

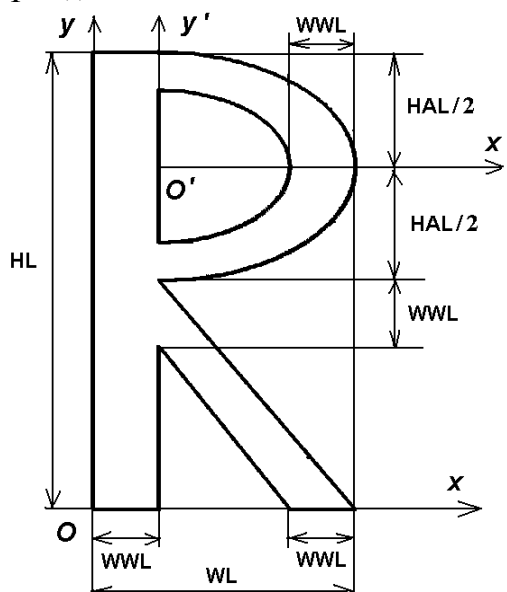
**Лабораторная работа №1**  
**РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ**  
**ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ**

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**

1. Задача теплопроводности (температурный анализ)
2. Статический температурный анализ
3. Плоская задача

**ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ**

В качестве примера рассмотрим стационарную задачу теплопроводности для двумерной области в виде латинской буквы «R». Геометрия области, отнесенной к декартовой системе координат  $Oxy$ , показана на рис. 1. Размеры буквы определяются следующими параметрами:  $HL=1.4$  м (высота);  $WL=0.8$  м (ширина);  $WWL=0.2$  (ширина стенок);  $HAL=0.7$  м (дополнительный размер по высоте). Материалом области является сталь с коэффициентом теплопроводности  $k=46.7$  (Вт/(м град)).



**Рисунок 1. Схема области**

В задаче требуется определить поле температур и вектор потока тепла в плоской области в форме буквы «R» при подаче на нижние грани заданных значений температуры и при задании на верхней грани условия конвективного теплообмена. Именно, предположим, что на левой нижней грани  $0 \leq x \leq WWL$ ,  $y=0$ , температура  $\theta_h$  равна  $90^\circ\text{C}$ ; а на правой нижней грани  $WL - WWL \leq x \leq WL$ ,

$y = 0$ , температура  $\theta_h$  равна  $180^\circ\text{C}$ . На верхней грани  $0 \leq x \leq WWL$ ,  $y = HL$ , имеем условие конвективного теплообмена со значениями коэффициента теплообмена  $60 \text{ м}^{-1}$  и температурой внешней среды  $0^\circ\text{C}$ . Все остальные границы считаются теплоизолированными.

### ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Заметим, что при задании входных параметров задачи нужно заботиться об их согласованности по системам единиц. Здесь выбрана система единиц – СИ, и, таким образом, геометрические размеры даются в метрах.

Для построения области в виде буквы «R», отметим, что ее правая верхняя часть ограничена кривыми линиями, которые можно задавать отрезками эллипсов. Центр эллипсов будет совпадать с центром декартовой системы координат  $O'x'y'$ , сдвинутой относительно исходной системы координат  $Oxy$  на  $WWL$  вправо по оси абсцисс, и на  $(HL-HAL/2)$  вверх по оси ординат. Для внешней криволинейной части отношение полуосей эллипса по осям  $y'$  и  $x'$  равно:  $=(HAL/2)/(WL-WWL)$ .

### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Стационарное уравнение теплопроводности для области  $\Omega$  относительно неизвестной функции температуры  $\theta = \theta(x, y, z)$  в декартовой системе координат  $Oxyz$  в отсутствие внешних источников тепла в тензорной форме имеет вид:

$$\nabla^T \cdot (-\underline{\underline{K}} \cdot \nabla \theta) = 0, \quad (1)$$

где  $\underline{\underline{K}}$  – симметричный тензор коэффициентов теплопроводности второго ранга,  $\nabla$  – векторный дифференциальный набла-оператор:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ & k_{yy} & k_{yz} \\ sym & & k_{zz} \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad \nabla^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Величина  $\underline{q} = -\underline{\underline{K}} \cdot \nabla \theta$  называется вектором потока тепла. В большинстве случаев тензор  $\underline{\underline{K}}$  является диагональным:  $k_{xy} = k_{yz} = k_{xz} = 0$ .

Тогда в координатной форме уравнение (1) можно записать в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0. \quad (2)$$

Для изотропного материала  $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k = const$ . В тензорной форме имеем:

$$\nabla \cdot (-k \nabla \theta) = 0. \quad (3)$$

В координатном форме уравнение (3) будет иметь вид:

$$-k \Delta \theta = 0, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Для уравнения теплопроводности обычно рассматриваются три основных типа граничных условий. Пусть граница  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  разбита на три части, где  $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$

Если на части границы  $\Gamma_\theta$  задана температура  $\theta_\Gamma = \theta_\Gamma(x, y, z)$ , то данное граничное условие называется главным граничным условием, граничным условием первого рода или условием Дирихле:

$$\theta|_{\Gamma_\theta} = \theta_\Gamma, \quad (5)$$

Если на части границы  $\Gamma_q$  задан тепловой поток  $q_\Gamma = q_\Gamma(x, y, z)$ , то данное граничное условие называется естественным граничным условием, граничным условием второго рода или условием Неймана:

$$\underline{n} \cdot \underline{q}|_{\Gamma_q} = -q_\Gamma, \quad (6)$$

где  $\underline{n}$  – вектор внешней единичной нормали к границе  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Для теплоизолированных границ нормальная компонента вектора потока тепла равна нулю:

$$\underline{n} \cdot \underline{q} = 0, \quad (7)$$

Если на части границы  $\Gamma_c$  задан конвективный теплообмен с коэффициентом  $h_f$  с окружающей средой температуры  $\theta_{ext}$   $q_\Gamma = q_\Gamma(x, y, z)$ , то данное граничное условие называется граничным условием третьего рода:

$$\underline{n} \cdot \underline{q} = -h_f (\theta_{ext} - \theta), \quad (8)$$

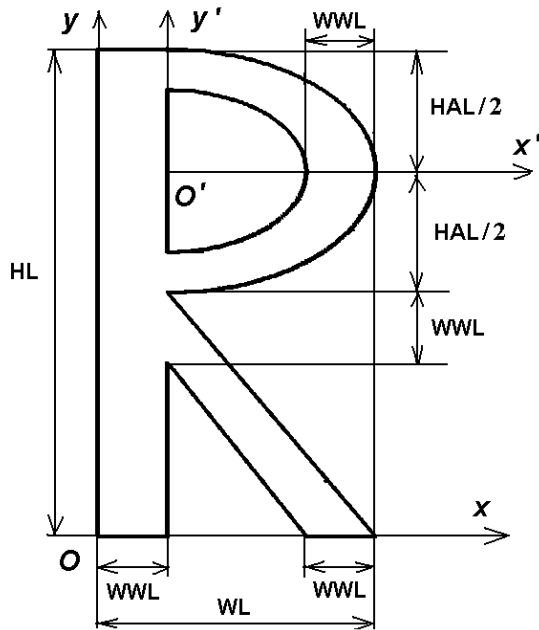


Рис. 1. Схема области

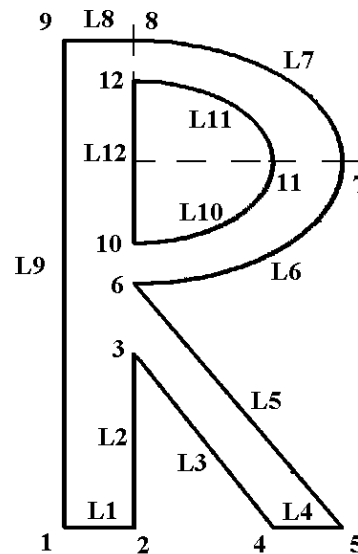


Рис. 2. Нумерация точек и линий

### Решение задачи с использованием ANSYS

Для решения плоской стационарной задачи теплопроводности выберем шестиузловой треугольный температурный конечный элемент PLANE35 пакета ANSYS.

