Общая программа курса «Математический анализ» (2017/2018 уч. г., 1 семестр, группы 1–3, 7)

Составитель: М. Э. Абрамян

Часть 1. Введение в анализ

Отображение, область определения, область действия, множество значений: определения. Равенство отображений, классификация отображений. Обратное отображение: определение. Суперпозиция отображений: определение, теорема об ассоциативности суперпозиции, некоммутативность суперпозиции (пример).

Функции: определение, операции над функциями. Монотонные функции: определение, теорема об обратимости строго монотонной функции. Основные элементарные функции и их графики.

Аксиомы вещественных чисел. Абсолютная величина вещественного числа и ее свойства (без доказательств).

Границы и точные границы числовых множеств: определение, теорема о существовании верхней (нижней) точной границы у непустого ограниченного сверху (снизу) множества. Максимальные и минимальные элементы множества: определение. Сумма множеств и произведение множества на число: определение, теоремы о точных границах суммы множеств и произведения множества на число.

Принцип математической индукции, пример его применения.

Часть 2. Предел числовой последовательности

Окрестность и симметричная окрестность точки на числовой прямой: определения и свойства. Окрестность бесконечно удаленной точки: определение и свойства. Последовательность: определение и примеры. Определение предела последовательности на языке окрестностей, определение предела последовательности на языке симметричных окрестностей (на языке ε–N). Примеры нахождения пределов последовательностей.

Теорема о единственности предела последовательности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Пример последовательности, не имеющей предела.

Бесконечно малая последовательность: определение и арифметические свойства. Признак сходимости в терминах бесконечно малой последовательности. Арифметические теоремы о пределах последовательностей. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах для последовательностей. Бесконечно большая последовательность: определение, теорема о единственности предела бесконечно большой последовательности, арифметические теоремы о пределах бесконечно больших последовательностей (одна с доказательством).

Монотонные последовательности: определения. Теорема о существовании предела для монотонных ограниченных последовательностей, примеры применения теоремы: нахождение пределов последовательностей n/q^n ($q > 1$), $n^{1/n}$, $a^{1/n}$ ($a > 0$). Предел последовательности $(1 + 1/n)^n$ (без доказательства сходимости).

Последовательность вложенных и последовательность стягивающихся сегментов: определения. Теорема о вложенных сегментах. Предельная точка множества: два определения, доказательство их равносильности. Теорема Больцано-Коши о предельной точке.

Подпоследовательность: определение и примеры. Теорема о сходимости подпоследовательностей сходящейся последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности, следствие.

Фундаментальная последовательность: определение. Критерий Коши сходимости последовательности.

Часть 3. Предел функции

Определение предела функции на языке окрестностей, определение предела функции на языке симметричных окрестностей (на языке ε–δ). Теорема о единственности предела функции. Критерий существования предела функции в терминах пределов последовательностей. Примеры функций, имеющих и не имеющих предел: $x \sin(1/x)$ в точке 0, $\operatorname{sign} x$ в точке 0, $|\operatorname{sign} x|$ в точке 0, $\sin(1/x)$ в точке 0.

Пределы функции в бесконечно удаленных точках и бесконечные пределы: определения. Предел функции и арифметические операции. Теорема о переходе к пределу в неравенствах для функций.

Теорема о пределе суперпозиции функций, примеры (в том числе пример, показывающий, что если третье условие теоремы нарушается, то предел суперпозиции может не существовать).

Односторонние пределы: определение. Критерий существования предела функции в терминах односторонних пределов (без доказательства).

Первый замечательный предел (без доказательства). Второй замечательный предел (без доказательства) и вытекающие из него эквивалентности для $\ln(1 + x)$, $e^x - 1$ и $(1 + x)^\alpha$ при $x \to 0$.

Ограниченные функции: определение. Теоремы о существовании пределов у монотонных ограниченных функций.

Критерий Коши существования предела функции.

Часть 4. Непрерывные функции

Определение непрерывной функции в точке, примеры непрерывных функций. Свойства непрерывных функций: отличие от нуля и сохранение знака в окрестности точки, в которой непрерывная функция отлична от нуля, арифметические свойства непрерывных функций, следствия (непрерывность полиномов и дробно-рациональных функций).

