24 марта 2020 г.

1 Метод Капицы

Рассмотрим колебательную систему, находящуюся одновременно под действием постоянной во времени позиционной поступательной силы

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

и периодической силы

$$f(x,t) = f_1(x)\cos\omega t + f_2(x)\sin\omega t,$$

меняющейся со временем с большой частотой ω (f_1, f_2 — функции только от координат). Под «большой» понимается частота, удовлетворяющая условию

$$\omega >> \frac{1}{T},$$

где T — характерное время (период) движения, которое бы происходило под действием силы $F(x)$ при $f(x,t) = 0$. При своей величине сила $f(x,t)$ не предполагается слабой по сравнению с силой $F(x)$. Мы будем, однако, предполагать малым вызываемое этой силой колебательное смещение ξ точки. Уравнение движения точки под действием сил F и f имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f(x,t) \tag{1}$$

Из характера действующих на точку сил заранее ясно, что её движение будет представлять собой перемещение вдоль некоторой плавной траектории с одновременными малыми осцилляциями с частотой ω вокруг неё. Соответственно этому представим $x(t)$ в виде суммы:

$$x(t) = y(t) + \xi(t), \tag{2}$$

где $\xi(t)$ представляет собой указанные малые осцилляции. Среднее значение функции $\xi(t)$ за время её периода обращается в нуль, функция же $x(t)$ за это время меняется очень мало. Обозначая среднее за период чертой над буквой, имеем

$$\bar{x} = y(t),$$

то есть функция $y(t)$ описывает усредненное по быстрым осцилляциям «плавное» движение частицы. Выведем уравнение, определяющее эту функцию. Подставляя (2) в (1) и разлагая по степеням ξ с точностью до членов первого порядка, получим:

$$m\ddot{y} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dy} - \xi\frac{d^2U}{dy^2} + f(y,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

В этом уравнении фигурируют слагаемые различного характера — осциллирующие и «плавные». Они должны взаимно сокращаться в каждой из этих групп по отдельности. Для осциллирующих членов достаточно написать:

$$m\ddot{\xi} = f(y,t) = f_1(x)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t. \tag{4}$$

Остальные слагаемые содержат малый множитель ξ и поэтому малы по сравнению с написанными. Что касается производной $\ddot{\xi}$, то она пропорциональна величине ω^2 и поэтому не мала. Интегрируя уравнение (4) (при этом рассматривая y как постоянную), получим:

$$\xi = -\frac{f(y)}{m\omega^2} \tag{5}$$

Осредним теперь уравнение (3) по времени в указанном выше смысле. Поскольку средние значения первых степеней f и ξ обращаются в нуль, получим уравнение:

$$m\ddot{y} = -\frac{dU}{dy} + \xi\frac{df}{dy} = -\frac{dU}{dy} - \frac{1}{m\omega^2}f\frac{df}{dy},$$

содержащее уже только функцию $y(t)$. Перепишем его окончательно в виде:

$$m\ddot{y} = -\frac{dU_{eff}}{dy} \tag{6}$$

где «эффективная потенциальная энергия» определяется по формуле

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\bar{f}^2 = U + \frac{1}{4m\omega^2}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \tag{7}$$

Таким образом, усреднённое по осцилляциям движение частицы происходит так, как если бы помимо силового постоянного во времени поля U действовало бы ещё и постоянное во времени поле, квадратично зависящее от амплитуды переменного поля.

1.1 Пример. Колебания опрокинутого маятника

Определим положение устойчивого равновесия маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с большой частотой.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$ml\ddot{\varphi} = -(mg + F_{in})\sin\varphi,\ F_{in} = -mA\omega^2\cos\omega t \tag{8}$$

или

$$m\ddot{\varphi} = -\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{gm}{l}\cos\varphi\right) + f,\ f = -m\frac{A\omega^2}{l}\sin\varphi\cos\omega t \tag{9}$$

Тогда, согласно (7), имеем:

$$U_{eff} = -\frac{gm}{l}\cos\varphi + \frac{1}{4m\omega^2}\frac{m^2\omega^4}{l^2}A^2\sin^2\varphi \tag{10}$$

