Сплайны.
Кривые и поверхности

Компьютерная графика

Представление кривых на плоскости

- явный способ (explicit curves)

$$y = f(x) \qquad\qquad y = \sin(x)$$

- неявный способ (implicit)

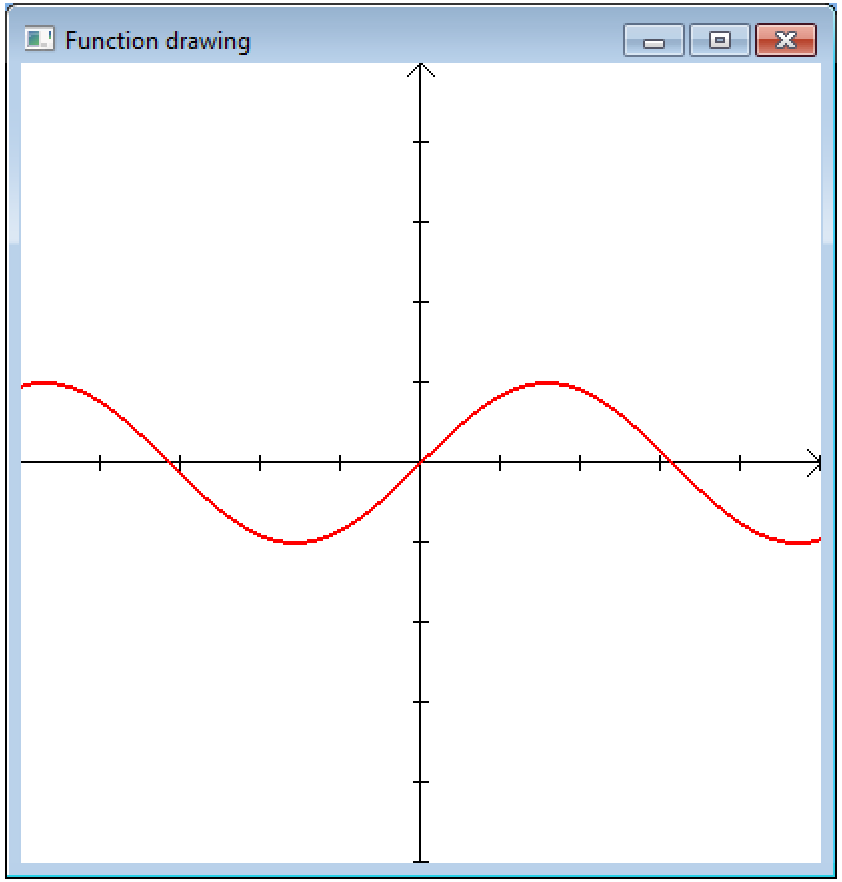
$$f(x, y) = 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

- параметрический способ (parametric curves)

$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}, t \in [a,\ b] \qquad\qquad \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in [0,\ 2\pi)$$

Явный способ (explicit curves)

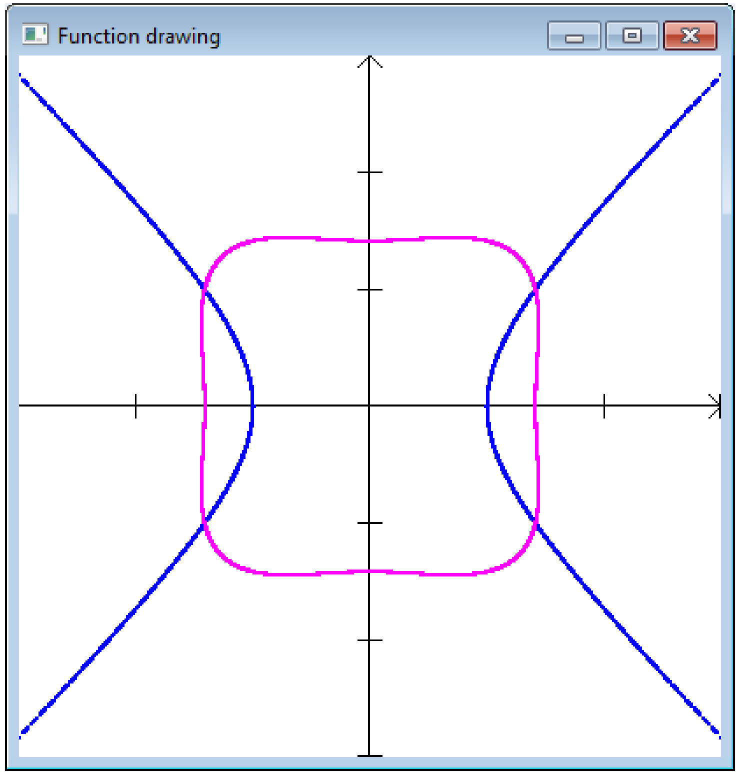
```
x = MinX;
MoveTo(x, F(x));
while (x <= MaxX)
{
   LineTo(x, F(x));
   x = x + Step;
}
```



$y = \sin(x)$

Неявный способ (implicit)

```
var y:=MinY;
  while y<=MaxY do
  begin
    var x:=MinX;
    while x<=MaxY do
    begin
      var f:=FF(x,y);
      if abs(f)<0.05 then
        setpixel(x,y);
      x+=stepX;
    end;
    y+=stepY;
  end;
```

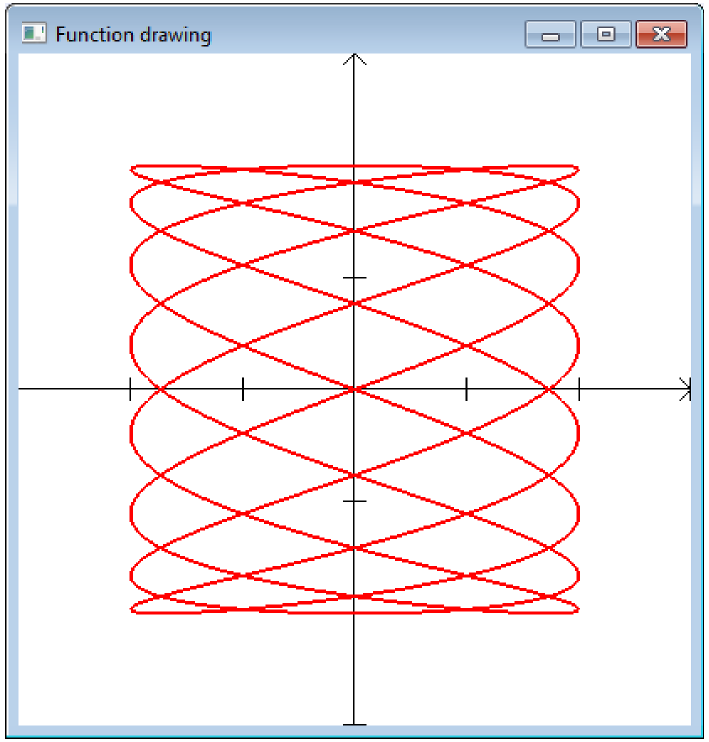


$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2 = 0$$

Параметрический способ (parametric curves)

```
t = A;
x = Fx(t);
y = Fy(t);
MoveTo(x, y);
while (t <= B)
{
   x = Fx(t);
   y = Fy(t);
   LineTo(x, y);
   t = t + Step;
}
```



$$\begin{cases} f_x(t) = 2 \cdot \sin(8 \cdot t) \\ f_y(t) = 2 \cdot \sin(3 \cdot t) \end{cases}$$

А если вид функции неизвестен?

