Общая программа курса «Математический анализ» (2017/2018 уч. г., 2 семестр, группы 1–3, 7)

Составитель: М. Э. Абрамян

Часть 1. Неопределенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл. [1] Первообразная: определение. Теорема о связи различных первообразных одной функции. Неопределенный интеграл: определение. Таблица неопределенных интегралов. Свойства неопределенного интеграла (производная неопределенного интеграла и неопределенный интеграл от производной, линейность неопределенного интеграла). Замена переменных в неопределенном интеграле, примеры. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла, примеры.

Интегрирование рациональных функций. [2] Рациональная функция: определение, теорема о разложении рациональной функции (без доказательства), метод неопределенных коэффициентов для нахождения разложения. Теорема об интегрировании рациональных функций.

Интегрирование тригонометрических функций. Полиномы и рациональные функции двух переменных: определение. Универсальная тригонометрическая подстановка и особенности ее применения, вызванные сужением области определения (на примере интеграла от функции $\sin^2 x + \cos^2 x$). **[3]** Теорема о преобразовании рациональной функции $R(u, v)$ при выполнении одного из условий: $R(-u, v) = -R(u, v)$, $R(u, -v) = -R(u, v)$, $R(-u, -v) = R(u, v)$; представление функции $R(u, v)$ общего вида как суммы функций, удовлетворяющих указанным условиям. Следствие о тригонометрических подстановках для функции $R(\sin x, \cos x)$ в указанных частных случаях.

Интегрирование некоторых классов иррациональных функций. Интегралы от функции $R(x, ((ax+b)/(cx+d))^p)$ при $ad - bc \neq 0$, где R — рациональная функция двух переменных; обобщение на случай рациональной функции n переменных. Интегрирование биномиального дифференциала $x^m(a + bx^n)^p dx$; три случая сведения к рациональной функции. Три подстановки Эйлера для интегрирования выражений вида $R(x, (ax^2+bx+c)^{1/2})$; теорема о том, что эти выражения всегда можно свести к рациональной функции.

Часть 2. Определенный интеграл

Определение определенного интеграла. [4] Разбиение отрезка, мелкость разбиения, выборка, интегральная сумма для функции f при заданном разбиении и фиксированной выборке: определения. Определенный интеграл функции f на отрезке: определение. Ограниченность функции как необходимое условие ее интегрируемости.

Суммы Дарбу и критерий интегрируемости. Нижняя S^- и верхняя S^+ суммы Дарбу: определение и свойства (два свойства о связи сумм Дарбу с интегральными суммами, свойство о суммах Дарбу для продолжения разбиения, неравенство для нижней и верхней суммы Дарбу по произвольным разбиениям, существование $\sup S^-$ и $\inf S^+$ — нижнего и верхнего интегралов Дарбу). **[5]** Критерий интегрируемости функции в терминах сумм Дарбу. Пример ограниченной функции, не являющейся интегрируемой (функция Дирихле). Колебание функции на отрезке: определение, условие интегрируемости функции в терминах колебания функции.

Классы интегрируемых функций. Теорема об интегрируемости функции, непрерывной на отрезке. Теорема об интегрируемости функции, монотонной на отрезке.

Свойства определенного интеграла. Свойства, связанные с операциями над функциями: теоремы об интегрируемости линейной комбинации интегрируемых функций и **[6]** произведения интегрируемых функций (теорема об интегрируемости произведения без доказательства). Свойства, связанные с отрезками интегрирования: теорема об интегрируемости функции на меньшем отрезке; теорема о равенстве интеграла по отрезку $[a, b]$ сумме интегралов по отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$; расширение понятия интеграла на случай $a \geq b$ и обобщение предыдущей теоремы. Оценки интегралов: теорема о неотрицательности интеграла от неотрицательной функции, следствие о сравнении интегралов; теорема о положительности интеграла от неотрицательной функции, принимающей в некоторой точке положительное значение и непрерывной в этой точке (без доказательства); теорема об интегрируемости модуля функции (без доказательства) и оценка модуля интеграла через интеграл от модуля; пример, показывающий, что из интегрируемости модуля функции не следует интегрируемости самой функции. Интегральные теоремы о среднем: теорема об интеграле произведения fg, где f и g интегрируемы, а g не меняет знака; **[7]** следствие об интеграле произведения fg в случае, когда f непрерывна; частный случай $g = 1$ и его геометрическая интерпретация.

Интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов. Интеграл с переменным верхним пределом: определение. Теорема о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Теорема о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом в точке x_0 при условии непрерывности подынтегральной функции в этой точке. Теорема о существовании первообразной у непрерывной функции и выражение этой первообразной через интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница и ее доказательство для случая непрерывной на отрезке функции. Теорема о замене переменной в определенном интеграле, следствия (интеграл от нечетной/четной непрерывной функции на отрезке $[-a, a]$ и **[8]** интеграл от периодической непрерывной функции на отрезке $[a, a + T]$, где T — период функции). Теорема об интегрировании по частям для определенного интеграла.

Часть 3. Приложения определенного интеграла

Вычисление площади плоской фигуры. Плоская фигура, прямоугольник, клеточная фигура, площади прямоугольника и клеточной фигуры: определения. Квадрируемая фигура и ее площадь: определения. Существование и единственность площади для любой квадрируемой фигуры (без доказательства). Необходимое и достаточное условие квадрируемости плоской фигуры (без доказательства). Криволинейная трапеция: определение, теорема о площади криволинейной трапеции; следствие о площади фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций и отрезками вертикальных прямых. Площадь эллипса. **[9]** Теорема о площади криволинейного сектора.

Вычисление объема тела. Тело, параллелепипед, клеточное тело, объемы параллелепипеда и клеточного тела: определения. Кубируемое тело и его объем: определения. Существование и единственность объема для любого кубируемого тела (без доказательства). Цилиндрическое тело: определение, теорема об объеме цилиндрического тела (без доказательства). Теорема об объеме тела вращения. Теорема об объеме тела с заданными площадями поперечных сечений (без доказательства).

Вектор-функции и их свойства. Вектор-функция: определение. Предел вектор-функции: определение, **[10]** критерий существования предела вектор-функции в терминах существования предела ее координатных функций. Арифметические свойства пределов вектор-функций. Непрерывность вектор-функции, производная вектор-функции: определения. Правила дифференцирования вектор-функций (в частности, формула для производной скалярного произведения дифференцируемых вектор-функций). Теорема Лагранжа для вектор-функции и пример, показывающий, что формула Лагранжа в виде равенства для вектор-функций в общем случае неверна.

Вычисление длины кривой. Простая кривая, параметризуемая кривая, замкнутая кривая, простой контур: определения. Спрямляемая кривая и ее длина: определения. Непрерывно дифференцируемая кривая: определение, спрямляемость непрерывно дифференцируемой кривой и оценка для ее длины. Теорема о производной переменной длины дуги непрерывно дифференцируемой кривой и ее следствие — формулы длины кривой, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ **[11]** или $y = f(x)$. Формула длины кривой, заданной в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$.

Часть 4. Функции многих переменных

Метрическое пространство. Метрическое пространство: определение. Три примера метрики ρ на плоскости: евклидова, максимум модулей разностей координат, сумма модулей разностей координат; доказательство аксиом для последней метрики. Метрическое пространство $\mathbf{R}^n$: определение. Неравенство Коши для суммы вида $\Sigma\, a_i\, b_i$. Неравенство Минковского для выражения вида $(\Sigma(a_i + b_i)^2)^{1/2}$ и его использование для доказательства неравенства треугольника для евклидовой метрики в $\mathbf{R}^n$. Пример метрического пространства, отличного от $\mathbf{R}^n$ (пространство ограниченных функций на отрезке).