Как известно, положениям устойчивого равновесия соответствуют минимумы потенциальной энергии (в данном случае эффективной потенциальной энергии). Вычисляем первую и вторую производные U_{eff} по φ:

$$\frac{dU_{eff}}{d\varphi} = \frac{gm}{l}\sin\varphi + \frac{m\omega^2 A^2}{2l^2}\sin\varphi\cos\varphi \tag{11}$$

$$\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2} = \frac{gm}{l}\cos\varphi + \frac{m\omega^2 A^2}{2l^2}\cos 2\varphi \tag{12}$$

Приравнивая нулю первую производную, находим значения, при которых U_{eff} принимает экстремальные значения:

$$\frac{gm}{l}\sin\varphi + \frac{m\omega^2 A^2}{2l^2}\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

или:

$$\sin\varphi\left(\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2 A^2}{2l^2}\cos\varphi\right) = 0$$

Уравнение распадается на сомножители:

$$\sin\varphi = 0 \tag{13}$$

и

$$\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2 A^2}{2l^2}\cos\varphi = 0 \tag{14}$$

Рассматривая (13), получаем два положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_1 = \pi$$

Определяя знак второй производной, находим:

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = \frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2 A^2}{2l^2} > 0 \tag{15}$$

Таким образом, нижнее положение маятника $\varphi = 0$ является устойчивым.

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2} \tag{16}$$

Раммmотрим неравенство

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2} > 0 \tag{17}$$

Рассматриваем неравенство (17) и находим

$$A^2\omega^2 > 2gl \tag{18}$$

При выполнении условия (18) верхнее положение маятника $\varphi = \pi$ является устойчивым.

2 Резонансные колебания нелинейных систем

Рассмотрим колебания системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} + k^2x = A\cos\omega t + \varepsilon\varphi(x, \dot{x}) \tag{19}$$

В случае нерезонансных колебаний отыскивались периодические решения уравнений (19), которые при $\varepsilon \to 0$ переходили в периодические решения порождающего уравнения:

$$\ddot{x} + k^2x = A\cos\omega t \tag{20}$$

При $\omega = k$ уравнение (20) не имеет периодического решения. Поэтому, чтобы и в этом случае строить периодические решения уравнения (19), переходящие в периодические решения порождающего уравнения, рассматриваем лишь те задачи, в которых интенсивность внешнего возбуждения мала:

$$A = \varepsilon a.$$

Итак, будем рассматривать уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon a \cos \omega t + \varepsilon \varphi(x, \dot{x}) \tag{21}$$

и предположим

$$k^2 = \omega^2 - \varepsilon \delta.$$

Рассмотрим порождающее уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{22}$$

Уравнение (22) допускает двух параметрическое семейство периодических решений периода возмущабщей силы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} :$$

$$x = M \cos \omega t + N \sin \omega t \tag{23}$$

Попробуем отыскать периодические решение уравнение (21), которое при $\varepsilon \to 0$ переходит в одно из решений семейства (23). Решение будем искать в виде ряда:

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + ..., \tag{24}$$

где $x^{(0)}$ — одна из функций семейства (23). Функция $x^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = a \cos \omega t + \varphi(M \cos \omega t + N \sin \omega t, \\ -M\omega \sin \omega t + N\omega \cos \omega t) + \delta\left(M \cos \omega t + N \sin \omega t\right) \end{gathered} \tag{25}$$

Для того, чтобы уравнение (25) допускало периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы разложение правой части в ряд Фурье не содержало членов $A\cos\omega t$, $B\sin\omega t$. Эти условия дают нам два уравнения для определения неизвестных чисел M и N:

$$\begin{cases} P(M,N) = M\delta + a + \dfrac{2}{T}\displaystyle\int\limits_0^T \varphi(M\cos\omega t + N\sin\omega t, \\ \qquad\qquad -M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t)\cos\omega t dt = 0 \\ Q(M,N) = N\delta + \dfrac{2}{T}\displaystyle\int\limits_0^T \varphi(M\cos\omega t + N\sin\omega t, \\ \qquad\qquad -M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t)\sin\omega t dt = 0 \end{cases} \tag{26}$$