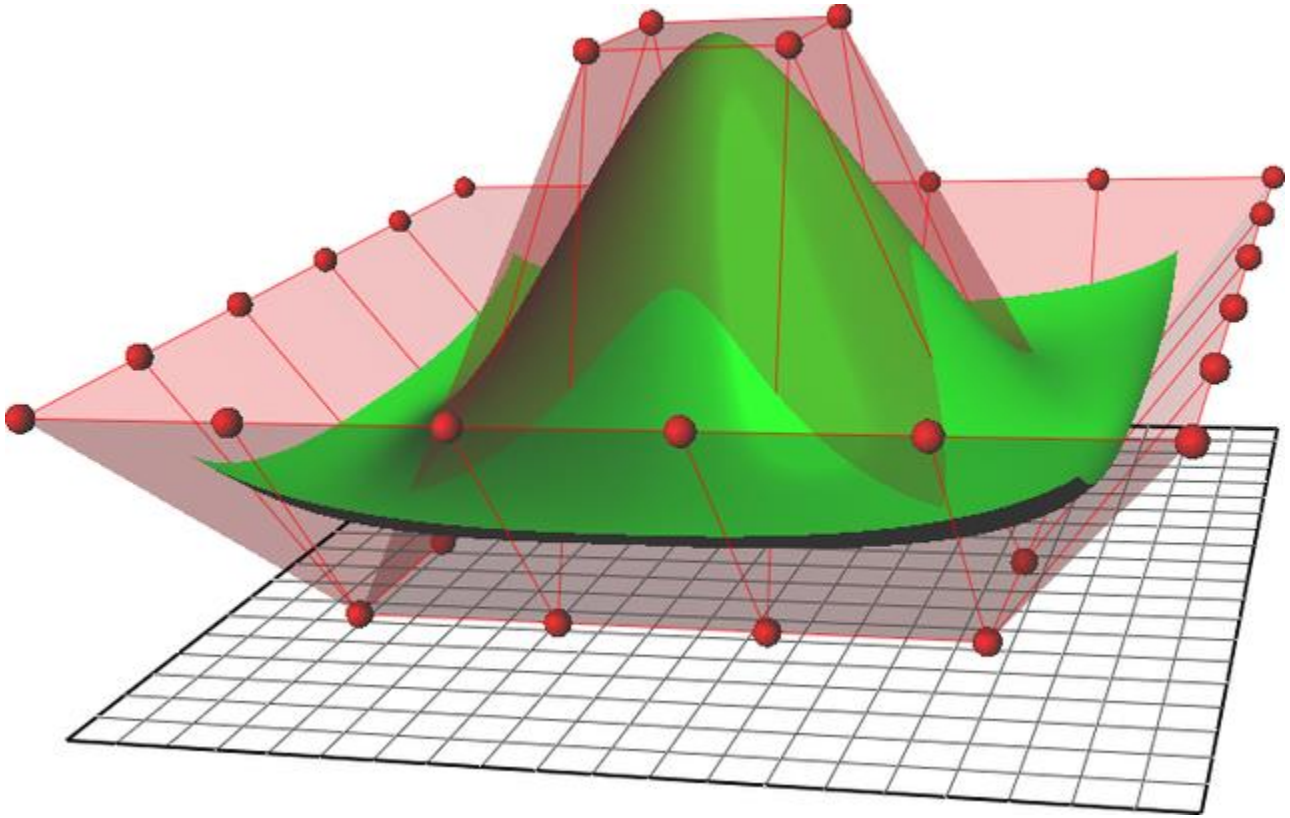
А если вид функции неизвестен?

А что известно?

А если вид функции неизвестен?

А что известно?

Например, отдельные точки кривой, описание которой хотим получить

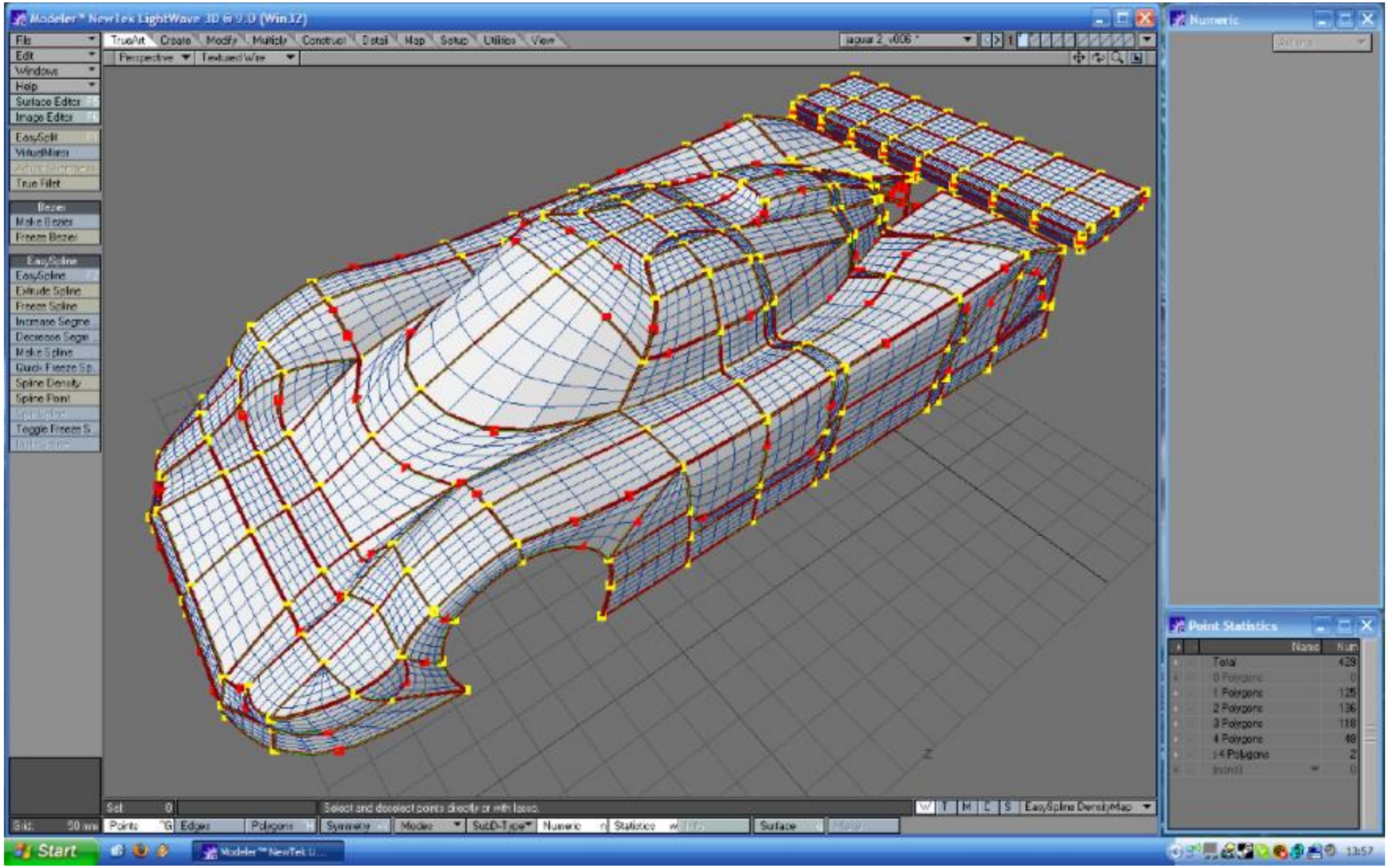


Кривые Безье или Кривые Бернштейна-Безье

60-е годы XX века

- Пьер Безье (Pierre Bézier) из автомобилестроительной компании «Рено»
- Поль де Кастельжо (Paul de Faget de Casteljau) из компании «Ситроен»
- Сергей Натанович Бернштейн

Автомобиль — двигатель прогресса



Пьер Безье (Pierre Bézier)

Французский инженер и
патентообладатель кривых Безье и поверхностей Безье

1962 год

В компании Рено (1933 - 1975) разработал компьютерную систему проектирования *UNISURF*, предназначенную для проектирования кузовов автомобилей.

В 1985 году получил награду от *ACM SIGGRAPH* за пожизненный вклад в компьютерную графику и интерактивную технику.