Будем строить сначала твердотельную модель, а затем, из нее – конечно-элементную. Твердотельную модель получим методом построения геометрических объектов «снизу – вверх». Для этого сначала построим опорные точки, потом – линии, и, наконец, двумерные области.

Опишем решение задачи с помощью *командного режима* ANSYS APDL (Ansys Parametric Design Language).

Нам понадобится сначала построить две односвязные области: первую область, ограниченную внешними линиями буквы «R», и вторую область, ограниченную внутренними линиями. Затем, с использованием булевой операции вычитания геометрических областей (команда **ASBA**) можно будет получить итоговую область буквы «R» с отверстием.

В соответствие с этой идеологией сначала, введя заголовок **/TITLE** (не обязательная процедура) и перейдя в препроцессор **/PREP7**, зададим идентификаторы:

```
/TITLE, Heat Flow in 2D region (R)  
/PREP7
```

**! Все величины в системе Си**

**! Геометрические размеры тела в форме буквы "R"**

**HL=1.4 ! Высота**  
**WL=0.8 ! Ширина**  
**WWL=0.2 ! Ширина стенок буквы "R"**  
**HAL=0.7 ! Дополнительный размер по высоте**

**T\_INP1=90 ! Температура на левой части нижней границе**  
**T\_INP2=180 ! Температура на правой части нижней границе**  
**T\_EXT=0 ! Температура окружающей среды для конвективных условий**  
**T\_EXT=0**  
**H\_F=60 ! Коэффициент конвективного теплообмена**

Далее, определим материальные свойства. Для линейной стационарной задачи теплопроводности для изотропной однородной среды нужно только одно значение: коэффициент теплопроводности  $K=K_{xx}$ . Значение  $K_{xx}$  для стали поместим в набор материальных свойств под номером «1» по команде:

**MP,KXX,1,46.7 ! Коэффициент теплопроводности KXX=46.7 (Сталь)**

Зададим параметры триангуляции. Пусть есть один глобальный размер DMESH для конечных элементов, равный половине ширины стенок буквы (т.е.  $DMESH=WWL/2$ ), и более мелкий размер DMESH1, в четыре раза меньший. Для определения этих величин введем соответствующие параметры:

**! Параметры для триангуляции**  
**DMESH=WWL/2**  
**DMESH1=DMESH/4**

Определим тип конечного элемента. Мы хотим разбить нашу область на конечные элементы одного типа: треугольные квадратичные температурные конечные элементы с шестью узлами PLANE35. Для этого поместим в первый номер типов элементов элемент PLANE35 по команде:

**ET,1,PLANE35 ! Шестиузловой треугольный температурный КЭ PLANE35**

Анализируя вид буквы «R», замечаем, что ее правая верхняя часть ограничена кривыми линиями, которые можно задавать отрезками эллипсов. Центр эллипсов будет совпадать с центром декартовой системы координат  $O'x'y'$ , сдвинутой относительно исходной системы координат  $Oxy$  на  $WWL$  вправо по оси абсцисс, и на  $(HL-HAL/2)$  вверх по оси ординат. Для внешней криволинейной части отношение полуосей эллипса по осям  $y'$  и  $x'$  равно:  $=(HAL/2)/(WL-WWL)$ . Поэтому, для дальнейшего построения криволинейных линий удобно определить новую эллиптическую систему координат под номером 11, введя команды:

$PEL=(HAL/2)/(WL-WWL)$  ! Параметр эллиптичности для криволинейной части фигуры  
LOCAL,11,1,WWL,HL-HAL/2,,,,,PEL ! Эллиптическая система координат 11  
CSYS,0 ! Переход в основную декартову систему координат

Теперь создаем область, ограниченную внешними линиями буквы «R». Сначала создаем девять опорных точек:

! Определение основных опорных точек для внешней границы

K,1,0,0

K,2,WWL,0

K,3,WWL,HL-HAL-WWL

K,4,WL-WWL,0

K,5,WL,0

K,6,WWL,HL-HAL

K,7,WL,HL-HAL/2

K,8,WWL,HL

K,9,0,HL

Затем определяем линии по точкам. При этом для создания эллиптической линии просто переходим в эллиптическую систему координат, и в ней проводим «прямую» линию, которая в результате оказывается эллиптической. Команда **AL** в итоге позволяет создать нужную нам первую область A1:

! создание линий по точкам

L,1,2 \$ L,2,3 \$ L,3,4 \$ L,4,5 \$ L,5,6

CSYS,11 ! Переход в систему координат с номером 11

L,6,7 \$ L,7,8

CSYS,0 ! Переход в основную декартову систему координат

L,8,9 \$ L,9,1

AL,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ! Определение площади 1 по линиям

*Замечание.* Область A1 можно было создать и по команде

A,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ! Определение площади 1 по опорным точкам

Действительно, эта команда создает площадь (поверхность) по опорным точкам с проведением прямых линий между точками. Однако если между точками уже определены линии, то команда **A** использует их, и в результате оказывается эквивалентной команде **AL**.

Создавая другие области, нужно иметь в виду, что команда **AL** в командном режиме строит область максимум по десяти линиям, а команда **A** – максимум по восемнадцати точкам (если не используется значение ALL для первого поля). В интерактивном графическом режиме таких ограничений нет. Но если есть желание работать только в командном режиме с использованием APDL, то можно разбить сложную область на более простые подчасти с числом точек или линий, удовлетворяющих ограничениям команд **A** или **AL**. Со-

здав эти подобласти, нужную сложную область можно получить объединением подобластей. Можно их и не объединять в одну область, но тогда нужно проследить, чтобы граничащие подобласти имели одни и те же опорные точки и линии на соседствующих границах.

Действуя аналогично, построим вторую область – пустотелую часть буквы «R»:

```
! Определение отверстия - площади 2
K,10,WWL,HL-HAL/2-(WL-2*WWL)*PEL
K,11,WL-WWL,HL-HAL/2
K,12,WWL,HL-HAL/2+(WL-2*WWL)*PEL
CSYS,11
L,10,11 $ L,11,12
CSYS,0
L,12,10
AL,10,11,12
```

Теперь булевская операция вычитание позволяет из первой области вырезать вторую, и в результате получить требуемую область с отверстием, причем эта область будет иметь номер 3:  
**ASBA,1,2 ! Вырезать из области 1 область 2**

В итоге создана твердотельная модель без граничных условий. Область под номером «3» соответствует планируемому виду буквы «R», и ей по умолчанию сопоставлены все атрибуты с номером «1», т.е. набор материальных свойств с номером «1», типы элементов с номером «1», и т.д. Команды **MP** и **ET**, введенные ранее, задали нужные нам значения для материальных свойств с номером «1» и типов элементов с номером «1».

Переход от твердотельной модели к конечно-элементной оказывается здесь совсем не сложным. Определив размеры конечных элементов вблизи опорных точек по командам **KESIZE**, получаем конечно-элементную модель из треугольных элементов **PLANE35** по команде **AMESH**:

```
! Установка размеров элементов вблизи опорных точек
KESIZE,ALL,DMESH
KESIZE,3,DMESH1 $ KESIZE,6,DMESH1
KESIZE,10,DMESH1 $ KESIZE,11,DMESH1 $ KESIZE,12,DMESH1
AMESH,ALL ! Триангулировать область (3)
FINISH
```

В конце приведенного выше фрагмента по команде **FINISH** была завершена работа постпроцессора.