Теорема о пределе суперпозиции в случае, когда внешняя функция непрерывна (без доказательства), следствие о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

Функция, непрерывная на множестве X: определение. Теорема о промежуточном значении функции, непрерывной на сегменте, следствие. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции, непрерывной на сегменте). Вторая теорема Вейерштрасса (о существовании минимального и максимального значения функции, непрерывной на сегменте; без доказательства).

Функция, равномерно непрерывная на множестве X: определение, непрерывность равномерно непрерывной функции. Пример непрерывной функции, не являющейся равномерно непрерывной: $\sin(1/x)$ на $(0, 1]$. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на сегменте.

Точки разрыва функции, их классификация и примеры. Теорема о точках разрыва монотонной функции, следствие. Критерий непрерывности монотонной функции f, определенной на сегменте X, в терминах ее множества значений $f(X)$, следствие (теорема о непрерывности обратной функции). Использование теоремы о непрерывности обратной функции для обоснования непрерывности функций $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Функции, бесконечно малые по сравнению с другими функциями при $x \to a$ (o-символика). Бесконечно малые и бесконечно большие функции более высокого порядка, примеры. Функции, ограниченные по сравнению с другими функциями при $x \to a$ (O-символика). Функции, эквивалентные в точке: определение, свойства эквивалентных функций (рефлексивность, симметричность, транзитивность; без доказательства). Теорема о представлении эквивалентных функций с использованием o-символики. Теорема о замене эквивалентных функций при вычислении пределов, примеры.

Часть 5. Дифференцируемые функции

Дифференцируемость функции в точке и определение производной функции. Эквивалентность дифференцируемости в точке и существования в этой точке производной. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференциал: определение. Вычисление производных некоторых элементарных функций: постоянной функции, x, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$.

Арифметические теоремы о вычислении производных, следствия (о дифференцируемости линейной комбинации дифференцируемых функций, степенной функции x^n ($n \in \mathbf{N}$), полинома, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$; арифметические свойства дифференциалов).

Теорема о производной суперпозиции (без полного доказательства), следствия (производные функций x^α ($\alpha \in \mathbf{R}$), $u(x)^{v(x)}$). Теорема о производной обратной функции, следствия (производные функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$).

Гиперболические функции: определение и свойства. Обратные гиперболические функции. Производные гиперболических и обратных гиперболических функций.

Производные высших порядков: определение и примеры (производные высших порядков для функций $\sin x$, $\cos x$, x^α, a^x, $\ln x$). Число сочетаний: определение и свойства. Формула Лейбница дифференцирования произведения.

Часть 6. Основные теоремы дифференциального исчисления

Точки локального минимума, максимума, экстремума, точки внутреннего экстремума: определения. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа, следствия. Геометрическая интерпретация производной и теоремы Лагранжа. Теорема Коши о конечных приращениях.

Формула Тейлора для полиномов, доказательство с ее помощью формулы бинома Ньютона. Формула Тейлора для произвольной дифференцируемой функции. Теорема об остаточном члене в формуле Тейлора вида $f^{(n+1)}(\xi)\,(\varphi(x) - \varphi(x_0))\,(x - \xi)^n / (n!\,\varphi'(\xi))$, следствия (представление остаточного члена в форме Лагранжа и Коши). Теорема об остаточном члене в форме Пеано. Разложения по формуле Тейлора в окрестности нуля функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $(1 + x)^\alpha$, $\ln(1 + x)$, пример их применения для вычисления пределов.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞ (с доказательством варианта для правостороннего предела в случае неопределенности $0/0$), пример его использования для вычисления пределов.

Необходимое условие существования экстремума в точке x (в терминах первой производной в точке x); пример, показывающий, что это условие не является достаточным. Достаточное условие существования экстремума в точке x (в терминах первых производных в левой и правой окрестности точки x). Достаточное условие существования экстремума в точке x (в терминах старших производных в точке x).

Выпуклые функции на интервале: определение. Достаточное условие выпуклости функции на интервале (в терминах второй производной на этом интервале). Точка перегиба функции: определение. Необходимое условие существования точки перегиба (в терминах второй производной в этой точке); пример, показывающий, что это условие не является достаточным. Достаточное условие существования точки перегиба (в терминах вторых производных в левой и правой окрестности точки). Теорема о расположении графика выпуклой функции относительно касательной. Достаточное условие существования точки перегиба (в терминах второй и третьей производной в данной точке).

Литература

1. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1981.
3. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1983.
4. *Пилиди В. С.* Математический анализ. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 (любое издание).