1 сентября 1910 г - 25 ноября 1999 г.
(89 лет)

Поль де Кастельжо

1959

Производственная тайна до
конца 1960-х
Компания Citroen

Рекурсивный способ определения
кривых (алгоритм де Кастельжо)

19 ноября 1930 - 24 марта 2022
(91 год)

Бернштейн, Сергей Натанович

советский математик

Кривые Безье – частный случай многочленов Бернштейна, описанных Сергеем Натановичем Бернштейном в 1912 году

При доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса Бернштейном были построены полиномы, оказавшиеся полезными в самых разных областях математики. Теперь их называют полиномами Бернштейна.

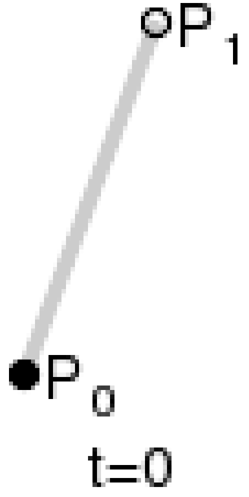
5 марта 1880 — 26 октября 1968

Кривые Безье (Pierre Bézier): линейные

- Линейная интерполяция между концевыми точками

$$B = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$t \in [0,1]$$



Кривые Безье: квадратичные

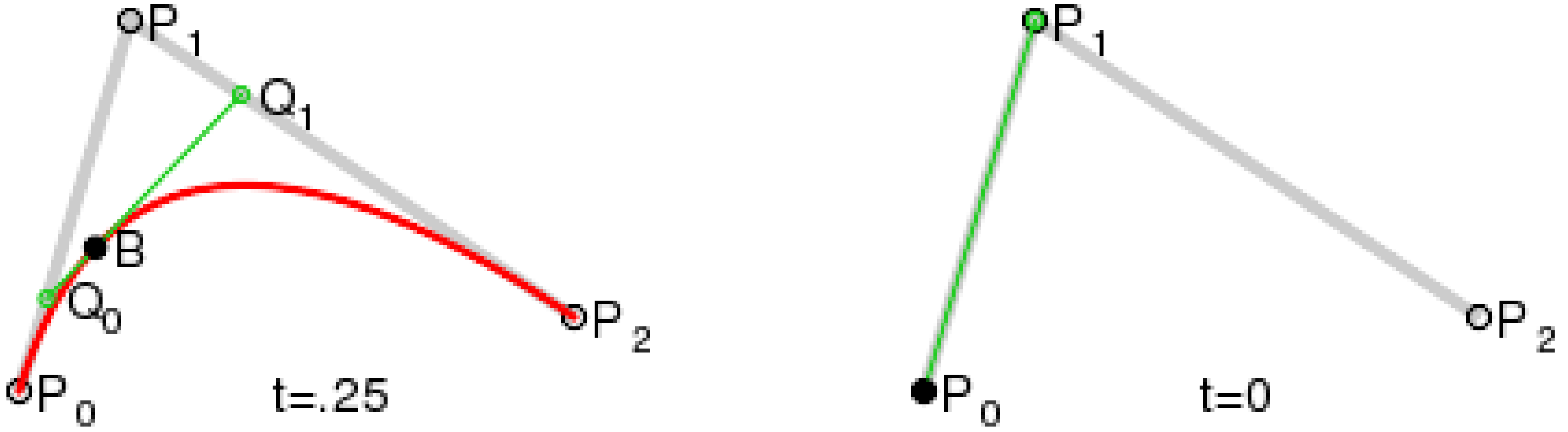
- Композиция нескольких линейных кривых:

$$Q_0 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$

$$Q_1 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$

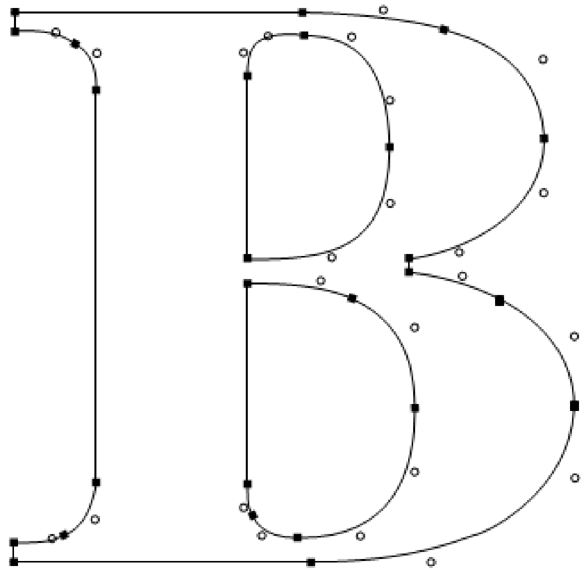
$$B = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t = P_0 \cdot (1-t)^2 + 2 \cdot P_1 \cdot (1-t) \cdot t + P_2 \cdot t^2$$

