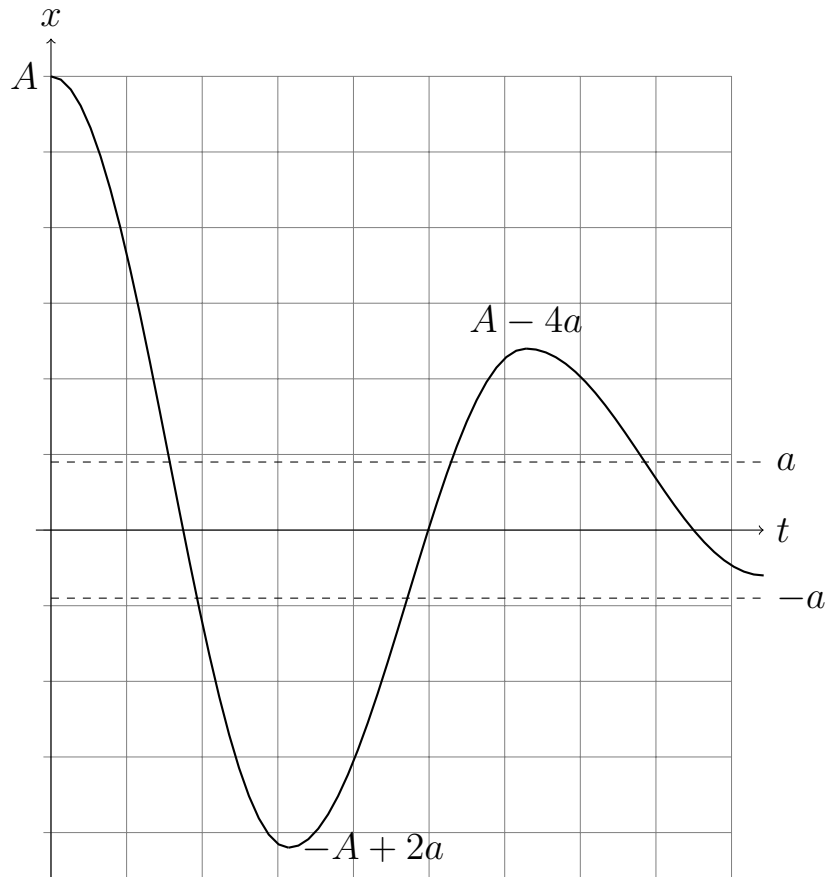


Рис. 1: График движения

из условия $pt_1 = \pi$. В этот момент груз остановится. Смещение его:

$$x = a + (A - a) \cos \pi = 2a - A \quad (42)$$

Под действием трения отклонения груза уменьшилось по абсолютной величине на $2a$. После остановки груз начинает двигаться вправо.

Повторяя приведённые выше расчёты, можно показать, что движение направо продолжается в течении времени π/p . Максимальное отклонение вправо равно $A - 4a$. Процесс движения продолжается до тех пор, пока груз не попадёт в зону застоя и не остановится. Зависимость смещения от времени на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещённую по оси Ox на величину a или $-a$ с амплитудой, уменьшающейся по закону геометрической прогрессии.

Время между соседними максимумами отклонения можно условно назвать пе-

риодом движения

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Частота колебаний при сухом трении такая же, как в соответствующей системе без трения.

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением строится следующим образом. В координатах $x, \dot{x}/p$ гармонический закон движения изображается дугами окружности. Если в уравнение (39) ввести новую переменную $x - a$, то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости отображается полуокружностью радиуса $A - a$ и центром в точке $x = -a$. На втором этапе движения, когда $\dot{x} > 0$, уравнение движения

$$\ddot{x} + p^2 x = -p^2 a$$

может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением $x + a$. На фазовой плоскости на втором этапе движения получаем получаем полуокружность с центром в точке $x = a$. И так до тех пор, пока кривая при $\dot{x} = 0$ не попадает в зону застоя $-a < x < a$. В результате фазовый портрет свободных колебаний с сухим трением имеет вид:

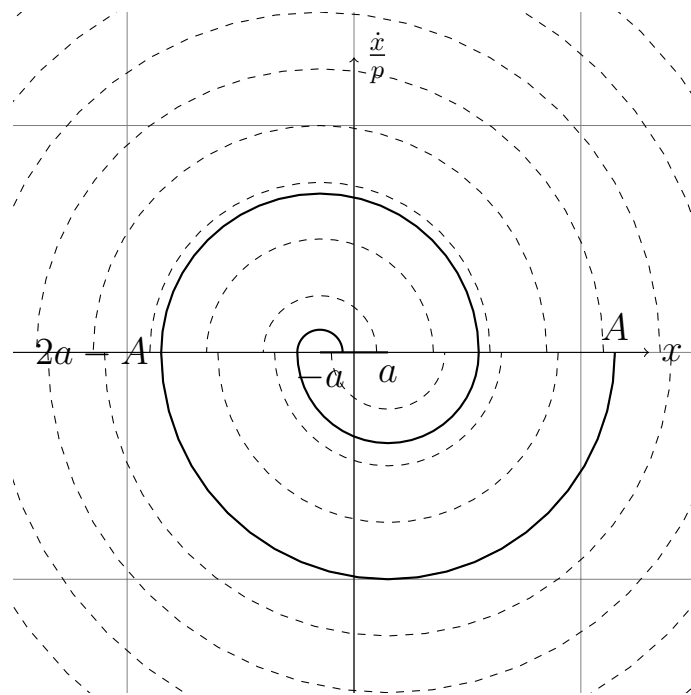


Рис. 2: Фазовый портрет