Полученная конечно-элементная модель показана на рис. 3 (команда **EPLOT** при некоторых опциях графического вывода, приведенных далее в постпроцессоре). Для вывода конечно-элементной сетки в интерактивном режиме следует выполнить: Plot->Elements.

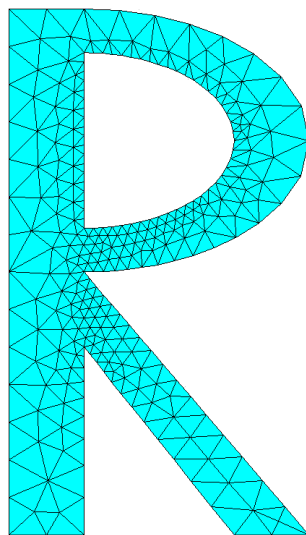


Рис. 3. Конечно-элементная модель

Следующим этапом является задание граничных условий и формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) МКЭ. Все эти действия выполним в решателе **/SOLU**.

Для задания граничных условий мы выделяет нужное множество узлов командами **NSEL**, а затем главные граничные условия для температуры задаем по команде **D**, а условия конвективного теплообмена – по команде **SF**. По окончании этих процедур нужно не забыть вернуться к выбору всех узлов модели по команде **NSEL,ALL**.

По одной команде **SOLVE** происходит формирование элементных матриц, формирование СЛАУ МКЭ и собственно решение СЛАУ.

Блок нужных команд решателя в итоге выглядит так:

```

/SOLU
ANTYPE,STAT      ! Решение стационарной задачи
NSEL,S,LOC,Y,0   ! Выбор всех узлов с координатой Y=0
NSEL,R,LOC,X,0,WWL
D,ALL,TEMP,T_INP1 ! Задать для всех выбранных узлов
TEMP=T_INP1
NSEL,S,LOC,Y,0   ! Выбор всех узлов с координатой Y=0
NSEL,R,LOC,X,WL,WL-WWL
D,ALL,TEMP,T_INP2 ! Задать для всех выбранных узлов
TEMP=T_INP2
NSEL,S,LOC,Y,HL ! Выбор всех узлов с координатой Y=HL
NSEL,R,LOC,X,0,WWL

```

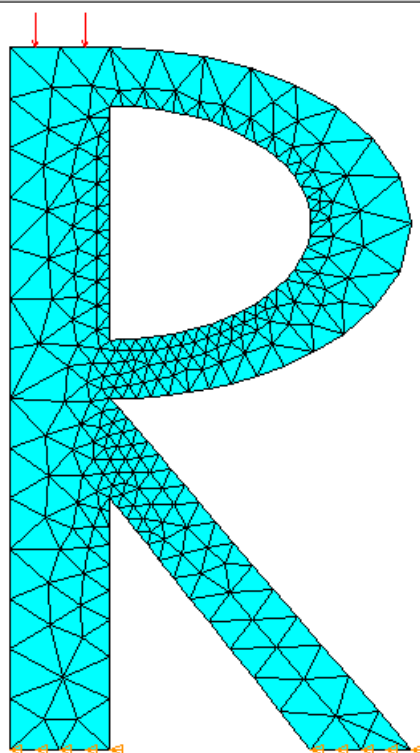


**SF,ALL,CONV,H\_F,T\_EXT ! Конвективный теплообмен в выбранных узлах**  
**NSEL,ALL ! Вернуться к выбору всех узлов модели**

**SOLVE ! Решить СЛАУ МКЭ**  
**SAVE,Heat\_Letter\_R,db ! Сохранить базу ANSYS задачи под именем**  
**Heat\_Letter\_R.db**  
**FINISH**

Отметим, что здесь по команде **SAVE,Heat\_Letter\_R,db** твердотельная и конечно-элементная модели задачи записываются в файл формата базы данных ANSYS \*.db, и этому файлу назначено имя Heat\_Letter\_R.db.