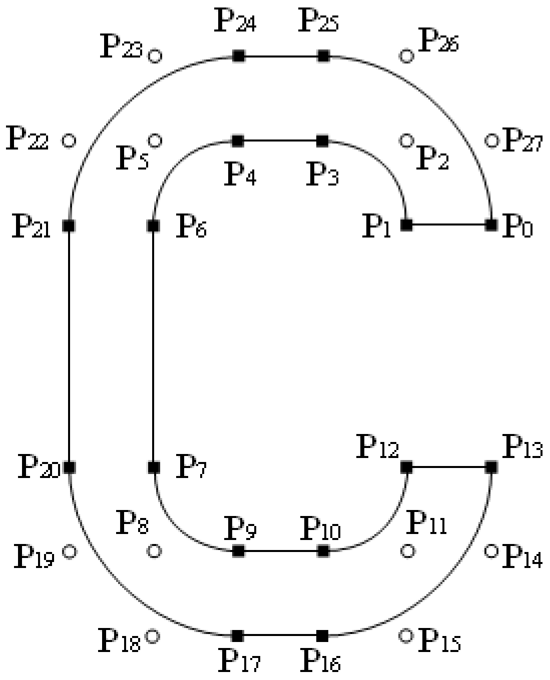
$$t \in [0,1]$$



Применение квадратичных кривых Безье

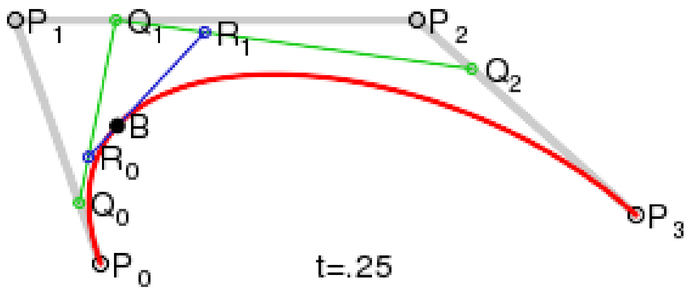
- в шрифтах TrueType
- в SWF файлах



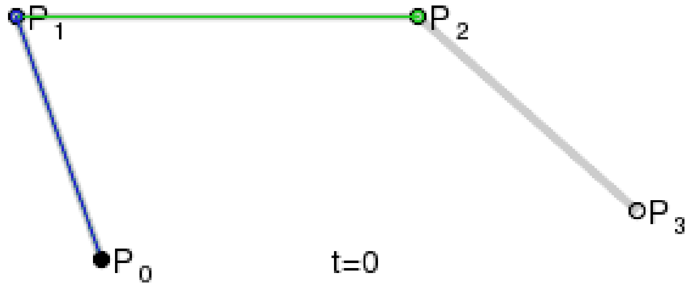


Кривые Безье: кубические

- Кубические кривые Безье

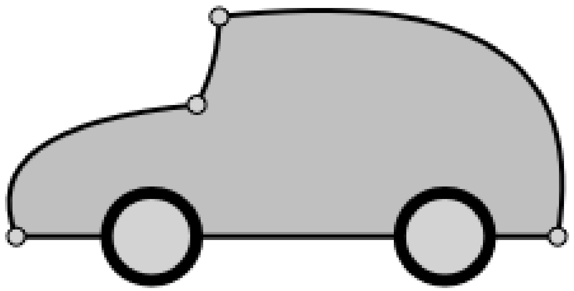
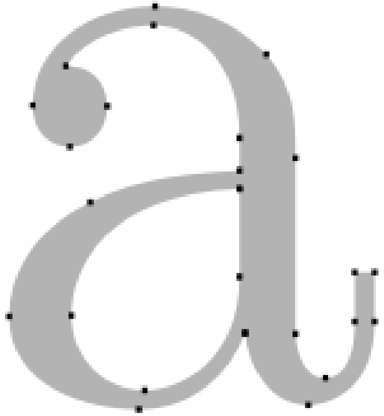
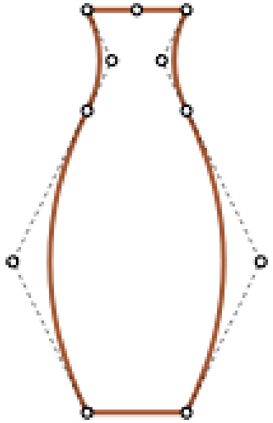
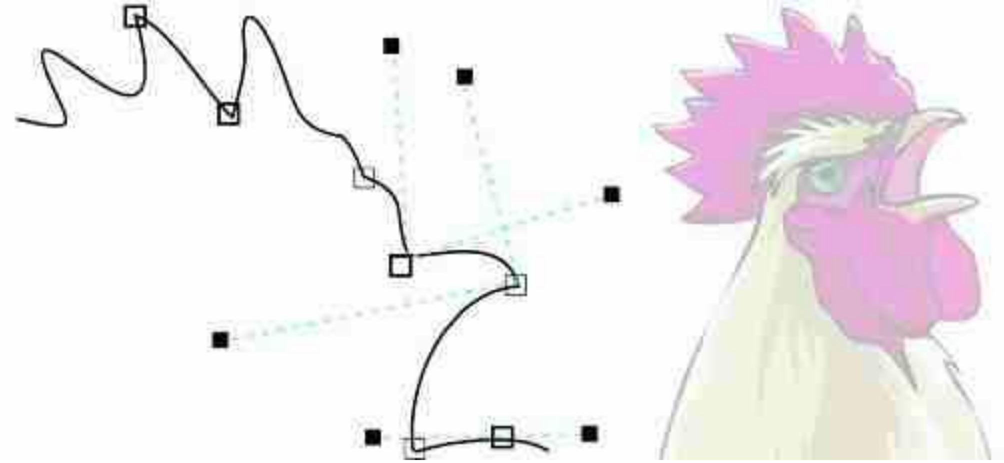


$$Q_0 = P_0 \cdot (1-t) + P_1 \cdot t$$
$$Q_1 = P_1 \cdot (1-t) + P_2 \cdot t$$
$$Q_2 = P_2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t$$
$$R_0 = Q_0 \cdot (1-t) + Q_1 \cdot t$$
$$R_1 = Q_1 \cdot (1-t) + Q_2 \cdot t$$
$$B = R_0 \cdot (1-t) + R_1 \cdot t =$$
$$= P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3$$

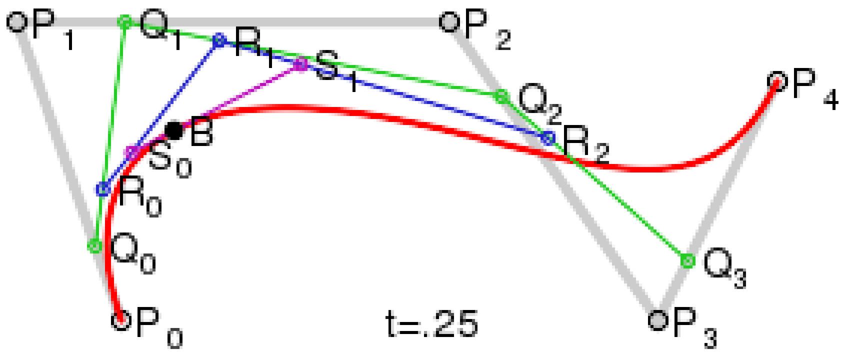


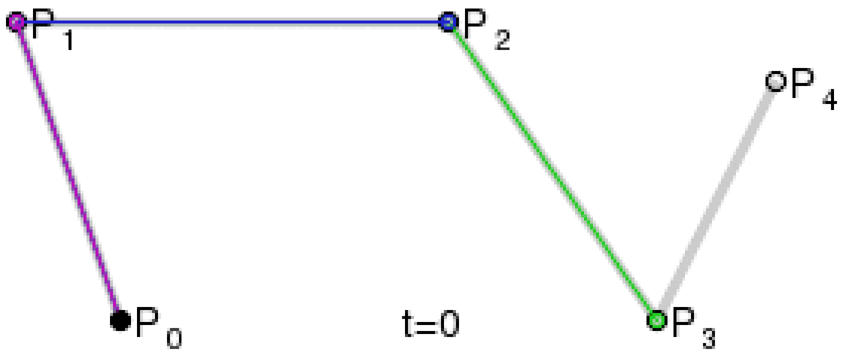
$$t \in [0, 1]$$

Применение кривых Безье

Кривые Безье: старшие степени





$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)$$

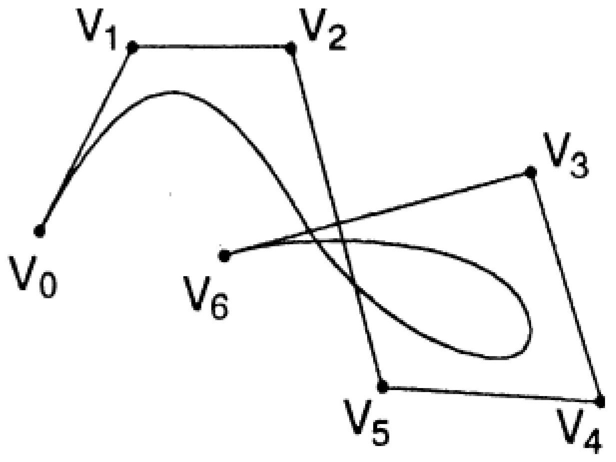
$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = C_n^i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

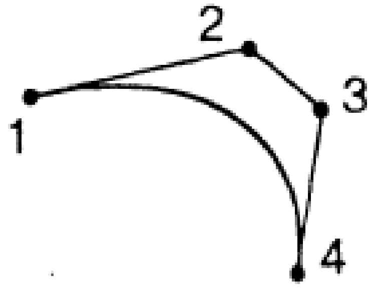
полином Бернштейна

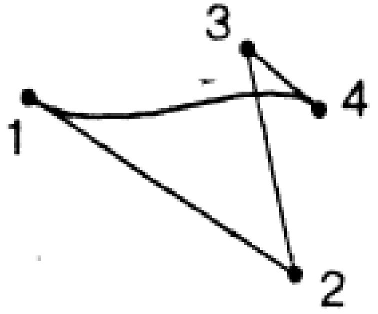
$$C_n^i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

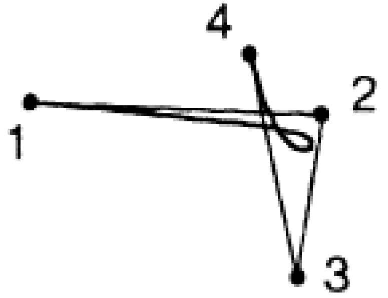
число сочетаний

Свойства кривых Безье







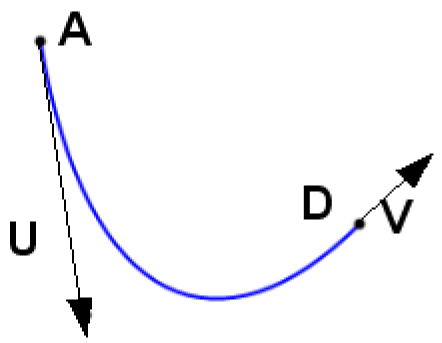


Кубические кривые Безье: матричная запись

$$B(t) = P_0 \cdot (1-t)^3 + 3 \cdot P_1 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 3 \cdot P_2 \cdot (1-t) \cdot t^2 + P_3 \cdot t^3 =$$
$$= t^3 \cdot (-P_0 + 3 \cdot P_1 - 3 \cdot P_2 + P_3) + t^2 \cdot (3 \cdot P_0 - 6 \cdot P_1 + 3 \cdot P_2) +$$
$$t \cdot (-3 \cdot P_0 + 3 \cdot P_1) + P_0 =$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = VMT = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