В этом случае функция

$$x = \tilde{M}\cos\omega t + \tilde{N}\sin\omega t$$

модет быть пределом периодических решений уравнения (21) при $\varepsilon \to 0$. Если

$$M = \tilde{M},\ N = \tilde{N},$$

то периодические решения уравнения (25) имеют вид:

$$x^{(1)} = M_1\cos\omega t + N_1\sin\omega t + \Phi^{(1)}, \tag{27}$$

где M_1 и N_1 — произвольные постоянные, а Φ_1 — частное решение, которое после разложения правой части (25) в ряд Фурье строится в виде ряда Фурье, не содержащего первых гармоник, поскольку M и N выбраны так, чтобы разложение в ряд Фурье правой части (25) не содержало первых гармоник.

Рассмотрим теперь уравнение для $x^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} = \delta\left(\Phi_1 + M_1\cos\omega t + N_1\sin\omega t\right) + \\ + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\left(\Phi_1 + M_1\cos\omega t + N_1\sin\omega t\right) + \\ + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\left(\dot{\Phi}_1 - \omega M_1\sin\omega t + \omega N_1\cos\omega t\right)\end{aligned} \tag{28}$$

Производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}$$

вычислены для значений $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$. Таким образом, правая часть уравнения (28) является периодической функцией с периодом $T = 2\pi/\omega$. Следовательно, для существования периодических решений уравнения (28) необходимо и достаточно, чтобы постоянные M_1 и N_1 были выбраны так, чтобы разложения правой части уравнения (28) в ряд Фурье не содержало первых гармоник. Таким образом, постоянные M_1 и N_1 удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}M_1\left[\delta + \frac{2}{T}\int\limits_0^T\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\cos^2\omega t - \omega\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\cos\omega t\sin\omega t\right)dt\right] + \\ + \frac{2N_1}{T}\int\limits_0^T\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\cos\omega t\sin\omega t + \omega\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\cos^2\omega t\right)dt + \psi_1 = 0 \\ \frac{2M_1}{T}\int\limits_0^T\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\cos\omega t\sin\omega t - \omega\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\sin^2\omega t\right)dt + \\ + N_1\left[\delta + \frac{2}{T}\int\limits_0^T\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\sin^2\omega t + \omega\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\cos\omega t\sin\omega t\right)dt\right] + \\ + \psi_2 = 0\end{aligned} \tag{29}$$

В системе (29) введены обозначения:

$$\psi_1 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\Phi^{(1)} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0}\dot{\Phi}^{(1)}\right)\cos\omega t dt$$

$$\psi_2 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} \Phi^{(1)} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\bigg|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{\Phi}^{(1)} \right) \sin \omega t dt$$

При этом учтено, что разложение функции $\Phi^{(1)}$ не содержит первых гармоник. Системе (29) можно придать следующий вид:

$$\begin{cases} M_1 \dfrac{\partial P}{\partial M} + N_1 \dfrac{\partial P}{\partial N} = -\psi_1, \\ M_1 \dfrac{\partial Q}{\partial M} + N_1 \dfrac{\partial Q}{\partial N} = -\psi_2. \end{cases} \tag{30}$$

Для разрешимости системы (30) необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial M} & \dfrac{\partial P}{\partial N} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial M} & \dfrac{\partial Q}{\partial N} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{31}$$

Элементы этого определителя вычислены при $M = \tilde{M}$ и $N = \tilde{N}$. Следовательно, условие (31) означает, что величины $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ являются простыми корнями уравнений (26). При выполнении условия (31) уравнения (30) разрешимы и определяют постоянные M_1 и N_1. Функция x_2 в этом случае будет определяться формулой:

$$x^{(2)} = \Phi^{(2)} + M_2 \cos \omega t + N_2 \sin \omega t, \tag{32}$$

где M_2 и N_2 — произвольные постоянные, которые могут быть определены из условий разрешимости третьего приближения. Приведенные рассуждения нетрудно продолжить по индукции и показать, что задача построения периодического решения уравнения номера k сводится к решению алгебраической системы вида:

$$\begin{cases} M_k \dfrac{\partial P}{\partial M} + N_k \dfrac{\partial P}{\partial N} = -\psi_1^{(k)}, \\ M_k \dfrac{\partial Q}{\partial M} + N_k \dfrac{\partial Q}{\partial N} = -\psi_2^{(k)}. \end{cases} \tag{33}$$

