

Лабораторная работа №3
РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ
с использованием конечно-элементного пакета ANSYS и программы FlexPDE

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

1. Теория упругости - структурный анализ
2. Плоская задача
3. Модальный анализ
4. Гармонический анализ

Часть 1. Пример расчета собственных колебаний составного упругого профиля.

Описание задачи

Пусть тонкая прямоугольная пластина имеет форму двутаврового профиля. Верхняя часть 1 выполнена из стального материала с модулем Юнга $E=2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²); коэффициентом Пуассона $\nu=0,29$ и плотностью $\rho=7.8 \cdot 10^3$ (кг/м³). Нижняя часть 2 выполнена из меди с модулем Юнга $E=1.2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²); коэффициентом Пуассона $\nu=0,33$ и плотностью $\rho=8.9 \cdot 10^3$ (кг/м³). Обе части имеют одинаковую форму в виде буквы «Т». Размеры букв (Рис. 1) следующие: $l=0.05$ (м); $b=0.16$ (м), $h=0.02$ (м). Нижняя грань профиля жестко закреплена. Требуется определить первые четыре собственных частоты профиля в условиях плоского напряженного состояния и вывести картины соответствующих форм колебаний.

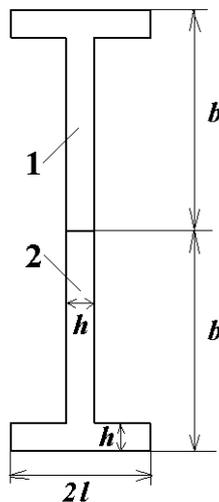


Рис. 1 Схема двутаврового профиля

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ (часть 1)

Пусть рассматриваемая пластина занимает объем Ω , тогда в предположении плоского напряженного состояния перемещения в плоскости xu характеризуются вектором перемещений $\underline{U}=\{U_x, U_y\}=\{U, V\}$, где $U=U(x, y)$, $V=V(x, y)$. Компоненты ε_{xx} , $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, ε_{yy} тензора деформаций $\underline{\varepsilon}$ связаны с компонентами вектора перемещений \underline{U} по формулам:

$$S_{xx} = \varepsilon_{xx} = \partial U / \partial x ; S_{yy} = \varepsilon_{yy} = \partial V / \partial y ; \quad (1)$$

$$S_{xy} = \varepsilon_{xy} = (\partial U / \partial y + \partial V / \partial x) / 2$$

Определяющие соотношения между механическими напряжениями и деформациями для упругой изотропной среды имеют вид

$$\begin{aligned} T_{xx} = \sigma_{xx} &= \lambda^* (S_{xx} + S_{yy}) + 2\mu S_{xx} \\ T_{yy} = \sigma_{yy} &= \lambda^* (S_{xx} + S_{yy}) + 2\mu S_{yy} \\ T_{xy} = \sigma_{xy} &= 2\mu S_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

где $\underline{\underline{\sigma}}$ - тензор напряжений, σ_{xx} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, σ_{yy} - компоненты тензора напряжений и

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (3)$$

$$\lambda' = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

В (4) λ' и μ являются константами Ламе, они могут быть выражены через другую пару констант: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν .

Уравнения равновесия для модального анализа имеют вид:

$$\partial T_{xx} / \partial x + \partial T_{xy} / \partial y + \lambda \rho u = 0 \quad (5)$$

$$\partial T_{xy} / \partial x + \partial T_{yy} / \partial y + \lambda \rho v = 0 \quad (6)$$

где ρ - плотность материала, λ - неизвестное собственное значение.

Подстановка (2) и (1) в (5), (6) дает эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно неизвестных перемещений U и V .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ANSYS (часть 1)

Для определения собственных частот двутаврового профиля предлагается программа St2LM_1.inp.

Во входном файле представлены команды **/OUTPUT**, осуществляющие вывод результатов в текстовый файл с именем Mod_ANS_1 rez. Данный файл создается в заданной рабочей папке Ansys. Команда ***VWRITE** записывает результаты в указанный файл, используя формат языка (см. соответствующие комментарии в файле St2LM_1.txt).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ FlexPDE (часть 1)

Для определения собственных частот и форм колебаний двутаврового профиля предлагается программа St2LM.pde.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, полученных в ANSYS (часть 1)

Конечно-элементная модель двутавра состоит из элементов PLANE2 - 6-узловых треугольных элементов для структурного анализа. В версиях Ansys 11 и

выше рекомендуется использовать новые элементы, например элемент PLANE82 с опцией треугольной формы:

**ET,1,PLANE82 ! finite element PLANE82: 2D 8-Node Structural Solid
mshape,1 ! triangular option for elements**

Элемент PLANE2 также может использоваться во всех версиях Ansys, хотя в версиях 11 и выше он не включен в библиотеку элементов.