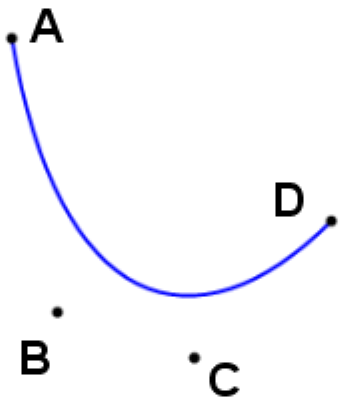
Кубические сплайны Эрмита



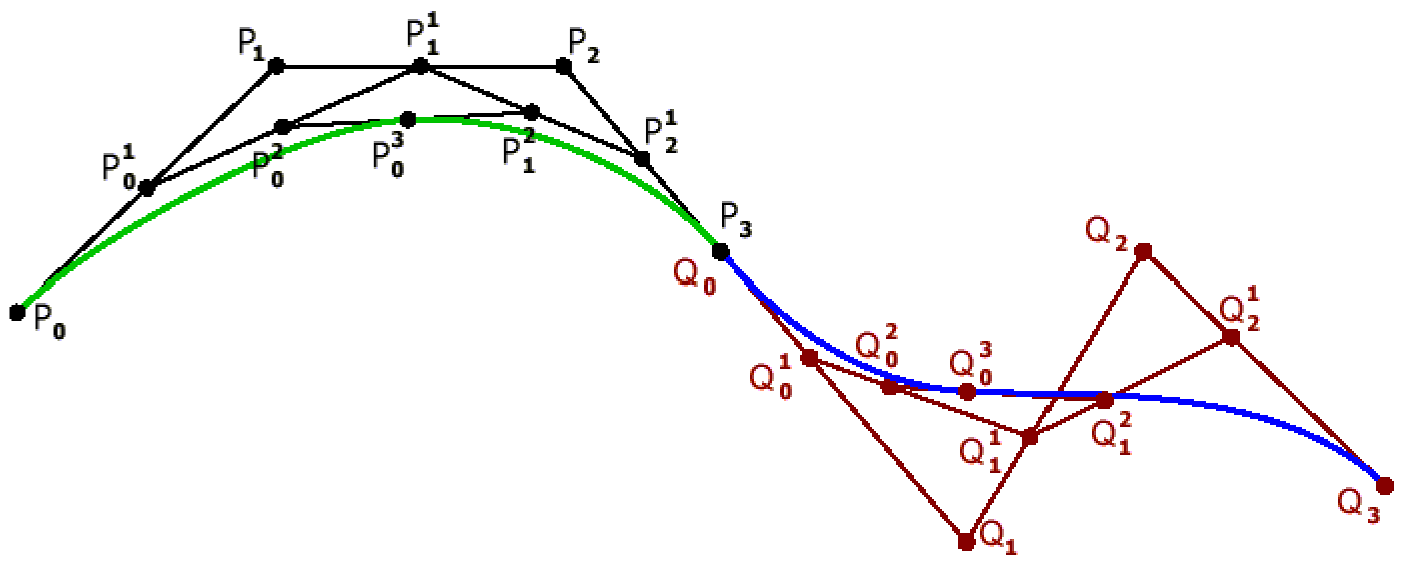
$$B = A + (U/3)$$
$$C = D - (V/3)$$

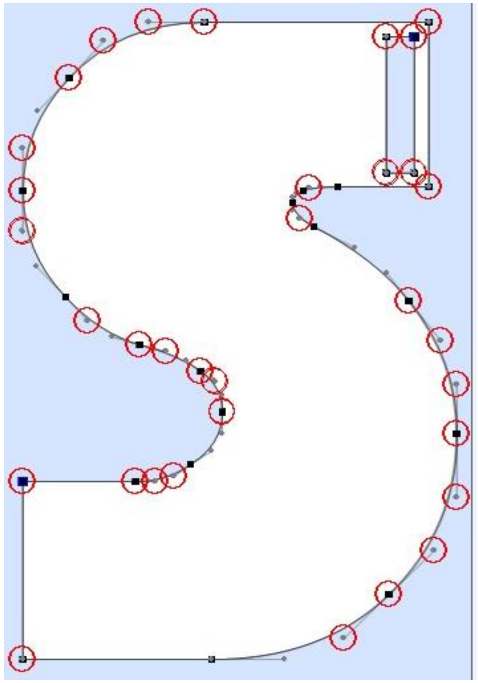
Обратное преобразование:

$$U = 3(B - A)$$
$$V = 3(D - C)$$



Составная кубическая кривая Безье



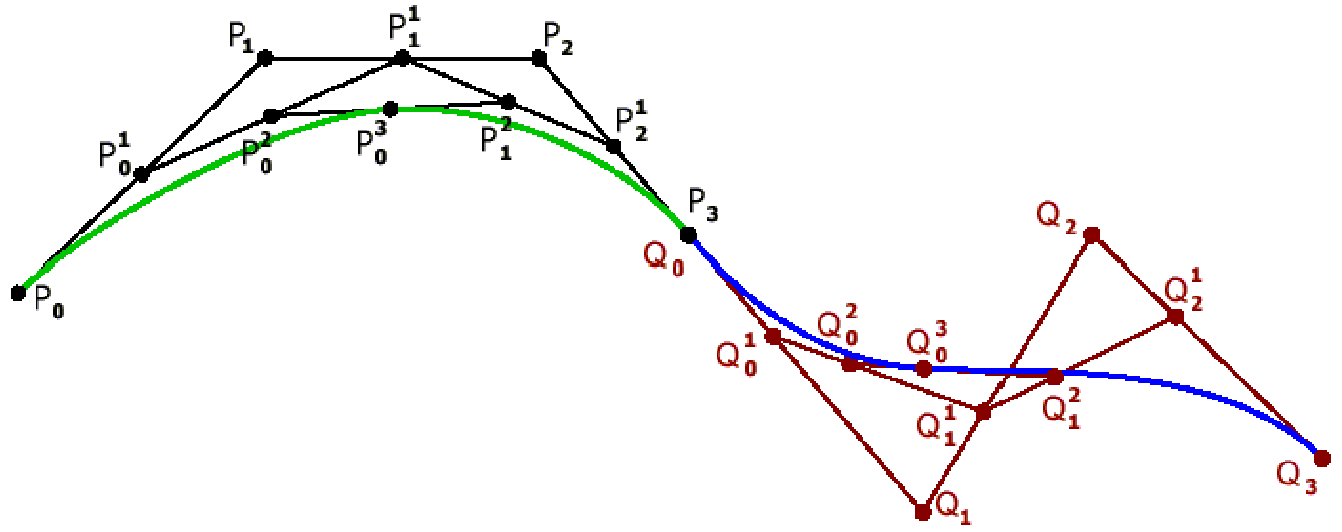


Составная кубическая кривая Безье

$V_0, V_1, \ldots, V_{m-1}, V_m$ Точки составной кривой Безье

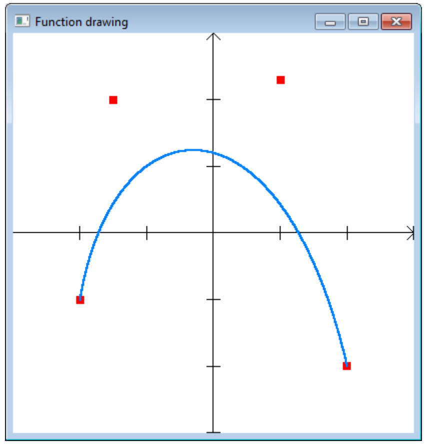
$V_{3i-1}, V_{3i}, V_{3i+1}$ Каждые 3 точки лежат на одной прямой