Система (33) всегда разрешима, если только $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ — простые корни системы (26). Итак, если система уравнений (26) имеет простые корни, то каждой системе простых корней $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ соответсвует ряд (24), каждый член которого вычисляется по изложенной выше процедуре. Доказано, что при условии аналитичности $\varphi(x, \dot{x})$ относительно своих аргументов ряды сходятся для достаточно малых значений ε. В этом случае уравнение (21) допускает периодическое решение. Число периодических решений соответствует числу простых корней (26). Если корни (26) — кратные, периодические решения строятся по дробным степеням параметра ε.

Если $\omega \neq k$, то при $\varepsilon = 0$ мы имеем нерезонансный случай и амплитуды вынужденных колебаний имеют порядок возмущающей силы, то есть порядок $O(\varepsilon)$.

Если $\omega = k$, то при $\varepsilon = 0$ амплтуда вынужденных колебаний имеет порядок $O(1)$ при бесконечно малой интенсивности возмущающей силы.

Поэтому явлением резонанса в нелинейной системе естественно назвать возникновение интенсивных колебаний при исчезающе малой интенсивности возмущающей силы и при условии, что частота возмущающей силы близка к собственной частоте линейных колебаний.

2.1 Пример. Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\beta\cos t + \varepsilon\left(\alpha - \gamma^2 x^2\right)\dot{x};\ \omega^2 - 1 - \varepsilon\delta$$

Разлагаем решение в ряд:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ..., \tag{34}$$

Выписываем уравнения при различных степенях ε:

$$\varepsilon^0 : \ddot{x}_0 + x_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{x}_1 + x_1 = \delta x_1 + \beta\cos t + \left(\alpha - \gamma^2 x_0^2\right)\dot{x}_0,$$

и так далее.

Порождающее уравнение имеет решение

$$x_0 = M\cos t + N\sin t,$$

Подставляем x_0 в уравнение для x_1. Потребуем ортогональности правой части функциям $\cos t$, $\sin t$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \beta\cos t + \left[\alpha - \gamma^2 \left(M\cos t + N\sin t\right)^2\right] \left(-M\sin t + N\cos t\right) + \\ \qquad\qquad + \delta\left(M\cos t + N\sin t\right) \Big\} \cos t dt = 0 \\ \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \beta\cos t + \left[\alpha - \gamma^2 \left(M\cos t + N\sin t\right)^2\right] \left(-M\sin t + N\cos t\right) + \\ \qquad\qquad + \delta\left(M\cos t + N\sin t\right) \Big\} \sin t dt = 0 \end{cases}$$

Раскрываем интегралы:

$$\begin{cases} \beta\pi + M\delta\pi + N\pi\left[\alpha - \frac{\gamma^2}{4}\left(M^2 + N^2\right)\right] = 0 \\ N\delta\pi - M\pi\left[\alpha - \frac{\gamma^2}{4}\left(M^2 + N^2\right)\right] = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} M\delta + N\left[\alpha - \frac{\gamma^2}{4}\left(M^2 + N^2\right)\right] = -\beta \\ N\delta - M\left[\alpha - \frac{\gamma^2}{4}\left(M^2 + N^2\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Положим

$$M = A\cos\varphi,\ N = A\sin\varphi$$

Система приобретает вид:

$$\begin{cases} A\left[\delta\cos\varphi + \sin\varphi\left(\alpha - \dfrac{\gamma^2}{4}A^2\right)\right] = -\beta \\ A\left[\delta\sin\varphi - \cos\varphi\left(\alpha - \dfrac{\gamma^2}{4}A^2\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Возводя в квадрат и складывая эти уравнения, исключаем φ:

$$A^2\left[\delta^2 + \left(\alpha - \frac{\gamma^2}{4}A^2\right)^2\right] = \beta^2$$

Таким обазом, величина A^2 удовлетворяет кубическому уравнению. Может оказаться, что это уравнение имеет три положительных корня. В этом случае возможно существование трёх резонансных режимов.