Построенная конечно-элементная модель с граничными условиями для модального анализа показана на рис. 2. (Пункты меню Plot->Elements, для отображения граничных условий PltCtrls->Symbols->отметить All applied BC). Для отображения разных материалов цветом: PltCtrls->Symbols->отметить Material numbers в Elem/Attrib numbering. В разделе Numbering shown with выбрать colors only.

```
ELEMENTS  
MAT  NUM  
U
```

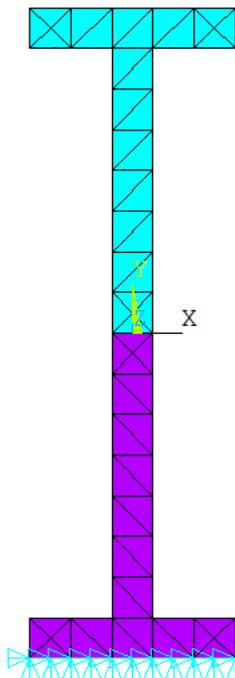


Рис. 2 Конечно-элементная модель с граничными условиями для модального анализа с показом материалов

В постпроцессоре (General PostProc->Results Summary) можно посмотреть значения первых четырех собственных частот:

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

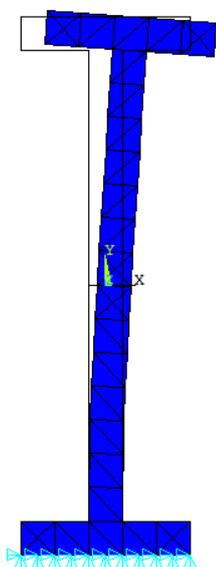
SET	TIME/FREQ	LOAD STEP	SUBSTEP	CUMULATIVE
1	98.218	1	1	1
2	735.42	1	2	2
3	1905.3	1	3	3
4	2619.5	1	4	4

В результате расчетов значения первых четырех собственных частот оказались равными: $f_1 = 98.2$ (Гц); $f_2 = 735.4$ (Гц); $f_3 = 1905.3$ (Гц); $f_4 = 2619.5$ (Гц).

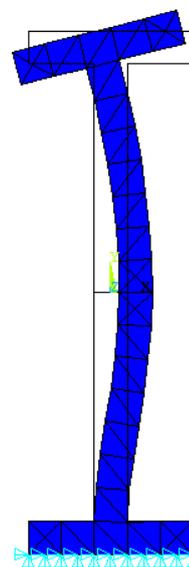
Далее приведем картины форм колебаний (mode shapes) на данных частотах (рис. 3). Для вывода каждой формы колебаний (деформированной формы) в пост-процессоре предварительно следует считать результаты для сета с соответствующей собственной частотой (General PostProc->Read Results->By Pick). Следует отметить, что формы колебаний, соответствующие собственным векторам перемещений, выводятся с точностью до знака.

Как видно из рис. 3, первые три формы колебаний являются колебаниями изгиба, тогда как колебания на четвертой собственной частоте есть колебания растяжения-сжатия.

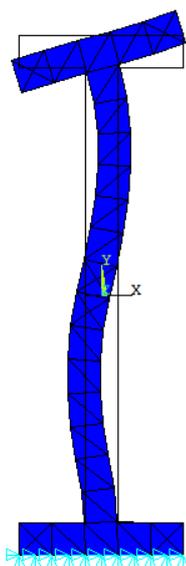
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =1
FREQ=98.2176
DMX =.209731
U



DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =2
FREQ=735.417
DMX =.199801
U



DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =3
FREQ=1905.32
DMX =.267177
U



DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =4
FREQ=2619.51
DMX =.190341
U

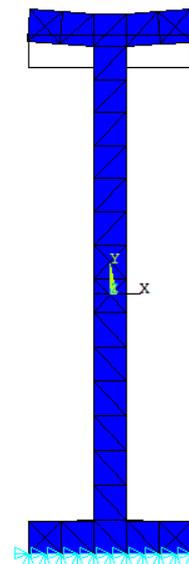


Рис. 3 Собственные формы колебаний (ANSYS)

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, полученных во FlexPDE (часть 1)

В результате расчетов по этой программе значения первых четырех собственных частот оказались равными: $f_1 = 98.17$ (Гц); $f_2 = 735$ (Гц); $f_3 = 1902.28$ (Гц); $f_4 = 26169.62$ (Гц).