$V_2^{i-1}, V_3^{i-1} = V_0^i, V_1^i$

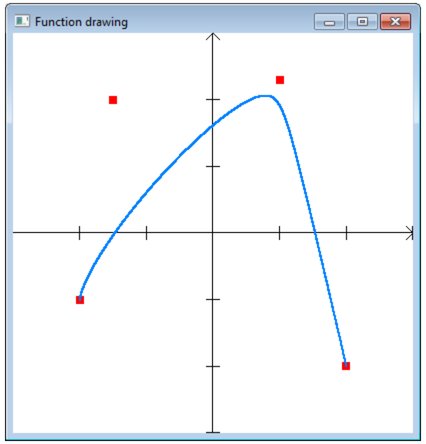


Рациональные кривые Безье

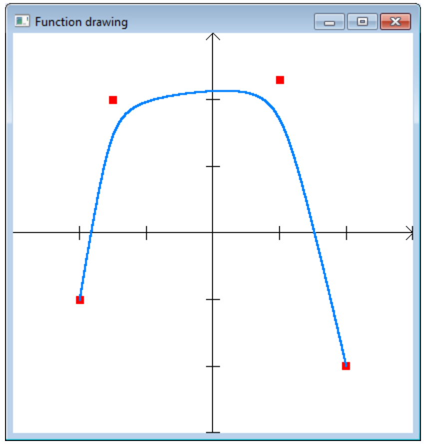
$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot \mathbf{b}_{i,n}(t)}, \quad 0 \le t \le 1$$



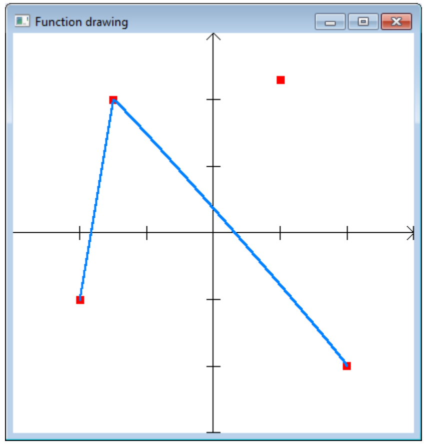
w=(1, 1, 1, 1)



w=(1, 1, 10, 1)



w=(1, 30, 30, 1)



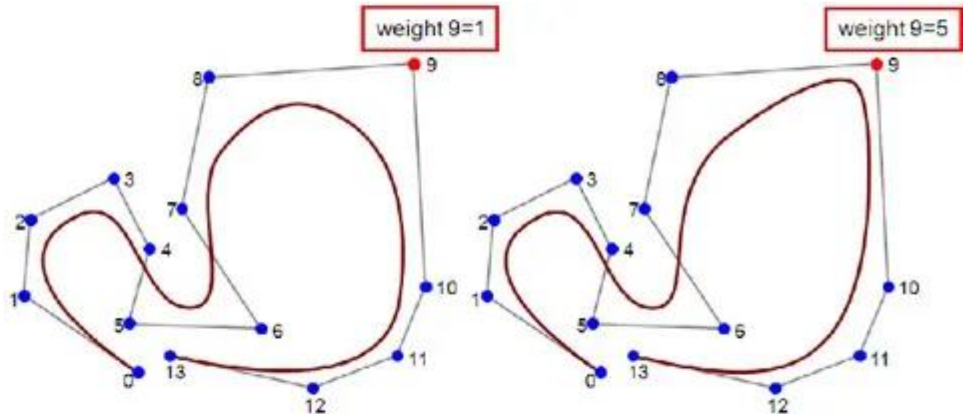
w=(1, 1000, 1, 1)

B-сплайны

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = VMT = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

- B-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье:
  - во-первых, степень полинома B-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями);
  - во-вторых, B-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой.
- Платой за это является бОльшая сложность B-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

Неоднородный рациональный B-сплайн, NURBS

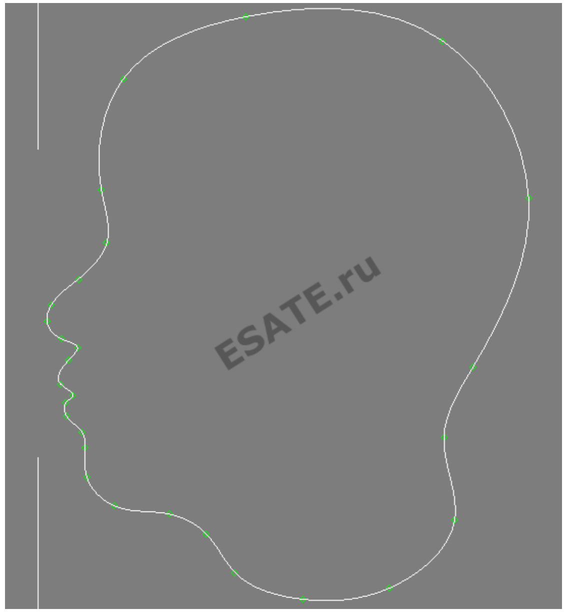


- В 1960-х было установлено, что неравномерные рациональные B-сплайны являются обобщением сплайнов Безье, которые могут быть определены как равномерные рациональные B-сплайны.

- Первой работой с упоминанием NURBS стала диссертация Кена Версприла (Ken Versprille), аспиранта Сиракузского университета в Нью-Йорке [Versprille 1975].

- Интерактивная отрисовка кривых и поверхностей NURBS в реальном времени стала впервые доступна на рабочих станциях Silicon Graphics в 1989 году

Maya, 3ds Max, Blender



Представление поверхностей

$$z = f(x, y)$$

- явный способ (explicit curves)

$$f(x, y, z) = 0$$

- неявный способ (implicit)

$$\vec{P} = \vec{F}(u, v)$$

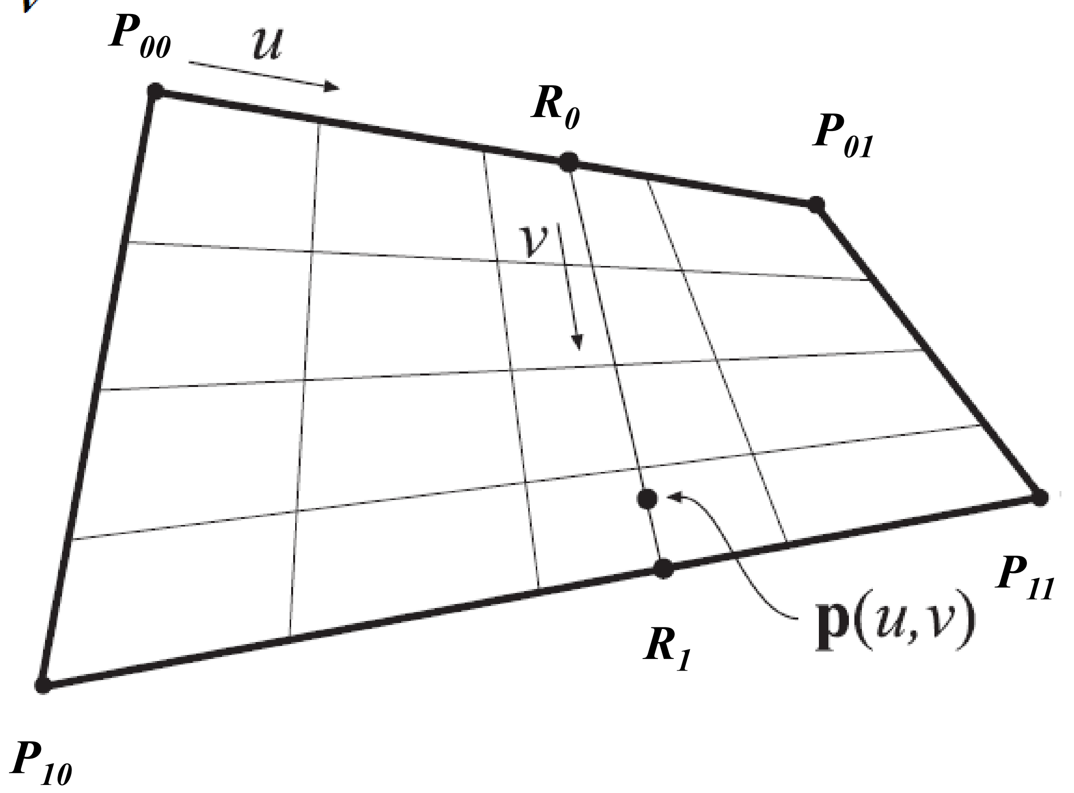
- параметрический способ (parametric curves)

Поверхности Безье: билинейные

$$R_0 = P_{00} \cdot (1-u) + P_{01} \cdot u$$

$$R_1 = P_{10} \cdot (1-u) + P_{11} \cdot u$$

$$P(u,v) = R_0 \cdot (1-v) + R_1 \cdot v$$

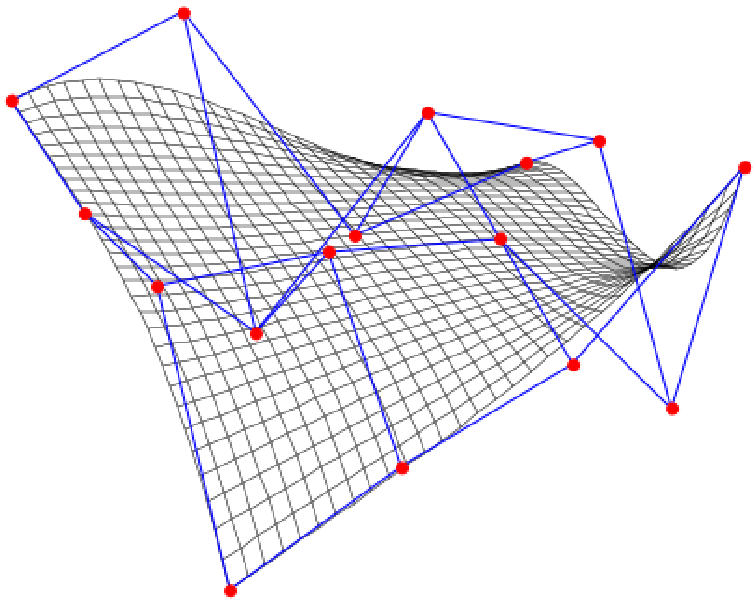


Поверхности Безье (общий случай)

$$B(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{ij}\cdot\mathbf{b}_{j,m}(u)\cdot\mathbf{b}_{i,n}(v),\ \ u,v\in[0,1]$$

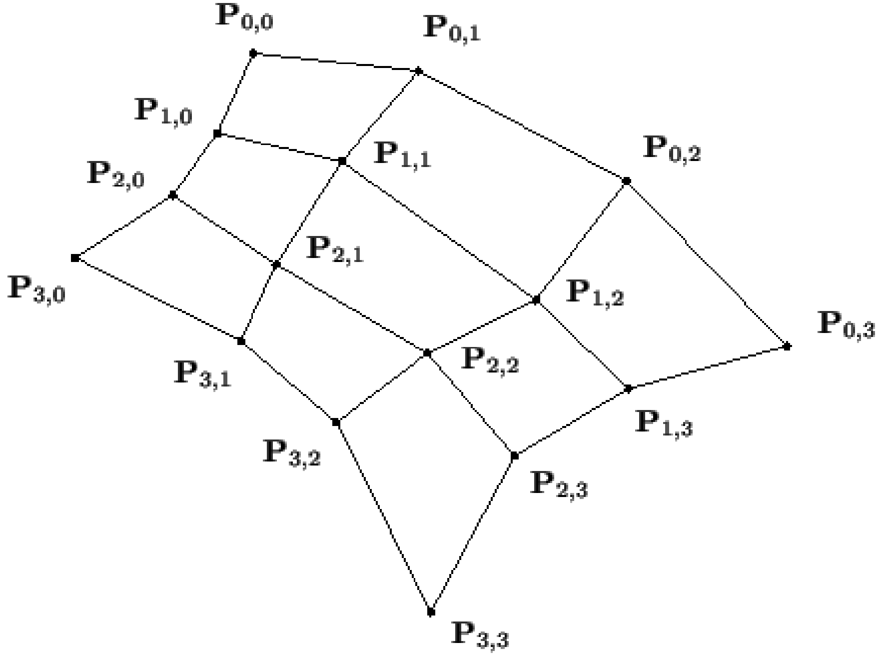
$$\mathbf{b}_{i,n}(t)=C_n^i\cdot t^i\cdot(1-t)^{n-i}$$

$$C_n^i=\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$



Бикубическая поверхность Безье

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = UM^T PMV = \begin{pmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} M^T \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бикубическая поверхность Безье: сопряжение

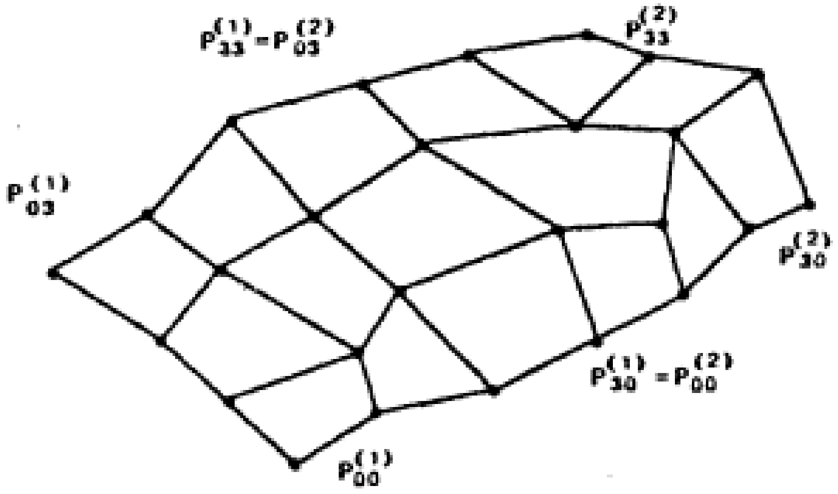
$$P_{ij}^{1}, i = 0,1,2,3;\ j = 0,1,2,3$$