Выведем получающуюся конечно-элементную сетку с граничными условиями (рис. 4). Для этого в интерактивном режиме следует выполнить: Plot->Elements, PlotCtrls->Symbols->Отметить All Applied BCs, в пункте Surface Load Symbols для отображения условий конвективного теплообмена задать вывод Convection FilmCoef:



```
ELEMENTS  
PowerGraphics  
EFACET=1  
TEMP  
  
ZV =1  
DIST=.77  
XF =.4  
YF =.7  
Z-BUFFER  
CONV-HCOE  
60
```

Рис. 4. Конечно-элементная сетка с граничными условиями

Остается просмотреть результаты, что можно сделать в пост-процессоре POST1:

**/POST1**

**! Команды, управляющие форматом графического вывода**

**/SHOW,WIN32C**

Данная команда задает вид графического устройства (здесь contours WIN32) и позволяет изменить количество отображаемых цветов в цветовой шкале. По умолчанию используется x11. Интерактивный режим : PlotCtrls->Device Options.

Следующий блок команд задает опции графического вывода в окне

**/TRIAD,OFF ! Не показывать начала координат и осей**

**/PLOPTS,INFO,2 ! Использовать формат вывода Auto-legend для подписей**

**/PLOPTS,LEG2,OFF**

**/PLOPTS,LOGO,OFF ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде**

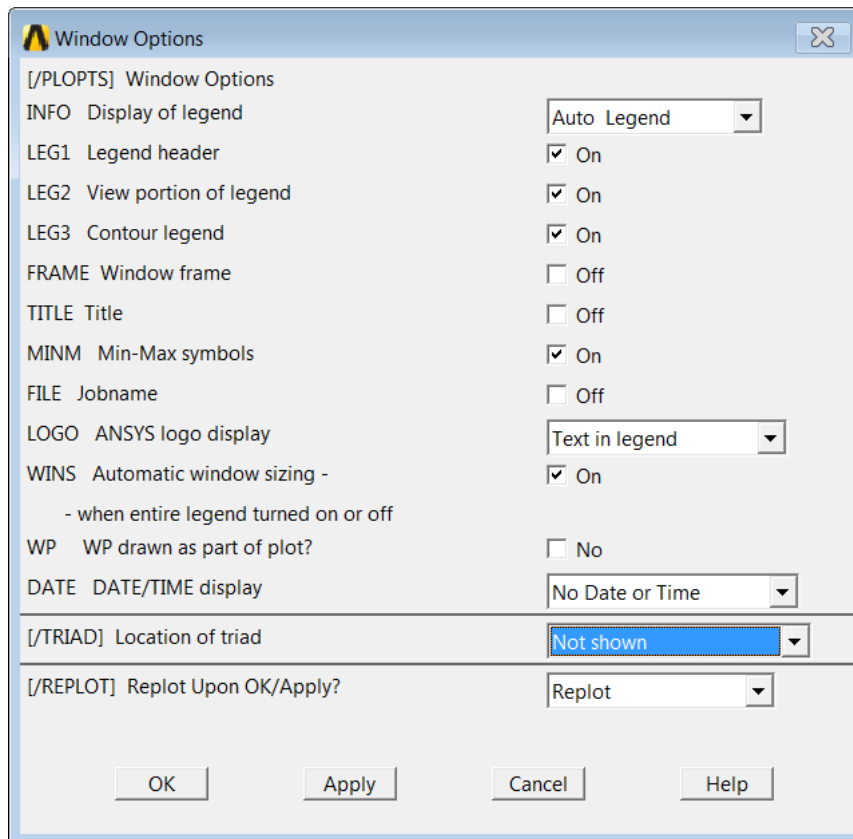
**/PLOPTS,FRAME,OFF ! Не показывать рамку**

**/PLOPTS,TITLE,OFF ! Не показывать заголовков**

**/PLOPTS,MINM,ON**

**/PLOPTS,DATE,OFF ! Не показывать дату**

В интерактивном режиме PlotCtrls->Window Ctrl->Window Options. Здесь можно указать зада the legend, Ansys logo, window frame, title , date and time, triad, etc.