В конце работы программы выводятся формы колебаний (mode shapes) на данных частотах (рис. 4). При сравнении результатов, полученных во FlexPDE, с результатами, полученными в ANSYS, можно заметить, что формы колебаний, соответствующие собственным векторам перемещений, выводятся с точностью до знака. Аналогично, первые три формы колебаний являются колебаниями изгиба, колебания на четвертой собственной частоте – колебания растяжения-сжатия.

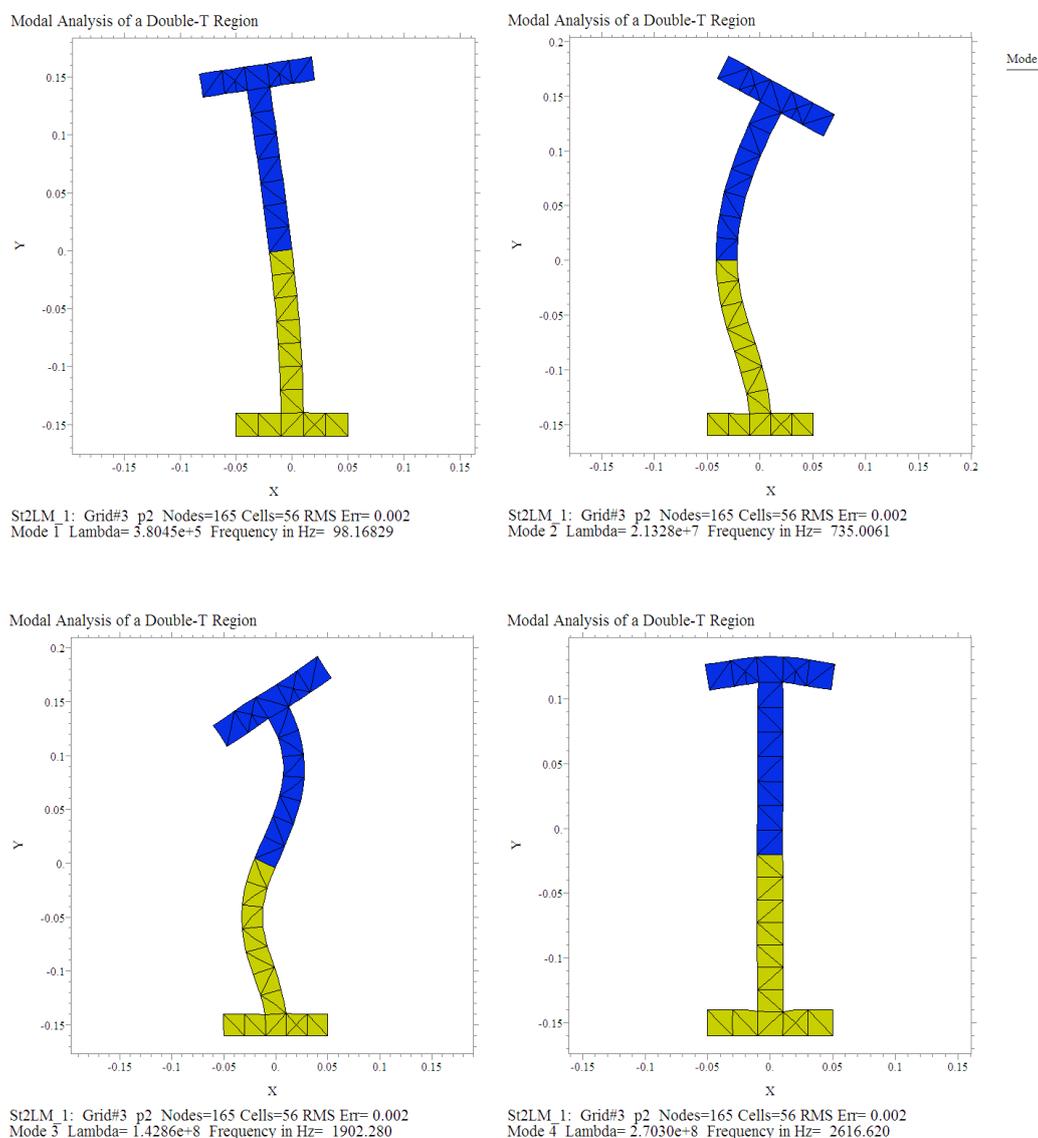


Рис. 4 Собственные формы колебаний (FlexPDE)

Часть 2. Пример расчет установившихся колебаний составного упругого профиля.

Описание задачи

Определив собственные частоты, можно провести расчеты установившихся колебаний в заданном диапазоне частот (гармонический анализ) и построить амплитудно-частотные характеристики. При этом желательно задать такие силовые факторы, которые могли бы возбуждать рассматриваемые моды колебаний.

Рассмотрим ту же тонкую прямоугольную пластину в форме двутаврового профиля, состоящую из двух материалов. Верхняя часть 1 выполнена из стального материала с модулем Юнга $E=2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²); коэффициентом Пуассона $\nu=0,29$ и плотностью $\rho=7,8 \cdot 10^3$ (кг/м³). Нижняя часть 2 выполнена из меди с модулем Юнга $E=1,2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²); коэффициентом Пуассона $\nu=0,33$ и плотностью $\rho=8,9 \cdot 10^3$ (кг/м³). Размеры букв: $l=0,05$ (м); $b=0,16$ (м), $h=0,02$ (м). Нижняя грань профиля жестко закреплена. В точках с координатами $(-l, b)$ и (l, b) заданы векторы сосредоточенной силы (рис. 5): $\underline{f}_1 = \{f_0, f_0\}$, $\underline{f}_2 = \{-f_0, -f_0\}$, где $f=1000$ Н. Векторы внешних воздействий изменяются по гармоническому закону $\underline{f} = f_0 e^{i\omega t}$, где $\omega = 2\pi f$.