Последовательность точек в метрическом пространстве. Сходящаяся последовательность и ограниченная последовательность в метрическом пространстве: определения. Свойства сходящихся последовательностей в произвольном метрическом пространстве (ограниченность сходящейся последовательности и единственность предела сходящейся последовательности). Критерий сходимости последовательности в $\mathbf{R}^n$ в терминах сходимости последовательностей ее координат. Фундаментальная последовательность: определение. Фундаментальность сходящейся последовательности. **[12]** Полное метрическое пространство: определение. Полнота пространства $\mathbf{R}^n$.

Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Шар, внутренняя точка, открытое множество в метрическом пространстве, внутренность множества: определения. Доказательство того, что шар является открытым множеством. Свойства открытых множеств (3 свойства). Окрестность точки, предельная точка и изолированная точка множества: определения. Замкнутое множество в метрическом пространстве, замыкание множества: определения. Критерий замкнутости множества. Свойства замкнутых множеств (3 свойства). Компакт в метрическом пространстве: определение и свойства (замкнутость и ограниченность). **[13]** Теорема Больцано-Вейерштрасса для пространства $\mathbf{R}^n$, следствие (критерий для компактов в $\mathbf{R}^n$). Прямая, луч и отрезок в $\mathbf{R}^n$, выпуклое множество: определения. Кривая в $\mathbf{R}^n$, связное множество, область: определения.

Предел функции многих переменных. Функция многих переменных: определение. Предел функции многих переменных в точке: определение и критерий существования предела в терминах последовательностей (без доказательства). Лемма о существовании предела функции, равного нулю. Примеры нахождения предела функции: $(x^2 + y^2)^\alpha$ в нуле ($\alpha > 0$) — непосредственно по определению, $|x|^\alpha\, |y|^\beta / (x^2 + y^2)^\gamma$ в нуле ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta - 2\gamma > 0$) — с использованием леммы. Два примера функций, не имеющих предела в данной точке: $f_1(x, y) = 2xy / (x^2 + y^2)$ в нуле и $f_2(x, y) = 2x^2y / (x^4 + y^2)$ в нуле. Предел функции в точке по множеству и по направлению: определения, примеры нахождения предела функции по направлению, в том числе пример, показывающий, что из существования одинаковых пределов по всем направлениям в данной точке не следует существования предела в этой точке (функция $f_2(x, y)$ в нуле). **[14]** Повторные пределы функции двух переменных: определение. Примеры, показывающие, что из существования двойного предела не следует существования повторных пределов (функция $f_3(x, y) = x \sin(1/y)$, если $y \neq 0$; 0, если $y = 0$, в нуле), а из существования и равенства повторных пределов не следует существования двойного предела (функция $f_1(x, y)$ в нуле).

Непрерывность функции многих переменных. Непрерывность функции в точке и непрерывность функции в точке по множеству: определения. Пример функции, непрерывной в точке по любому лучу, но не являющейся непрерывной в этой точке (функция $f_2(x, y)$, доопределенная в нуле значением 0). Теорема о непрерывности суперпозиции непрерывных функций многих переменных (без доказательства). Непрерывность функции на множестве: определение, две теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на компакте метрического пространства (без доказательства). Равномерная непрерывность функции на множестве: определение. Теорема Кантора о равномерной непрерывности на компакте. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на связном множестве (без доказательства).

Часть 5. Дифференцируемые функции многих переменных

Дифференцируемость функции многих переменных. Частные производные первого порядка: определение. Дифференцируемость функции в точке: определение. Критерий дифференцируемости (в терминах представления функции в виде $f(x^0) + \Sigma\, f_i(x)\, (x_i - x_i^0)$, где f_i — непрерывные функции); следствие о непрерывности дифференцируемой функции. **[15]** Пример непрерывной функции, не являющейся дифференцируемой (функция $f_4(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$ в нуле). Необходимое условие дифференцируемости функции в точке (существование в этой точке частных производных); пример, показывающий, что данное условие не является достаточным (функция $f_1(x, y)$, доопределенная в нуле значением 0). Достаточное условие дифференцируемости функции в точке (существование в окрестности этой точки частных производных и их непрерывность в этой точке); **[16]** пример, показывающий, что данное условие не является необходимым (функция $(x^2 + y^2) \sin((x^2 + y^2)^{-1/2})$, доопределенная в нуле значением 0). Теорема о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых функций многих переменных и формула для вычисления ее частных производных. Формула конечных приращений Лагранжа для функции многих переменных. **[17]** Первый дифференциал функции: определение. Инвариантность первого дифференциала относительно замены переменных. Свойства дифференциала (3 свойства), доказательство одного из свойств двумя способами: непосредственно по определению и с использованием свойства инвариантности первого дифференциала. Вывод уравнения касательной прямой к гладкой кривой в данной точке. Вектор нормали к графику функции двух переменных в данной точке: определение, существование вектора нормали в случае дифференцируемой функции. Касательная плоскость к графику дифференцируемой функции, геометрический смысл дифференциала. Производная по направлению: определение **[18]** и теорема о ее вычислении для дифференцируемой функции. Градиент: определение, связь градиента и производной по направлению. Экстремальное свойство направления, задаваемого градиентом. Оператор Гамильтона ∇: определение и его использование для записи градиента и производной по направлению.

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные высших порядков, смешанные производные: определения. Пример функции двух переменных, имеющей различные смешанные производные второго порядка в точке (функция $xy(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$, доопределенная в нуле значением 0). Теорема об условии совпадения смешанных производных по одним и тем же переменным (без доказательства). Дифференциалы высших порядков: определение. Неинвариантность второго дифференциала относительно замены переменных общего вида; инвариантность второго дифференциала относительно линейной замены переменных; следствие для дифференциалов высших порядков. Представление дифференциалов высших порядков с использованием формального дифференциального оператора $(dx, \nabla) = \Sigma\, dx_i\, \partial/\partial x_i$. **[19]** Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции многих переменных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции многих переменных.

Неявные функции. Неявная функция, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ в прямоугольнике: определение и примеры. **[20]** Теорема о неявной функции, определяемой одним уравнением (достаточное условие существования и дифференцируемости неявной функции; без доказательства). Нахождение производных неявной функции с помощью формального дифференцирования исходного уравнения. Определитель Якоби (якобиан) системы функций: определение и свойство якобиана системы сложных функций. **[21]** Неявные функции, определяемые системой уравнений в клеточной окрестности точки: определение. Достаточное условие существования и дифференцируемости системы неявных функций, определяемых системой уравнений (без доказательства). Нахождение частных производных неявных функций с помощью формального дифференцирования исходной системы уравнений. Отображение в метрическом пространстве $\mathbf{R}^n$, непрерывно-дифференцируемое отображение и его якобиан, регулярное отображение: определения. Теорема о локальной регулярной обратимости регулярного отображения, следствие о связи якобианов взаимно обратных регулярных отображений (теорема и следствие без доказательства).

Экстремумы функций многих переменных. Точка локального экстремума (минимума, максимума) и строгого локального экстремума (минимума, максимума) функции многих переменных: определения. Необходимое условие экстремума (равенство нулю частных производных) **[22]** и следствие (равенство нулю дифференциала). Стационарная точка дифференцируемой функции: определение, пример стационарной точки, не являющейся точкой экстремума. Лемма о неотрицательности второй производной функции одной переменной в точке минимума. Необходимое условие минимума (неотрицательность второго дифференциала), следствие (необходимое условие максимума); пример, показывающий, что данное условие не является достаточным. Положительно определенная, отрицательно определенная и неопределенная (знакопеременная) квадратичная форма: определения. Лемма об оценке снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточное условие экстремума (в терминах положительной/отрицательной определенности второго дифференциала). Критерий Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы (без доказательства). Критерий Сильвестра положительности и отрицательности квадратичной формы (без доказательства). Достаточное условие экстремума функции двух переменных в терминах частных производных.

Литература

1. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1981.
3. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1983.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2 (любое издание).