Следующая команда позволяет задать количество цветов в цветовой шкале (Интерактивный режим: PlotCtrls->Style->Contours->Uniform contours->Number of contours)

**! Для показа распределений величин использовать 14 градаций уровней  
/CONT,,14**

Для конвертации черного и белого используются команды (в интерактивном режиме: PlotCtrls->Style->Colors->Reverse video)

**! Инвертирование фона с черного на белый  
/RGB,INDEX,100,100,100,0  
/RGB,INDEX,0,0,0,15**

Далее зададим команды для отображения граничных условий (в интерактивном режиме: PlotCtrls->Symbols->All applied BCs)

**/PBC,TEMP,,1 ! Отображать граничные условия для температуры  
/PSF,CONV,НСOEF,2 ! Отображать стрелками граничные условия с коэффициентом теплообмена**

Собственно вывод распределения поля температуры осуществляется по последней команде

**PLNSOL,TEMP ! Показать поле температуры**

Для вывода распределение температуры в интерактивном режиме ANSYS следует выполнить вход в General Postprocessor: General Postproc->Plot Results->Contour Plot->Nodal Solu->DOF Solution->Nodal Temperature.

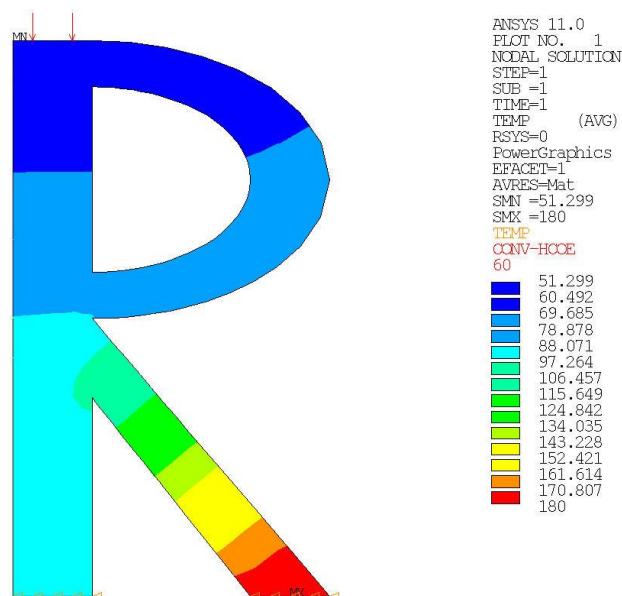


Рис. 5. Распределение температуры (с изображением граничных условий)

Из рис. 5 находим, что на верхней границе области с условием конвективного теплообмена получаются минимальные значения температуры  $\theta_h$ , приблизительно равные  $51^\circ\text{C}$ .

В постпроцессоре **/POST1** можно вывести и другие характеристики решения, например, модуль вектора потока тепла. Для этого можно воспользоваться командами:

**/PBC,TEMP,,0 ! Не показывать граничные условия для температуры**  
**/PSF,CONV,HCOEF,0 ! Не показывать граничные условия с коэффициентом теплообмена**

**PLNSOL,TF,SUM ! Показать модуль вектора теплового потока**

Или в интерактивном режиме: General Postproc->Plot Results->Contour Plot->Nodal Solu->Thermal flux->Thermal flux vector sum.