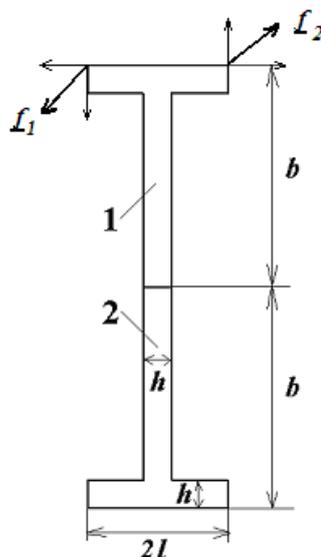


Рис. 5 Схема двутаврового профиля с приложенной нагрузкой

Гармонический анализ предназначен для решения уравнений движения в случае установившихся колебательных процессов (вынужденных колебаний). Для формулировки проблемы вынужденных колебаний используются комплексные обозначения. Вектор перемещений, векторы внешних воздействий, а также деформации и напряжения изменяются по гармоническому закону: $\underline{u} = u_0 e^{i\omega t}$, где $\omega = 2\pi f$.

Коэффициенты демпфирования (затухания) при расчете установившихся колебаний (гармонического анализа) рассчитываются на основе заданной добротности материала Q и частотного интервала (либо значений собственных частот на этом ча-

стотном интервале). Будем использовать следующие формулы для расчета коэффициентов демпфирования на интервале $[f_b, f_e]$:

$$\alpha = \frac{2\pi f_b f_e}{(f_b + f_e)Q}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi(f_b + f_e)Q}.$$

Требуется построить амплитудно-частотную характеристику двутавра, посмотреть формы колебаний на резонансных частотах и сравнить их с соответствующими собственными формами колебаний.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ANSYS (часть 2)

Для расчета установившихся колебаний в ANSYS требуется задать частотный диапазон для расчета и количество частот на интервале. Рассмотрим частотный диапазон от 50 до 900 Гц, включающий первые две собственные частоты, и зададим число рассчитываемых частот на интервале равным 250. Количество рассчитываемых на интервале значений можно увеличить для повышения точности расчетов (уменьшения шага по частоте).

Пример расчета установившихся колебаний для двутаврового профиля в окрестности первых двух частот в интервале от 50 до 900 Гц дается в файле S12LN_AFC_1.inp, использующего базу данных предыдущего расчета собственных частот.

Некоторые результаты выводятся в текстовый файл с именем Harm1 rez с помощью команды /OUTPUT. Данный файл создается в рабочей папке Ansys. Команда *VWRITE записывает данные в файл в формате Фортрана.

Во временном постпроцессоре /POST26 можно посмотреть изменение величин на временном или частотном (в данном случае) интервале. В файле S12LN_AFC_1.inp приводятся команды для построения графика изменения заданной величины в заданном узле в зависимости от частоты. Для графиков по умолчанию первая переменная – это TIME (время для нестационарных задач или частота для гармонического анализа). Эта переменная по умолчанию для оси абсцисс. Переменная для оси ординат выбирается из доступных результатов. Например, с помощью команды NSOL можно выбрать результаты в узлах, указав переменную (например, компоненту их или ux вектора перемещений) и конкретный узел. График амплитудно-частотной характеристики выводится с помощью команды /PLVAR.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ FlexPDE (часть 2)

Пример расчета установившихся колебаний для двутаврового профиля в окрестности первых двух частот дается в файле St2LN_AFC.pde. Во FlexPDE не задается частотный интервал, расчет проводится для заданной резонансной частоты. Таким образом, для каждого нового значения частоты требуется новый расчет. В качестве резонансной частоты можно задать соответствующее значение собственной частоты, полученной при модальном анализе.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, полученных в ANSYS (часть 2)

Построенная конечно-элементная модель с граничными условиями для гармонического анализа показана на рис. 6 (Интерактивный режим: Plot->Elements, для показа граничных условий: PltCtrls->Symbols-> All applied BCs).

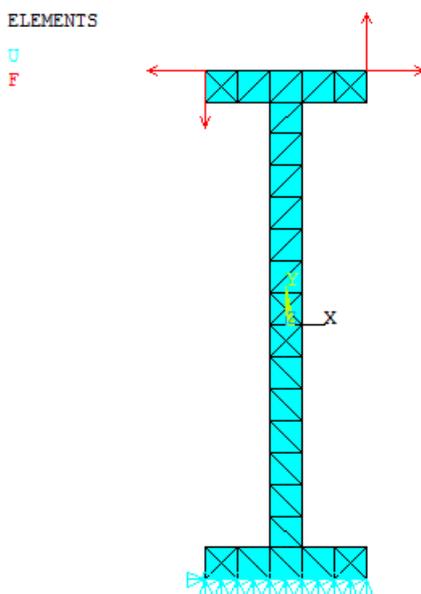


Рис. 6 Конечно-элементная модель с граничными условиями для гармонического анализа

Амплитудно-частотную характеристику можно построить в постпроцессоре /POST26. Рассмотрим верхний левый угол двутавра - узел с координатами $(-l, b)$. Выведем для этого узла график зависимости перемещения u_y от частоты (рис. 7), соответствующие команды см. во входном файле.

```
POST26
AMPLITUDE
UY
```

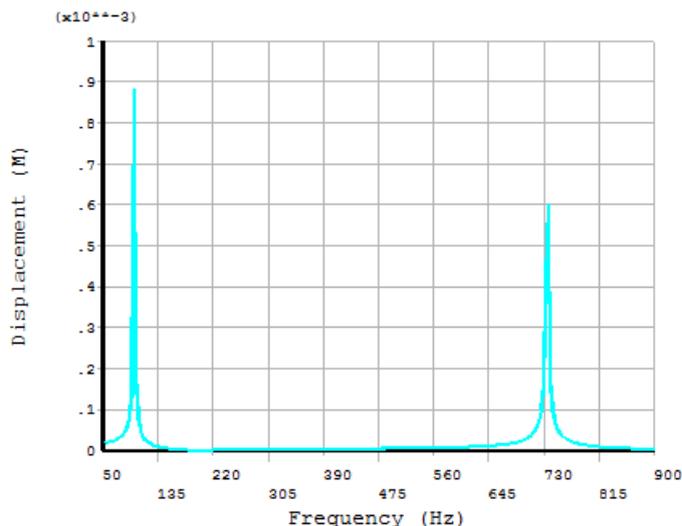


Рис. 7 Амплитудно-частотная характеристика двутаврового профиля

Точные значения резонансных частот можно определить, просмотрев файл, содержащий значения точек графика (TimeHist PostPro->Variable Viewer, выбрать переменную UY, кнопка List Data). Ниже приведен листинг части этого файла.

***** ANSYS POST26 VARIABLE LISTING *****

FREQ	20 UY	
	UY	
	AMPLITUDE	PHASE
53.400	0.192111E-04	-0.366623E-01
56.800	0.201293E-04	-0.415987E-01
60.200	0.212289E-04	-0.474073E-01
63.600	0.225622E-04	-0.543564E-01
67.000	0.242043E-04	-0.628316E-01
70.400	0.262671E-04	-0.734075E-01
73.800	0.289249E-04	-0.869796E-01
77.200	0.324650E-04	-0.105024
80.600	0.373967E-04	-0.130159
84.000	0.447163E-04	-0.167510
87.400	0.566731E-04	-0.228648
90.800	0.796403E-04	-0.346371
94.200	0.141561E-03	-0.664503
97.600	0.883173E-03	-4.48547
101.00	0.188938E-03	-178.962
104.40	0.816375E-04	-179.513
107.80	0.505037E-04	-179.673
111.20	0.356966E-04	-179.748
114.60	0.270504E-04	-179.791

FREQ	20 UY	
	AMPLITUDE	PHASE
699.40	0.256776E-04	-0.553062
702.80	0.281820E-04	-0.613947
706.20	0.312687E-04	-0.689105
709.60	0.351675E-04	-0.784179
713.00	0.402479E-04	-0.908233
716.40	0.471431E-04	-1.07681
719.80	0.570376E-04	-1.31898
723.20	0.724321E-04	-1.69614
726.60	0.996742E-04	-2.36424
730.00	0.160950E-03	-3.86911
733.40	0.423414E-03	-10.3615
736.80	0.602052E-03	-164.979
740.20	0.178516E-03	-175.532
743.60	0.103845E-03	-177.367
747.00	0.729001E-04	-178.126
750.40	0.559803E-04	-178.540
753.80	0.453134E-04	-178.801
757.20	0.379738E-04	-178.981
760.60	0.326147E-04	-179.111

Видно, что наибольшие значения амплитуды перемещения наблюдаются на резонансных частотах $f_{r1} = 97.6$ (Гц) и $f_{r2} = 736.8$ (Гц). Данные значения частот резонансов близки к значениям собственных частот $f_1 = 98.2$ (Гц) и $f_2 = 735.4$ (Гц).

В командном режиме определить точку и значение локального экстремума (в данном случае – максимума) можно с помощью команды **GET**:

```
! общий синтаксис
! ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ МАКСИМУМА
! *GET,PAR_NAME,VARI,VAR_NUM,EXTREM,TMAX
```

```
! ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ МАКСИМУМА
! *GET,PAR_NAME,VARI,VAR_NUM,EXTREM,VMAX
```

! VAR_NUM - НОМЕР ПЕРЕМЕННОЙ (по умолчанию переменная на оси абсцисс – номер 1)

!PAR_NAME - пользовательское имя параметра

! VARI, EXTREM, TMAX, VMAX – специальные зарезервированные имена для команды GETN

Например, после команд вывода графика

```
/POST26
/XRANG,FBEG,FEND
/AXLAB,X,Frequency (Hz)
/AXLAB,Y,Displacement (M)
NSOL,2,N_RES2,UY
PLVAR,2
```

Можно добавить:

```
*GET,FRES,VARI,2,EXTREM,TMAX ! Определение рез. частоты
```

```
*GET,DISP_MAX,VARI,2,EXTREM,VMAX ! Определение значения перемещения на резонансной частоте
```

Для двух предыдущих команд рекомендуется предварительно задать частотный интервал для поиска локального максимума:

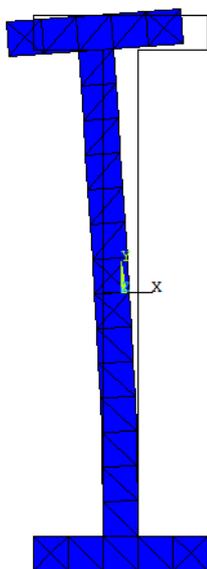
```
!Временной/частотный интервал
TIMERANGE,T_MIN,T_MAX
! T_MIN, T_MAX – концы интервала
```

Далее выведем картины деформированных форм колебаний на резонансных частотах. Для этого нужно предварительно считать результаты для сета с соответствующим значением частоты (General PostProc->Read Results->By Pick). Для каждого рассчитываемого значения частоты имеем два сета, соответствующие вещественной и мнимой части соответствующего вектора перемещений.

Нас рис. 8 представлены деформированные формы для вещественной и мнимой частей вектора перемещений на частоте $f_{r1} = 97.6$ (Гц). Видно, что эти деформированные формы совпадают между собой с точностью до знака. При этом деформированная форма для мнимой части вектора перемещений совпадает с формой колебаний, соответствующей первой собственной частоте $f_1 = 98.17$ (Гц).

На рис. 9 представлены деформированные формы для вещественной и мнимой частей вектора перемещений на частоте $f_{r2} = 736.8$ (Гц). Видно, что эти деформированные формы совпадают между собой, а также с точностью до знака совпадают с формой колебаний, соответствующей второй собственной частоте $f_2 = 735$ (Гц).

DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =14
FREQ=97.6
REAL ONLY
DMX =.00401



DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =14
FREQ=97.6
IMAGINARY
DMX =.316E-03

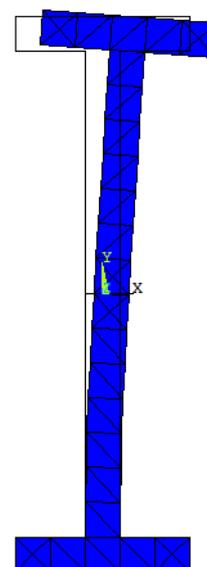
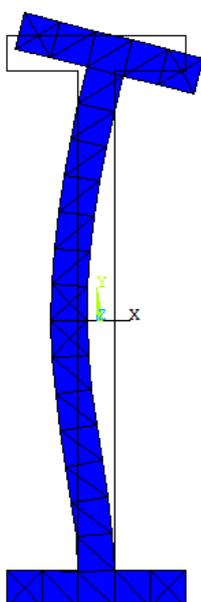


Рис. 8 Формы колебаний на первой резонансной частоте (ANSYS)

DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =202
FREQ=736.8
REAL ONLY
DMX =.734E-03



DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =202
FREQ=736.8
IMAGINARY
DMX =.197E-03

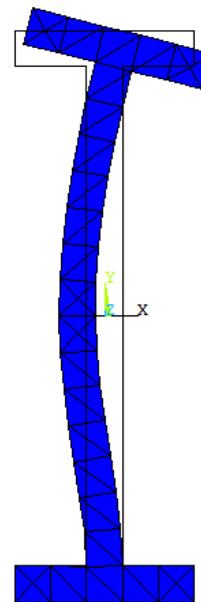


Рис. 9 Формы колебаний на второй резонансной частоте (ANSYS)

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, полученных во FlexPDE (часть 2)

На рис. 10 представлены деформированные формы для вещественной и мнимой частей вектора перемещений на частоте $f_1 = 98.17$ (Гц). Видно, что эти деформированные формы совпадают между собой, а также совпадают с формой колебаний, соответствующей первой собственной частоте.

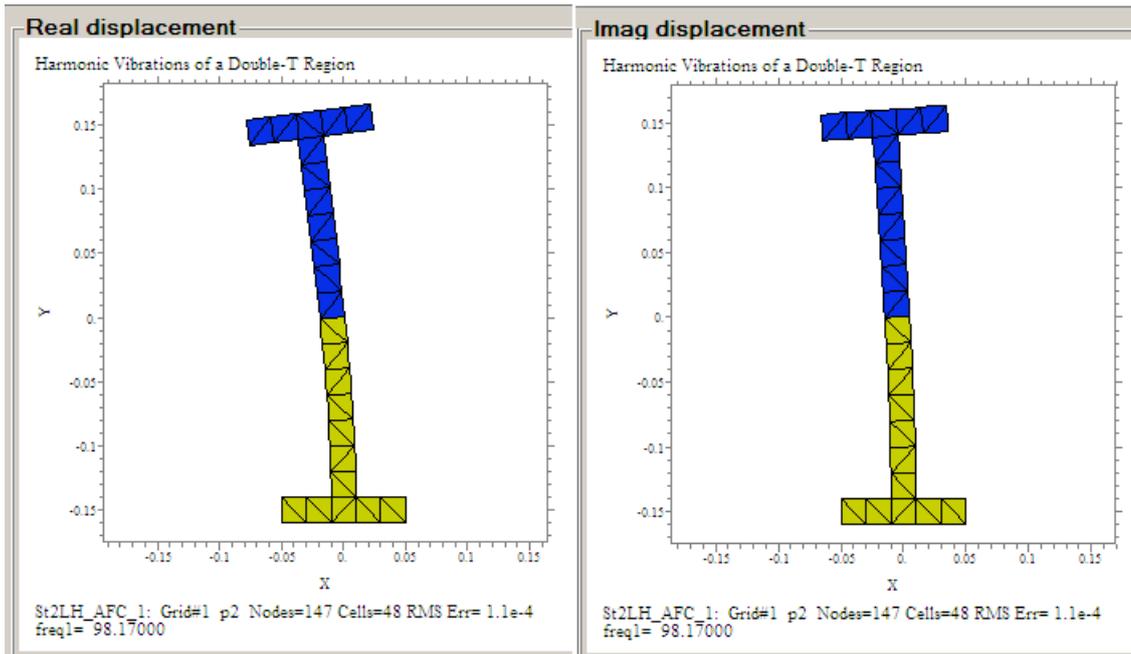


Рис. 10 Формы колебаний на первой резонансной частоте (FlexPDE)

На рис. 11 представлены деформированные формы для вещественной и мнимой частей вектора перемещений на частоте $f_2 = 735$ (Гц). Видно, что деформированная форма для вещественной части вектора перемещений совпадает с формой колебаний, соответствующей второй собственной частоте, с точностью до знака.

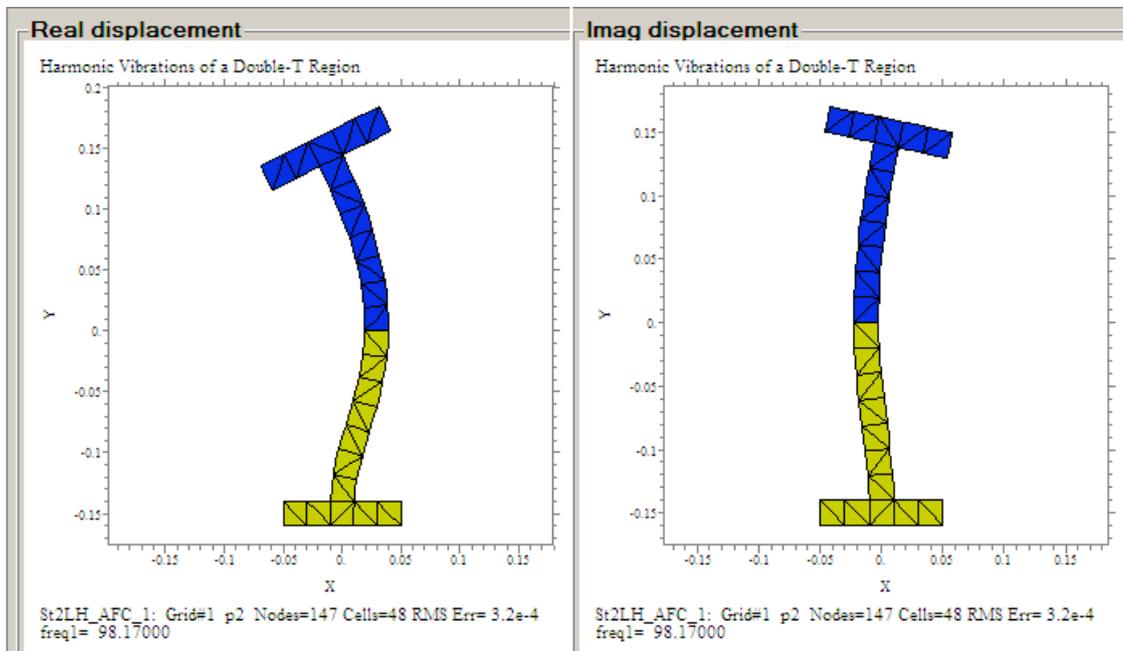


Рис. 11 Формы колебаний на второй резонансной частоте (FlexPDE)