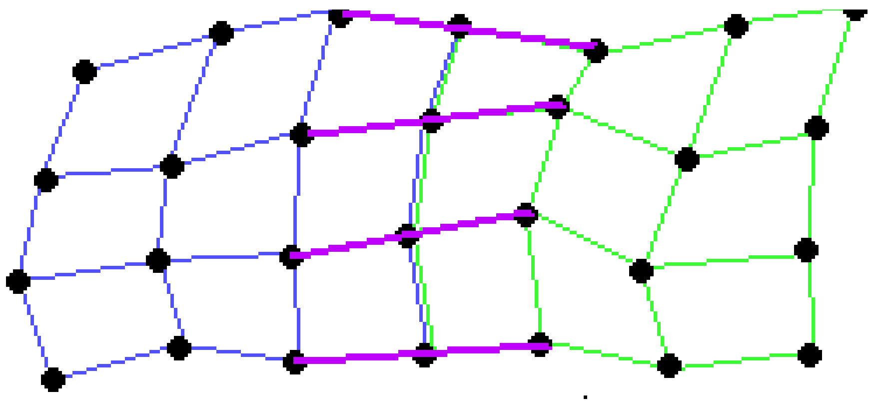
$$P_{ij}^{2}, i = 0,1,2,3;\ j = 0,1,2,3$$

$$P_{3j}^{1} = P_{0j}^{2}, j = 0,1,2,3$$

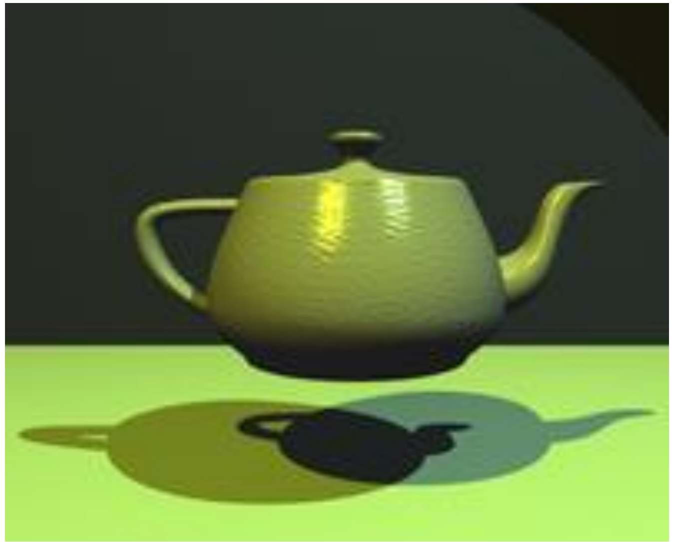
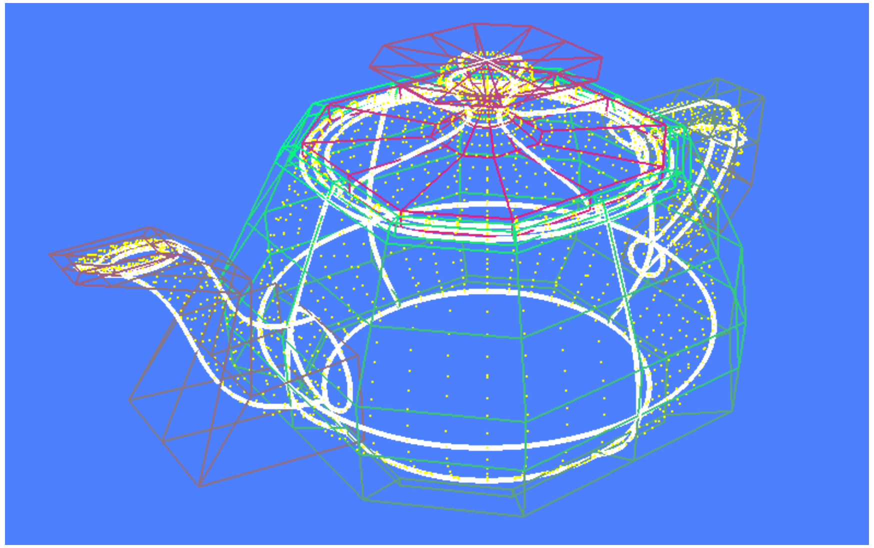
$$P_{2j}^{1}, P_{3j}^{1} = P_{0j}^{2}, P_{1j}^{2}, j = 0,1,2,3$$

$$\frac{\left|P_{2j}^{1}P_{3j}^{1}\right|}{\left|P_{0j}^{2}P_{1j}^{2}\right|}, j = 0,1,2,3$$

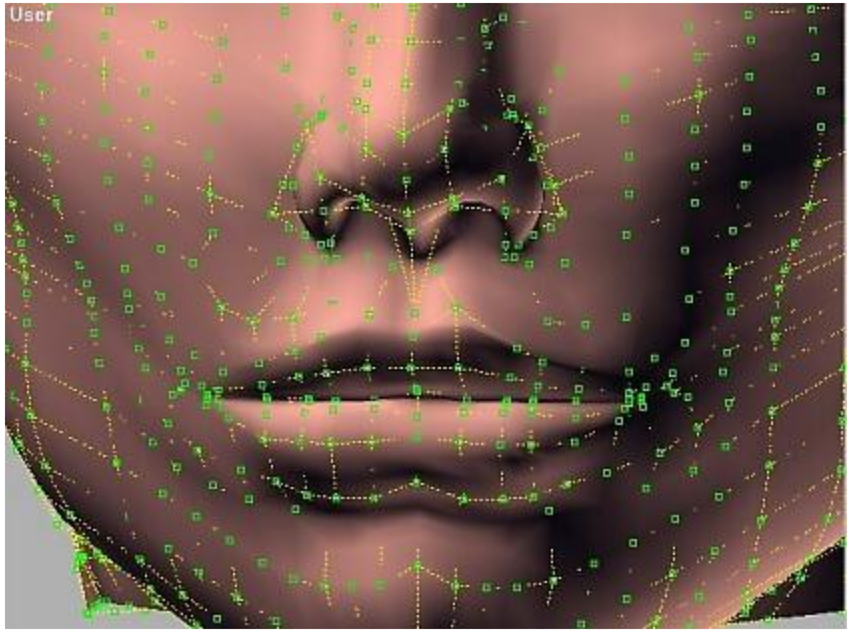


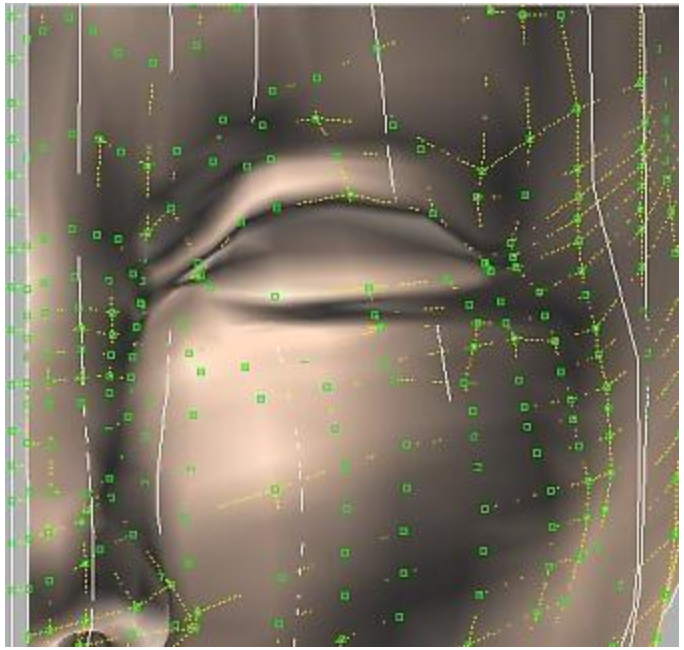


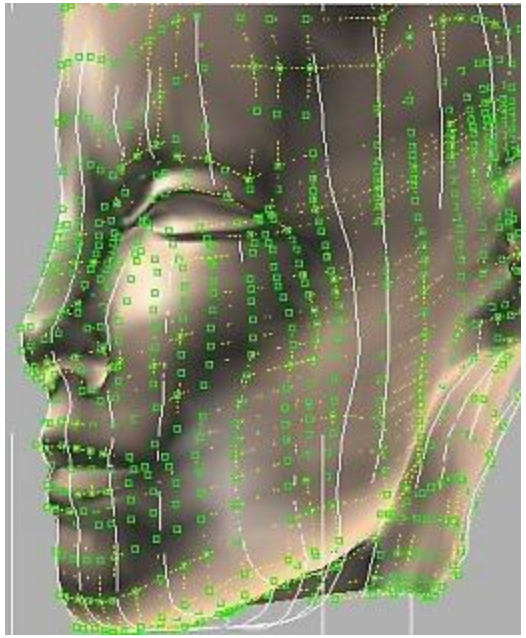
Бикубическая поверхность Безье: примеры

NURBS – поверхности







3D NURBS модели