В результате получим картинку распределений значений модуля вектора потока тепла (рис. 6)

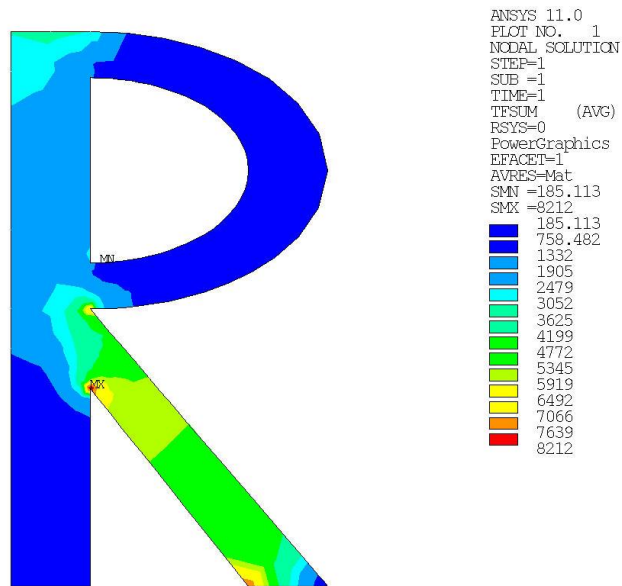


Рис. 6. Распределение модуля вектора потока тепла

Как видно из рис. 6, вектор потока тепла имеет экстремумы в угловых точках.

На рис. 7 показано распределение вектора потока тепла (General Postproc->Plot Results->Vector Plot->Predefined->Flux&gradient->Thermal flux TF).

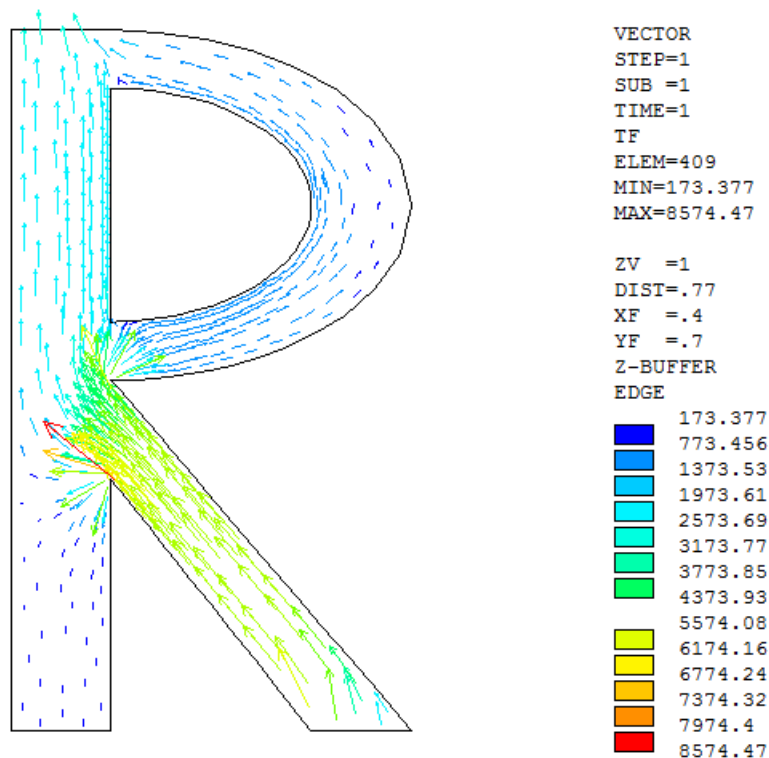


Рис. 7. Распределение вектора потока тепла

Суммарный командный файл на языке APDL ANSYS называется Th2LS\_1.inp

## **Решение задачи с использованием FlexPDE**

Входной файл для программы FlexPDE называется Th2LS\_1.pde. С помощью этого входного файла можно получить аналогичные результаты во FlexPDE: