

# Пакеты научных вычислений

## Лекция 4

### Математический анализ в Maple

**Команды прямого и отложенного действия. Наложение ограничений.**

**Вычисление пределов и производных. Исследование функций.**

**Разложение в ряд и аппроксимация функций.**

**Сумма и произведение ряда.**

**Интегрирование.**

**Интегральные преобразования**

Наседкина А. А.



# Общие сведения

---

- Команды прямого и отложенного действия
- Наложение ограничений на переменные

# Команды прямого и отложенного действия

- Для таких математических операций, как вычисление предела, производной, интеграла, суммы ряда и некоторых других операций, существуют две формы записи: **активная** (команда прямого действия) и **инертная** (команда отложенного действия)
- **Команды прямого действия** начинаются с маленькой буквы и выполняются сразу
- **Команды отложенного действия** начинаются с большой буквы и служат для записи операции в математическом виде. Для их выполнения используется команда **value**.

## Некоторые команды с двумя формами записи

**diff** и **Diff**

**int** и **Int**

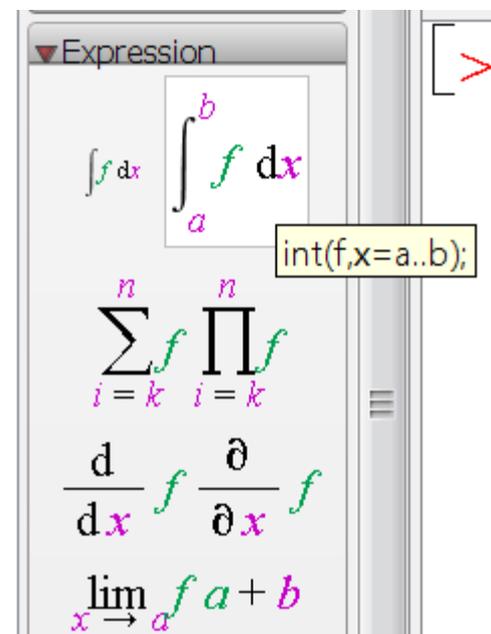
**limit** и **Limit**

**normal** и **Normal**

**product** и **Product**

**sum** и **Sum**

- Шаблоны на панели Expression являются командами прямого действия



# Примеры команд прямого и отложенного действия

Шаблон с палитры Expression (в режиме ввода Math mode)

$$> \int_0^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx$$

$$\frac{3}{2} \pi$$

Команда прямого действия

$$> \text{int}((1 + \cos(x))^2, x=0 ..\text{Pi})$$

$$\frac{3}{2} \pi$$

Команда отложенного действия

$$> \text{Int}((1 + \cos(x))^2, x=0 ..\pi); \text{value}(\%)$$

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx$$

$$\frac{3}{2} \pi$$

В режиме ввода Text mode

$$> \text{Limit}(x * (\text{Pi}/2 + \arctan(x)), x=-\text{infinity}) = \text{limit}(x * (\text{Pi}/2 + \arctan(x)), x=-\text{infinity});$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{1}{2} \pi + \arctan(x) \right) = -1$$

# Наложение ограничений на переменные

- **assume(x1, prop1, x2, prop2, ...)** – наложение условий  
**assume(x1::prop1, x2::prop2, ...); assume(xrel1, xrel2, ...)**
- **additionally(x1, prop1, x2, prop2, ...)** – наложение дополнительных УСЛОВИЙ  
**additionally(x1::prop1, x2::prop2, ...); additionally(xrel1, xrel2, ...)**
- **addproperty(prop1, parents, children)** – добавление нового свойства, основанного на свойствах **parents** и **children**
- **about(x1)** – выводит информацию об условиях, наложенных на **x1** и свойствах **x1**

```
> assume(x > -1)
```

```
> additionally(x ≤ 1)
```

```
> about(x)
```

```
Originally x, renamed x~:
```

```
is assumed to be: RealRange(Open(-1), 1)
```

```
> assume(y :: negative); about(y)
```

```
Originally y, renamed y~:
```

```
is assumed to be: RealRange(-infinity, Open(0))
```

# Наложение ограничений на переменные

- **is(x1, prop1)** – проверяет, удовлетворяет ли **x1** свойству **prop1**, результат в виде true/false/FAIL  
**is(x1::prop1); is(xrel1)**
- **coulditbe(x1, prop1)** – проверяет, может ли **x1** удовлетворять свойству **prop1**, результат в виде true/false/FAIL  
**coulditbe(x1::prop1); coulditbe(xrel1);**

```
> assume(x > -1, x ≤ 1); is(x :: positive)
```

*false*

```
> coulditbe(x::positive)
```

*true*

```
> is(1 - x2, 'positive');
```

*false*

```
> coulditbe(1 - x2 = 1)
```

*true*

```
> x := 'x': about(x)
```

```
x:
```

```
nothing known about this object
```

# Наложение ограничений на переменные

- **hasassumptions(x1)** – проверяет, наложены ли на **x1** какие-то ограничения, результат в виде true/false
- **getassumptions(x1)** - возвращает список наложенных на **x1** ограничений в форме `expression::property`
- **assuming** – вычисление выражения в предположении свойств

```
> assume(x :: integer); additionally(x > 1)
```

```
> hasassumptions(x)
```

*true*

```
> getassumptions(x)
```

*{x~::(AndProp(integer, RealRange(2, ∞)))}*

```
>  $\sqrt{a^2}$  assuming  $a > 0$ 
```

*a~*

```
>  $\sqrt{a^2}$  assuming  $a \leq 0$ 
```

*-a~*

# Использование ограничений для переменных при вычислении интегралов

$$> \int_0^{\infty} e^{-ax} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-ax} - 1}{a} \right)$$

$$> \text{assume } (a > 0); \int_0^{\infty} e^{-ax} dx$$

$$\frac{1}{a}$$

$$> \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \text{ assuming } a :: \text{positive}$$

$$\frac{1}{a}$$

$$> \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \text{ assuming } a :: \text{negative}$$

$$\infty$$

# Вычисление пределов и производных

---

- Вычисление пределов
- Дифференцирование функции одной переменной
- Дифференцирование функции многих переменных
- Дифференциальный оператор

# Вычисление пределов

- `limit(f, x=a)`

`limit(f, x=a, dir)`

`a` – точка предела, в том числе может быть **infinity** или **-infinity**

`dir` – вид предела: **left** (предел слева), **right** (предел справа), **real** (действительный предел), **complex** (комплексный предел)

- **Limit** – аналогичная инертная команда



$$> \lim_{x \rightarrow \infty} e^x; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$\infty$

$0$

`> Limit(exp(x), x = infinity)=limit(exp(x), x = infinity);`

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

`> Limit(exp(x), x = infinity)=limit(exp(x), x = -infinity);`

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$$

# Примеры вычисления пределов

Односторонние пределы

$$> \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

0

> `limit(1/(1+exp(1/x)), x = 0, right);`

0

$$> \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

1

> `limit(1/(1+exp(1/x)), x = 0, left);`

1

Использование аргументов `real` и `complex`

> `Limit(1/x, x=0, real)=limit(1/x, x=0, real);`

$$\lim_{x \rightarrow 0, \text{ real}} \frac{1}{x} = \text{undefined}$$

> `Limit(1/x, x = 0, complex) = limit(1/x, x = 0, complex);`

$$\lim_{x \rightarrow 0, \text{ complex}} \frac{1}{x} = \infty - \infty I$$

# Дифференцирование функции одной переменной

- **diff(f,x)**
- **diff(f,x\$n)** – вычисление производной **n**-го порядка  
**diff(f(x),x\$2)** эквивалентно **diff(f(x),x,x)**
- **Diff** – аналогичная инертная команда

$$\frac{d}{dx} f$$

$$> \frac{d}{dx} \sin(x)$$

$$\cos(x)$$

$$> \text{Diff}(\sin(x), x) = \text{diff}(\sin(x), x);$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

Производные высших порядков

$$> \frac{d^2}{dx^2} (3x^3 + 2x^2 + 5x + 10)$$

$$18x + 4$$

$$> \text{diff}(3x^3 + 2x^2 + 5x + 10, x, x, x)$$

$$18$$

# Примеры вычисления производных

Производная функции, заданной как выражение

$$\begin{aligned} > f := \cos(2 \cdot x)^2 : dl := \frac{d}{dx} f \\ dl := -4 \cos(2 x) \sin(2 x) \end{aligned}$$

Значение производной в точке

$$\begin{aligned} > eval\left(dl, x = -\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{aligned}$$

Производная функции, заданной как функциональный оператор

$$\begin{aligned} > F := x \rightarrow \cos(2 \cdot x)^2 : gl := \frac{d}{dx} F(x) \\ gl := -4 \cos(2 x) \sin(2 x) \end{aligned}$$

Четвертая производная

$$\begin{aligned} > d4 := diff(f, x\$4) \\ d4 := -128 \sin(2 x)^2 + 128 \cos(2 x)^2 \end{aligned}$$

Часто ответ нужно упростить:

$$\begin{aligned} > combine(d4) \\ 128 \cos(4 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > simplify(d4) \\ 256 \cos(2 x)^2 - 128 \end{aligned}$$

Символьное дифференцирование

$$\begin{aligned} > \frac{d^n}{dx^n} (\sin(x) + \cos(x)) \\ \sin\left(x + \frac{1}{2} n \pi\right) + \cos\left(x + \frac{1}{2} n \pi\right) \end{aligned}$$

# Дифференцирование функции многих переменных

- **diff(f, x1, ..., xj)** – вычисление частных производных
- **diff(f, x1, x2, ..., xm)** – частные производные высших порядков

$$\frac{\partial}{\partial x} f$$

**diff(diff(f(x1,x2), x1), x2)** эквивалентно **diff(f(x1,x2), x1, x2)**

**diff(g(x,y), x, y)** эквивалентно **diff(g(x,y), x, x, y, y, y)**

- **Diff** – аналогичная инертная команда

$$\begin{aligned} > \frac{\partial}{\partial y} (3x + y^2) & 2y \\ > \frac{\partial}{\partial x} (3x + y^2) & 3 \\ > \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (3x + y^2) & 0 \end{aligned}$$

# Дифференцирование функции многих переменных: примеры

$$> f := (x-y) / (x+y) :$$

Вычислим все частные производные второго порядка

$$> \text{Diff}(f, x\$2) = \text{diff}(f, x\$2); \text{simplify}(\text{rhs}(\%))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) = -\frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} - \frac{4y}{(x+y)^3}$$

$$> \text{Diff}(f, y, y) = \text{diff}(f, y\$2); \text{simplify}(\text{rhs}(\%))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) = \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} - \frac{4x}{(x+y)^3}$$

$$> \text{Diff}(f, x, y) = \text{diff}(f, x, y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{x-y}{x+y} \right) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

# Дифференциальный оператор

- **D(f)**

- **D[i](f)**

**D[i](f)(x, y, ...)** или **D<sub>i</sub>(f)(x,y,...)** – дифференцирование функции **f**, зависящей от переменных **x, y** (в т. ч. при конкретных значениях переменных); **i** – номер переменной для вычисления частной производной:

**1**- переменная **x**, **2** – переменная **y** и т.д.

- Оператор **D** является обобщением команды **diff**: он может вычислять производные в точках и дифференцировать функциональные операторы и процедуры
- **D(f)(x) = diff(f(x),x)**
- Для преобразования **D** в **diff** и обратно используется команда **convert**
- **(D@@n)(f)(x)** или **D<sup>(n)</sup>(f)(x)** – вычисление n-й производной по **x**
- **(D@@n)[i](f)(x,y,...)** или **D<sub>i\$<sub>n</sub></sub>(f)(x,y,...)** или **(D[i\$<sub>n</sub>](f))(x,y,...)** – вычисление n-й частной производной по i-й переменной.
- **((D@@n)[i]) ((D@@m)[j])(f)(x,y,...)** или **D<sub>i\$<sub>n</sub>,j\$<sub>m</sub></sub>(f)(x,y,...)** или **(D[i\$<sub>n</sub>,j\$<sub>m</sub>](f))(x,y,...)** – вычисление n-й частной производной по i-й переменной и m-й частной производной по j-й переменной

# Примеры использования дифференциального оператора

> D(sin)

cos

Вычисление производной в точке

> D(sin)(π)

-1

Функциональный оператор от одной переменной

> f := x → ln(x<sup>2</sup>) + exp(3·x) :

> g := D(f)

$$g := x \rightarrow \frac{2}{x} + 3e^{3x}$$

> D(f)(x)

$$\frac{2}{x} + 3e^{3x}$$

Функциональный оператор от двух переменных

> f := (x, y) → x<sup>3</sup>·y :

> D[1](f)(x, y)

$$3x^2y$$

> D[2](f)(x, y)

$$x^3$$

Оператор D и команда diff

> D(ln)(x)

$$\frac{1}{x}$$

> diff(ln(x), x)

$$\frac{1}{x}$$

> D[1, 1, 2](h)(x, y)

$$D_{1, 1, 2}(h)(x, y)$$

> convert(%, diff)

$$\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} h(x, y)$$

Запись производных высоких порядков в операторе D

> diff(z(x), x\$5); convert(%, D);

$$\frac{d^5}{dx^5} z(x)$$

$$D^{(5)}(z)(x)$$

> (D@@5)(z)(x)

$$D^{(5)}(z)(x)$$

> diff(p(x, y), x\$2, y\$5); convert(%, D);

$$\frac{\partial^7}{\partial y^5 \partial x^2} p(x, y)$$

$$D_{1, 1, 2, 2, 2, 2, 2}(p)(x, y)$$

Варианты записи

> D<sub>1\$2, 2\$5</sub>(p)(x, y)

$$D_{1, 1, 2, 2, 2, 2, 2}(p)(x, y)$$

> (D[1\$2, 2\$5])(p)(x, y);

$$D_{1, 1, 2, 2, 2, 2, 2}(p)(x, y)$$

> ((D@@2)[1])((D@@5)[2])(p)(x, y);

$$D^{(2)}_1(D^{(5)}_2)(p)(x, y)$$

# Исследование функций

---

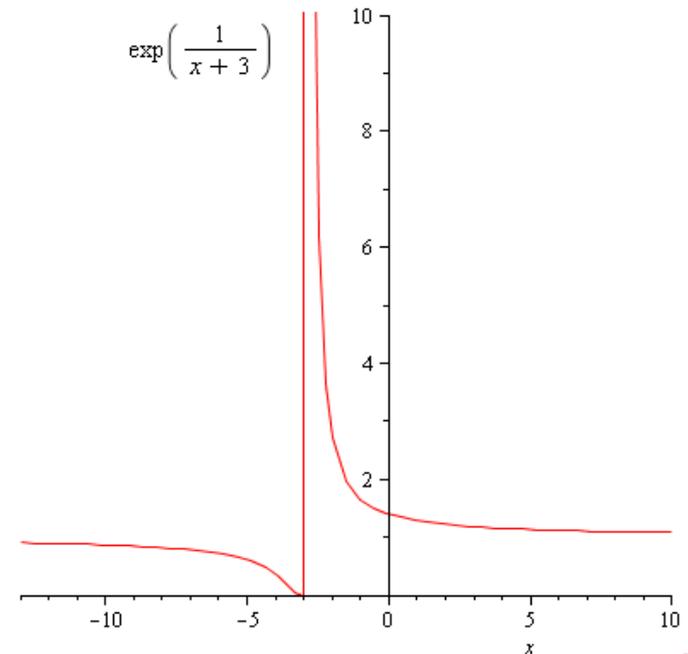
- Непрерывность и точки разрыва: `iscont`, `discont`, `singular`
- Нахождение экстремумов: `extrema`, `minimize`, `maximize`

# Непрерывность и точки разрыва

- **iscont(f,x=x1..x2)** – проверка функции (выражения) на непрерывность
- **discont(f,x)** – находит точки нарушения непрерывности (в т. ч. разрывы первого и второго рода) и отсутствия гладкости
- **singular(f,x)** – находит точки сингулярности (т. е. точки, в которых функция не дифференцируема или точки неустранимых разрывов)

```
> f := exp(1/(x+3))  
  
f := e1/(x+3)  
  
> iscont(f, x = -∞ .. ∞)  
false  
  
> discont(f, x)  
{-3}  
  
> singular(f, x)  
{x = -3}  
  
> limit(f, x = -3, right)  
∞  
  
> limit(f, x = -3, left)  
0
```

```
> plot(f, x = -13 .. 10, 0 .. 10, title = exp(1/(x+3)))
```

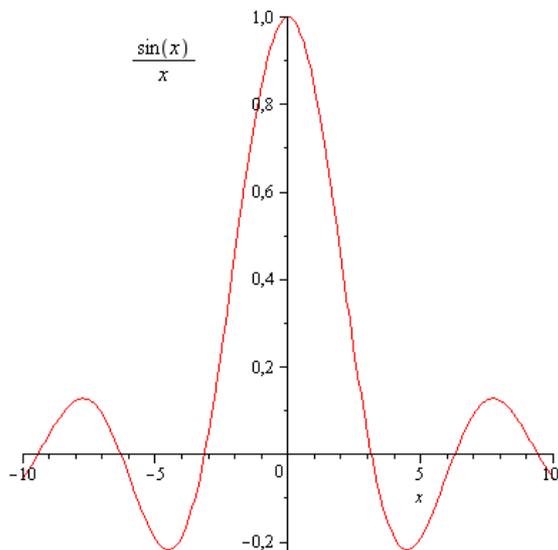


x=-3 - точка разрыва 2 рода

# Примеры: устранимый и неустранимый разрыв

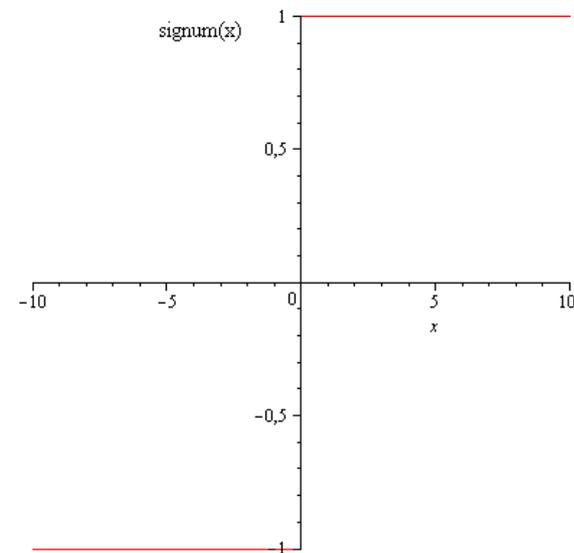
```
> f := sin(x) / x ;
> iscont(f, x = -∞ .. ∞)
false
> discont(f, x)
{0}
> singular(f, x)
{x = 0}
> limit(f, x = 0, right)
1
> limit(f, x = 0, left)
1
```

$x=0$  - точка устранимого разрыва 1 рода



```
> f := signum(x) ;
> iscont(f, x = -∞ .. ∞)
false
> discont(f, x)
{0}
> singular(f, x)
Команда singular использует solve, поэтому
здесь ничего не выдает
> limit(f, x = 0, right)
1
> limit(f, x = 0, left)
-1
```

$x=0$  - точка неустранимого разрыва 1 рода



# Пример: отсутствие гладкости

```
> y := 2·x - √[3]{x2}
```

$$y := 2x - (x^2)^{1/3}$$

```
> iscont(y, x = -∞ .. ∞)
```

true

```
> discont(y, x)
```

{0}

```
> singular(y, x)
```

{x = ∞}, {x = -∞}

```
> limit(y, x = 0, left)
```

0

```
> limit(y, x = 0, right)
```

0

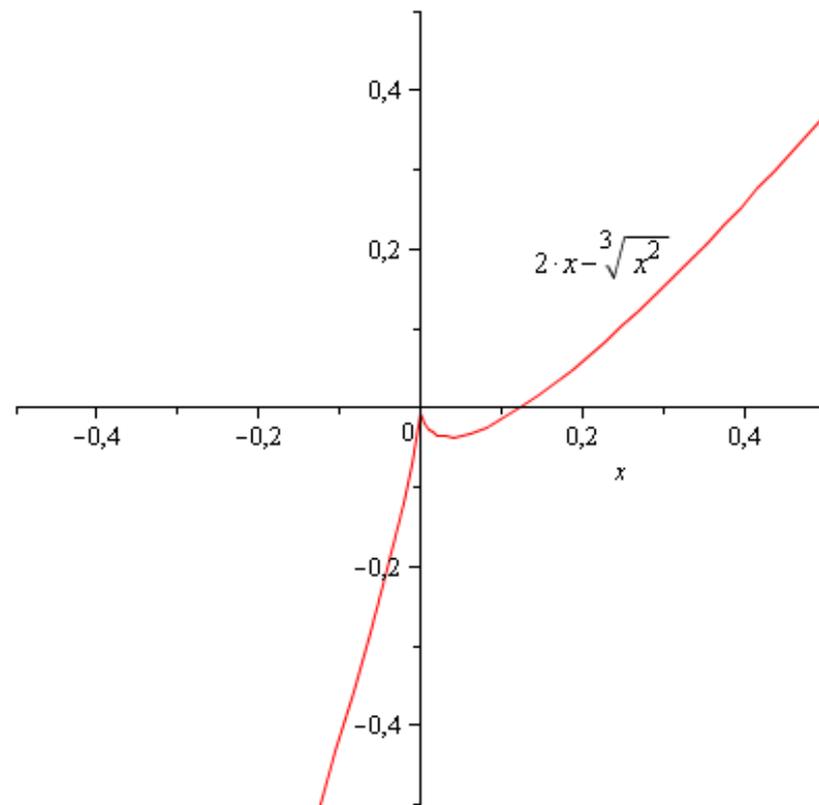
```
> dl := diff(y, x)
```

$$dl := 2 - \frac{2}{3} \frac{x}{(x^2)^{2/3}}$$

```
> eval(dl, x = 0)
```

Error, numeric exception: division  
by zero

```
> plot(y, x = -0.5 .. 0.5, -0.5 .. 0.5)
```



# Команды для поиска экстремумов

- **extrema(f,{cond},x,`s`)** – поиск экстремумов, удовлетворяющих ограничениям **cond**, для функции от переменных **x,y**
- **s** – необязательное имя параметра для координат точек экстремумов
- **extrema(f,{},x,`s`)** – поиск экстремумов функции на всей числовой оси

## Поиск глобальных минимумов

- **minimize(f) ; minimize(f, location)** – поиск глобальных минимумов
- **location** – ключевое слово для вывода точек минимумов

## Поиск локальных минимумов

- **minimize(f, x=x1..x2) ; minimize(f, x=x1..x2,location)** – поиск минимальных значений функции на отрезке  $[x1,x2]$  .
- Возможный синтаксис: **minimize(f, x<a)**; **minimize(f, x>b)** – поиск на полуоси  $(-\infty;a)$  или  $(b,+\infty)$

## Поиск глобальных и локальных максимумов

Все аналогично для команды **maximize**

$$> \text{restart, } y := \frac{x^4}{(1+x)^3} :$$

$$> \text{extrema}(y, \{ \}, x, 's'); s$$

$$\left\{ 0, -\frac{256}{27} \right\}$$

$$\{ \{x = -4\}, \{x = 0\} \}$$

# Пример: поиск экстремумов и точек экстремумов

$$> y := \frac{x^4}{(1+x)^3} :$$

> *minimize*( $y, x < -1$ ); *maximize*( $y, x < -1, location$ )

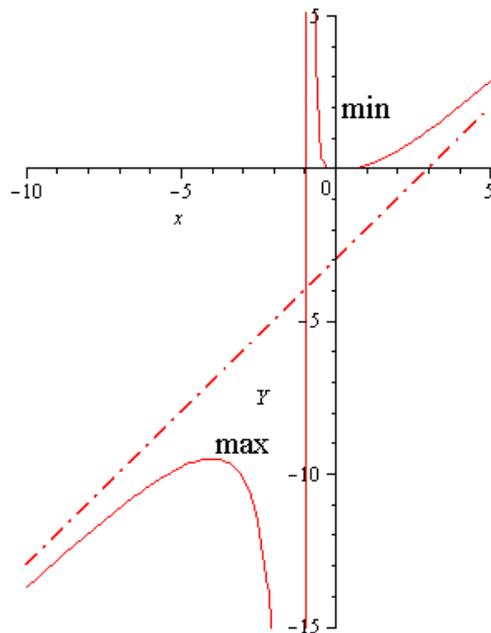
$-\infty$

$$-\frac{256}{27}, \left\{ \left[ \{x = -4\}, -\frac{256}{27} \right] \right\}$$

> *maximize*( $y, x > -1$ ); *minimize*( $y, x > -1, location$ )

$\infty$

$$0, \left\{ \left[ \{x = 0\}, 0 \right] \right\}$$



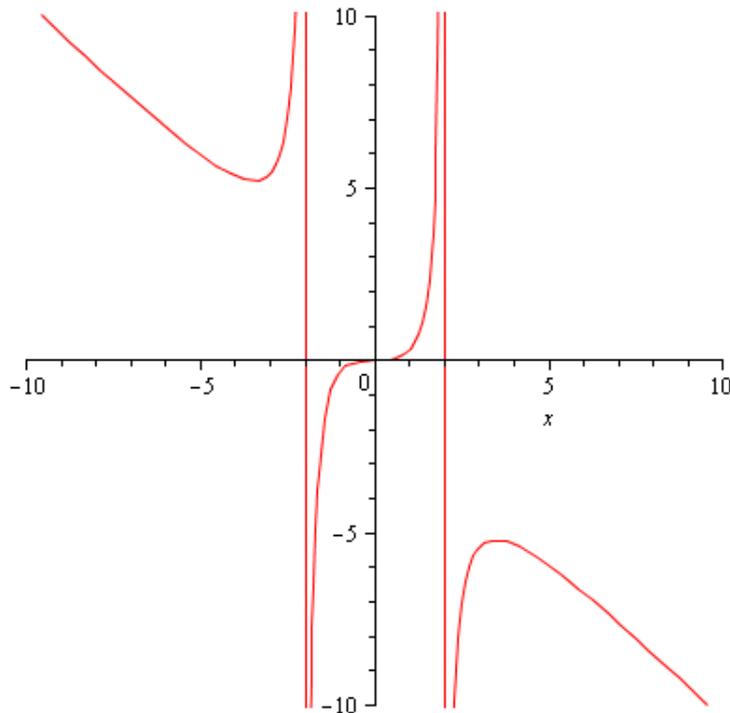
# Пример поиска экстремумов у функции с точкой перегиба

```
> restart; y :=  $\frac{x^3}{4 - x^2}$  ;
> extrema(y, { }, x, 's'); s;
       $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$ 
       $\{\{x=0\}, \{x=-2\sqrt{3}\}, \{x=2\sqrt{3}\}\}$ 
```

```
> minimize(y)
       $-\infty$ 
```

```
> maximize(y)
       $\infty$ 
```

```
> plot(y, x = -10 .. 10, -10 .. 10)
```



```
> minimize(y, x < -2, location)
       $3\sqrt{3}, \{\{x = -2\sqrt{3}\}, 3\sqrt{3}\}$ 
```

```
> maximize(y, x > 2, location)
       $-3\sqrt{3}, \{\{x = 2\sqrt{3}\}, -3\sqrt{3}\}$ 
```

```
> minimize(y, x = -2 .. 2, location)
       $-\infty, \{\{x = -2\}, -\infty\}$ 
```

```
> maximize(y, x = -2 .. 2, location)
       $\infty, \{\{x = 2\}, \infty\}$ 
```

```
> dl := diff(y, x);
```

$$dl := \frac{3x^2}{4 - x^2} + \frac{2x^4}{(4 - x^2)^2}$$

```
> eval(dl, x = 0.1)
      0.007531359727
```

```
> eval(dl, x = -0.1)
      0.007531359727
```

В точке  $x=0$  производная не меняет знак,  
это точка перегиба

В точке  $x = -2\sqrt{3}$  локальный минимум  $f_{\min} = 3\sqrt{3}$

В точке  $x = 2\sqrt{3}$  локальный максимум  $f_{\max} = -3\sqrt{3}$

# Разложение в ряд и аппроксимация функций

---

- Разложение функции в степенной ряд
- Разложение функции в ряд Тейлора
- Полиномиальная интерполяция

# Разложение функции в степенной ряд

- **series(f(x), x=a, n)** – разложение функции  $f$  в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

где  $x_0$  – точка, в окрестности которой производится разложение,  
 $n$  – порядок разложения. Если порядок не указан, то он определяется значением константы **Order**

```
> series(e-x√(x+1), x=0)
```

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{79}{384}x^4 + \frac{503}{3840}x^5 + O(x^6)$$

```
> Order := 10 :
```

```
> series(e-x√(x+1), x=0)
```

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{79}{384}x^4 + \frac{503}{3840}x^5 - \frac{3953}{46080}x^6 + \frac{39317}{645120}x^7 - \frac{479071}{10321920}x^8 + \frac{6886063}{185794560}x^9 + O(x^{10})$$

```
> series( x / (1 - x - x2), x=0, 5 )
```

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + O(x^5)$$

```
> convert(%, polynom)
```

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4$$

# Разложение функции в ряд Тейлора

- **taylor(f(x), x=a, n)** – разложение функции одной переменной в ряд Тейлора

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

- **coeftayl(f(x), vars, n)** – коэффициент при члене порядка **n** по переменным разложения **vars**
- **mtaylor(f(x), [x1=a1,...,xn=an], n)** – разложение функции многих переменных в ряд Тейлора

```
> restart
```

```
> f := sin(x) + cos(x) :
```

```
> taylor(f, x=0)
```

$$1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

```
> taylor(f, x=0, 4)
```

$$1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

```
> coeftayl(f, x=0, 3)
```

$$-\frac{1}{6}$$

# Разложение в ряд Тейлора: иллюстрация в пакете Student

Разложение функции многих переменных

> `mtaylor(sin(x^2 + y^2), [x = 0, y = 0], 10);`

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}y^2x^4 - \frac{1}{2}y^4x^2 - \frac{1}{6}y^6$$

> `coeftayl(sin(x^2 + y^2), [x, y] = [0, 1], [0, 0]);`

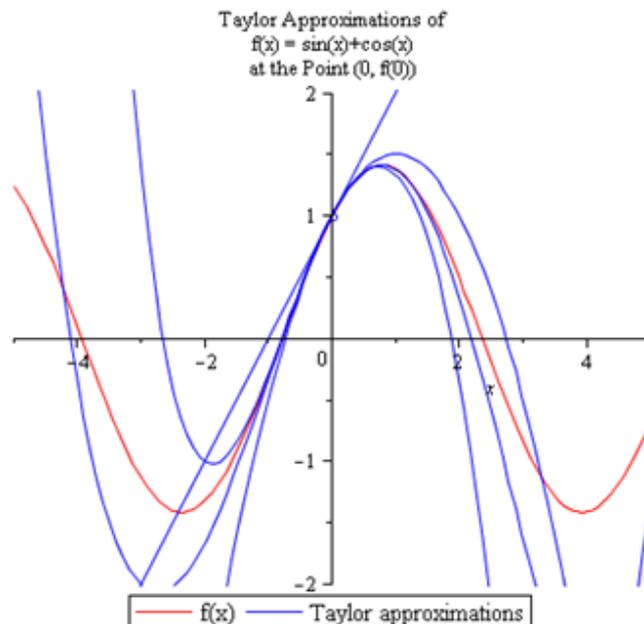
$$\sin(1)$$

Иллюстрация разложения в ряд Тейлора с помощью команды `TaylorApproximation`

> `with(Student[Calculus1]) : f := sin(x) + cos(x) : TaylorApproximation(f, x = 0, order = 4)`

$$1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

> `TaylorApproximation(f, x = 0, output = plot, order = 1..4, view = [-5..5, -2..2]);`



# Полиномиальная интерполяция

- **interp(x, y, v)**
  - **x** – список независимых переменных  $x[1], \dots, x[n+1]$
  - **y** – список независимых переменных  $y[1], \dots, y[n+1]$
  - **v** – независимая переменная
- Новая команда: **PolynomialInterpolation** из пакета **CurveFitting**
- **PolynomialInterpolation(xydata, v, opts)**
- **PolynomialInterpolation(xdata, ydata, v, opts)**
  - **xydata** – двумерный массив или матрица точек  $[[x1, y1], [x2, y2], \dots, [xn, yn]]$
  - **xdata** – список независимых переменных  $[x1, x2, \dots, xn]$
  - **ydata** – список независимых переменных  $[y1, y2, \dots, yn]$
  - **v** – независимая переменная
  - **opts** – опции в форме **form=option**, где option может принимать значения **Lagrange, monomial, Newton** или **power**

>  $X := [0, 1, 2, 3, 4, 5] : Y := [0, 1, 4, 3, 2, 1] : f := \text{interp}(X, Y, x);$

$$f := -\frac{7}{60}x^5 + \frac{19}{12}x^4 - \frac{91}{12}x^3 + \frac{173}{12}x^2 - \frac{73}{10}x$$

>  $\text{with}(\text{CurveFitting}); \text{PolynomialInterpolation}([ [0, 0], [1, 3], [2, 1], [3, 3] ], z)$

$$\frac{3}{2}z^3 - 7z^2 + \frac{17}{2}z$$

# Сумма и произведение ряда

---

- Операция символьного суммирования
- Бесконечные и конечные произведения

# Вычисление суммы ряда

- Команда **sum** выполняет определенное и неопределенное символьное суммирование
- **sum(f, k=1..∞)** – сумма ряда
- **sum(f, k=m..n)** – частичная сумма ряда
- **Sum** – аналогичная инертная команда

$$\sum_{i=k}^n f$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

∞

$$> \text{sum}\left(\frac{1}{n}, n = 1 .. \text{infinity}\right)$$

∞

$$> \text{Sum}(1/n!, n=0.. \text{infinity}) = \text{sum}(1/n!, n=0.. \text{infinity});$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}; \text{evalf}(\%)$$

$$3e^2 - 1$$

21.16716830

$$> \sum_{n=1}^{10} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}; \text{evalf}(\%)$$

$$\frac{42862}{2025}$$

21.16641975

$$> \sum_{n=1}^{30} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}; \text{evalf}(\%)$$

$$\frac{83664833379537020233422076}{3952575621190533915703125}$$

21.16716830

## Сумма ряда: примеры

При указании только индекса суммирования Maple попытается получить формулу для суммы в виде  $S(k)$ , где  $S(k+1)-S(k)=a(k)$ , где  $a(k)$  - общая зависимость слагаемых от индекса суммирования  $k$

$$> \sum_k k^2$$

$$\frac{1}{3} k^3 - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{6} k$$

$$> \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$$

$$> \text{Sum}(x^n/n!, n=0..infinity) = \text{sum}(x^n/n!, n=0..infinity);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Частичная и полная сумма ряда

$$> a[n] := \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$> \text{sum}(a[n], n=1..N)$$

$$-\frac{1}{3(3N+1)} + \frac{1}{3}$$

$$> \text{sum}(a[n], n=1..infinity)$$

$$\frac{1}{3}$$

# Сравнение команды суммирования sum и команды добавления add

> *sum*( $x^n$ ,  $n = 1..10$ )

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

> *add*( $x^n$ ,  $n = 1..10$ )

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

> *sum*( $x^n$ ,  $n = 1..1000$ )

$$\frac{x^{1001}}{x-1} - \frac{x}{x-1}$$

> *add*( $x^n$ ,  $n = 1..1000$ );

$$\begin{aligned} &x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47} + x^{48} \\ &+ x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55} + x^{56} + x^{57} + x^{58} + x^{59} + x^{60} \\ &+ x^{61} + x^{62} + x^{63} + x^{64} + x^{65} + x^{66} + x^{67} + x^{68} + x^{69} + x^{70} + x^{71} + x^{72} + x^{73} \\ &+ x^{74} + x^{75} + x^{76} + x^{77} + x^{78} + x^{79} + x^{80} + x^{81} + x^{82} + x^{83} + x^{84} + x^{85} + x^{86} \\ &+ x^{87} + x^{88} + x^{89} + x^{90} + x^{91} + x^{92} + x^{93} + x^{94} + x^{95} + x^{96} + x^{97} + x^{98} + x^{99} \\ &+ x^{1000} + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ x^{980} + x^{981} + x^{983} + x^{982} + x^{984} + x^{985} + x^{986} + x^{987} + x^{988} + x^{989} \\ &+ x^{990} + x^{991} + x^{992} + x^{993} + x^{994} + x^{995} + x^{996} + x^{997} + x^{998} + x^{999} \\ &+ x^{1000} + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} \end{aligned}$$

> *sort*(%,  $x$ , *ascending*)

$$\begin{aligned} &x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} \\ &+ x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} \\ &+ x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36} \\ &+ x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47} \\ &+ x^{48} + x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55} + x^{56} + x^{57} + x^{58} \end{aligned}$$

# Вычисление произведений

- Команда **product** вычисляет символьные произведения
- **product(f, k=1..∞)** – произведение ряда
- **product(f, k=m..n)** – частичное произведение ряда
- **Product** – аналогичная инертная команда

$$\prod_{i=k}^n f$$

$$> \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}$$

> `Product((n^3-1)/(n^3+1), n = 2 .. infinity) = product((n^3-1)/(n^3+1), n = 2 .. infinity);`

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right) = \frac{2}{3}$$

Сравнение с командой умножения `mul`

$$> \prod_{k=1}^3 (k^2);$$

$$36$$

$$> \text{mul}(k^2, k=1..3)$$

$$36$$

$$> \prod_{k=1}^n (k^2)$$

$$\Gamma(n+1)^2$$

# Интегрирование

---

- Интегрирование: неопределенный и определенный интегралы
- Численное интегрирование
- Методы интегрирования: интегрирование по частям и замена переменных
- Повторные, двойные и тройные интегралы
- Графическая аппроксимация определенного интеграла

# Интегрирование функции одной переменной

- **int(f, x)** – неопределенный интеграл
- **int(f, x=a..b)** – определенный интеграл
- **Int** – аналогичная инертная команда

$$\int f dx$$

$$\int_a^b f dx$$

$$> \int \sin(x) dx$$

$$-\cos(x)$$

$$> \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

$$2$$

$$> \text{Int}((1 + \cos(x))^2, x = 0 .. \text{Pi}) = \text{int}((1 + \cos(x))^2, x = 0 .. \text{Pi})$$

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx = \frac{3}{2} \pi$$

# Вычисление несобственных интегралов и численное интегрирование

- **evalf(int(f, x=x1..x2), digits)** – вычисление интеграла с точностью digits (по умолчанию равна константе Digits)

Несобственный интеграл

$$> \text{assume}(-1 < a); \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x e^{x^2}} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + a)$$

Численное интегрирование

$$> \text{evalf}(\text{int}(\cos(x)/x, x = \text{Pi}/6 .. \text{Pi}/4), 15);$$

$$0.322922981113732$$

# Методы интегрирования: интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \int u v' dx = uv - \int v u' dx \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

1) команда **intparts** из устаревшего пакета **student**

**intparts(f, u)**, где  $f$  – выражение вида  $\int u \cdot v' dx$

- **intparts(Int(F, x), u)**

2) команды **IntRules** или **Rule** из пакета **Student[Calculus1]**

```
> with(student) :
> J := x^3 * sin(x) :
> intparts(Int(J, x), x^3)
      -x^3 cos(x) - (∫(-3x^2 cos(x)) dx)
> intparts(%, x^2)
      -x^3 cos(x) + 3x^2 sin(x) + ∫(-6x sin(x)) dx
> value(%)
      -x^3 cos(x) + 3x^2 sin(x) - 6 sin(x) + 6x cos(x)
> int(J, x)
      -x^3 cos(x) + 3x^2 sin(x) - 6 sin(x) + 6x cos(x)
```

```
> with(Student[Calculus1]) :
> Rule
   parts, sin(x), e^x (∫ sin(x) e^x dx) #u=sin(x), v'=e^x
      ∫ sin(x) e^x dx = sin(x) e^x - (∫ e^x cos(x) dx)
> Rule
   parts, cos(x), e^x (%) #u=cos(x), v'=e^x
      ∫ sin(x) e^x dx = sin(x) e^x - e^x cos(x) + ∫ (-sin(x) e^x) dx
> value(%)
      ∫ sin(x) e^x dx = 1/2 sin(x) e^x - 1/2 e^x cos(x)
```

# Методы интегрирования: замена переменных (метод подстановки)

1) команда **changevar** из устаревшего пакета **student**

**changevar(s, f)**, где  $s$  – выражение вида  $h(x) = g(u)$ ,  $f$  – выражение вида  $\text{Int}(F(x), x = a \dots b)$

- **changevar(h(x)=t, Int(f, x), t)** – замена переменных

2) команда **Change** из пакета **IntegrationTools** или команда **ChangeofVariables** из пакета **Student[MultivariateCalculus]**

$$\int F(x)dx = \left| x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \right| = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

```
> with(student) :
> f := 1 / (1 + cos(x)) :
> changevar(tan(x/2) = t, Int(f, x = -pi/2 .. pi/2), t)
      2
      |
      | 1
      |----- dt
      | (1 + cos(2 arctan(t))) (1 + t^2)
      |
      |
> value(%)
      2
> int(f, x = -pi/2 .. pi/2)
      2
```

```
> with(IntegrationTools) :
> J := Int(1 / (1 + cos(x)), x = -pi/2 .. pi/2)
      1/2 pi
      |
      | J := ∫ ----- dx
      | -1/2 pi
      | 1 + cos(x)
      |
> Change(J, tan(x/2) = t)
      2
      |
      | 1
      |----- dt
      | (1 + cos(2 arctan(t))) (1 + t^2)
      |
> value(%)
      2
```

# Интегрирование функции многих переменных

- Повторный интеграл – вложенность команд **int**
- 1) команды **Doubleint** и **Tripleint** устаревшего пакета **student**
    - **Doubleint(f(x, y), D)** – двойной интеграл, где **D** – область интегрирования
    - **Tripleint(f(x, y, z), x, y, z, V)** – тройной интеграл, где **V** – область интегрирования
  - 2) Команда **MultiInt** пакета **Student[MultivariateCalculus]**
    - **MultiInt(f(x,y), x=a..b, y=c..d, opts)**
    - **MultiInt(f(x,y,z), x=a..b, y=c..d, z=e..f, opts)**
    - Важен порядок пределов интегрирования!

>  $\text{Int}(\text{Int}(y^3 / (x^2 + y^2), x = 0 .. y), y = 2 .. 4) = \text{int}(\text{int}(y^3 / (x^2 + y^2), x = 0 .. y), y = 2 .. 4)$

$$\int_2^4 \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx dy = \frac{14}{3} \pi$$

# Интегрирование функции многих переменных: примеры

> with(student) :

> J2 := Doubleint(sin(x + 2·y), x = y ..  $\frac{\pi}{2}$  - y, y = 0 ..  $\frac{\pi}{2}$ )

$$J2 := \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_y^{\frac{1}{2}\pi - y} \sin(x + 2y) \, dx \, dy$$

> value(J2)

$$\frac{2}{3}$$

> J3 := Tripleint(4 + z, y = x<sup>2</sup> .. 1, x = -1 .. 1, z = 0 .. 2)

$$J3 := \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (4 + z) \, dy \, dx \, dz$$

> value(J3)

$$\frac{40}{3}$$

> Doubleint(h·g, x, y, C)

$$\iint_C h g \, dx \, dy$$

> with(Student[MultivariateCalculus]) :

> MultiInt(3 x<sup>2</sup> + 3 y<sup>2</sup>, x = 1 .. 4, y = -1 .. 6)

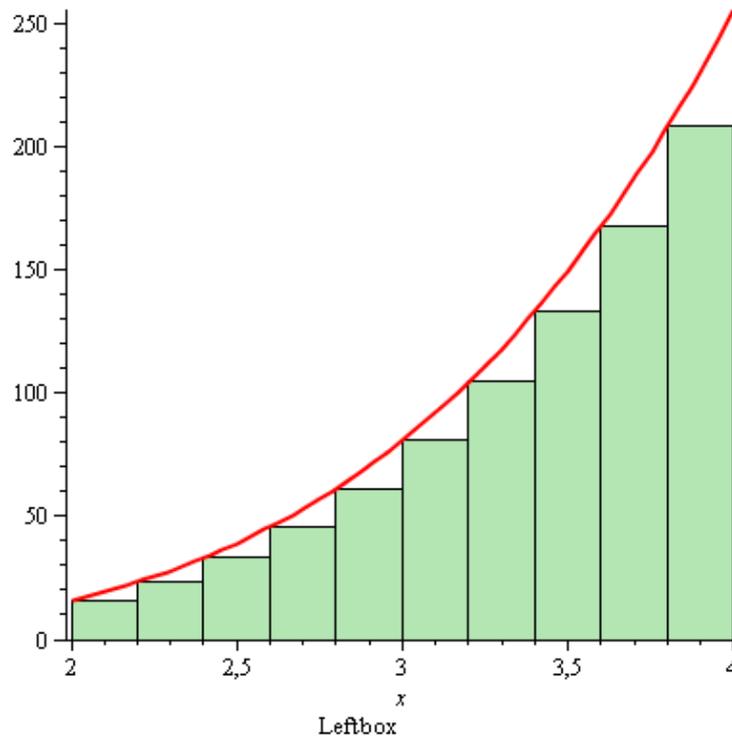
$$1092$$

# Графическая аппроксимация определенного интеграла: команды устаревшего пакета student

- **leftbox**( $f(x)$ ,  $x=a..b$ ,  $n$ , 'shading'=<color>, <plot options>) – графическая аппроксимация интеграла в пределах от  $a$  до  $b$  с помощью левой Римановой суммы,  $n$  – число аппроксимирующих прямоугольников (необязательный параметр), shading – заливка прямоугольников
- **rightbox** – аналогичная аппроксимация интеграла с помощью правой Римановой суммы
- **middlebox** – аналогичная аппроксимация интеграла с помощью средней Римановой суммы
- **leftsum**( $f(x)$ ,  $x=a..b$ ,  $n$ ) – значение левой Римановой суммы
- **rightsum**( $f(x)$ ,  $x=a..b$ ,  $n$ ) – значение правой Римановой суммы
- **middlesum**( $f(x)$ ,  $x=a..b$ ,  $n$ ) – значение средней Римановой суммы

# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью левой суммы (пакет student)

> `with(student) : leftbox(x^4, x = 2..4, 10, color = RED, caption = "Leftbox");`  
`leftsum(x^4, x = 2..4, 10); evalf(%)`

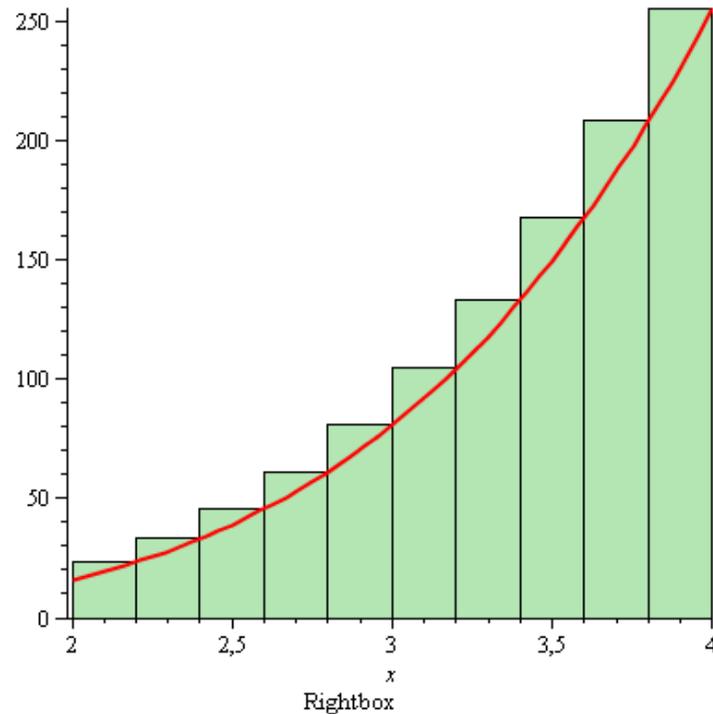


$$\frac{1}{5} \sum_{i=0}^9 \left( 2 + \frac{1}{5} i \right)^4$$

175.1465600

# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью правой суммы (пакет student)

> `rightbox(x4, x = 2 ..4, 10, color = RED, caption = "Rightbox"); rightsum(x4, x = 2 ..4, 10); evalf(%)`

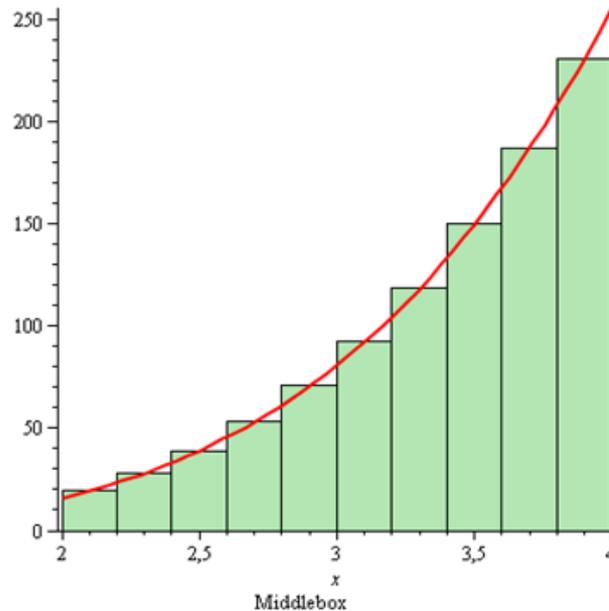


$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{10} \left( 2 + \frac{1}{5} i \right)^4$$

223.1465600

# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью средней суммы (пакет student)

> `middlebox(x4, x = 2 ..4, 10, color = RED, caption = "Middlebox"); middlesum(x4, x = 2 ..4, 10); evalf(%)`



$$\frac{1}{5} \sum_{i=0}^9 \left( \frac{21}{10} + \frac{1}{5} i \right)^4$$

198.0267600

Увеличим число прямоугольников

> `leftsum(x4, x = 2 ..4, 1000) : evalf(%)`; `rightsum(x4, x = 2 ..4, 1000) : evalf(%)`

198.1600747

198.6400747

# Графическая аппроксимация определенного интеграла: команды пакета Student[Calculus1]

- **ApproximateInt(f(x), x = a..b, opts)**
- **ApproximateInt(f(x), a..b, opts)**
- **ApproximateInt(Int(f(x), x = a..b), opts)** – числовая или графическая (с опцией **output=plot**) аппроксимация интеграла в пределах интегрирования от a до b

Некоторые опции (подробнее см. в Help)

- **method = lower, upper, left, midpoint, right, trapezoid, simpson, simpson[3/8], boole, newtoncotes[posint], random** или **procedure** – метод аппроксимации интеграла (по умолчанию – средняя Риманова сумма)
- **output = value, sum, plot**, или **animation** – результат (по умолчанию – приближенное значение value)
- **partition = posint, list(algebraic), random[algebraic]** или **algebraic** – количество интервалов (прямоугольников), по умолчанию равно 10

# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла (команды пакета Student[Calculus1])

```
> with(Student[Calculus1]):
```

```
> f := sin(x):
```

```
> int(f, x = 0 .. pi);
```

2

Приближенное значение по умолчанию

```
> ApproximateInt(f, x = 0 .. pi); evalf(%)
```

$$\frac{1}{20} \pi \sqrt{2} \sqrt{5} + \frac{3}{20} \pi \sqrt{2} + \frac{1}{10} \pi \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

2.008248408

Значение средней Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = midpoint); evalf(%)
```

$$\frac{1}{20} \pi \sqrt{2} \sqrt{5} + \frac{3}{20} \pi \sqrt{2} + \frac{1}{10} \pi \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

2.008248408

Значение левой Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = left); evalf(%)
```

$$\frac{1}{10} \pi + \frac{1}{10} \pi \sqrt{5} + \frac{1}{20} \pi \sqrt{2} \sqrt{5 - \sqrt{5}} + \frac{1}{20} \pi \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

1.983523537

Значение правой Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = right); evalf(%)
```

$$\frac{1}{10} \pi + \frac{1}{10} \pi \sqrt{5} + \frac{1}{20} \pi \sqrt{2} \sqrt{5 - \sqrt{5}} + \frac{1}{20} \pi \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

1.983523537

Значение верхней Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = upper);
```

2.297682802

Значение нижней Римановой суммы

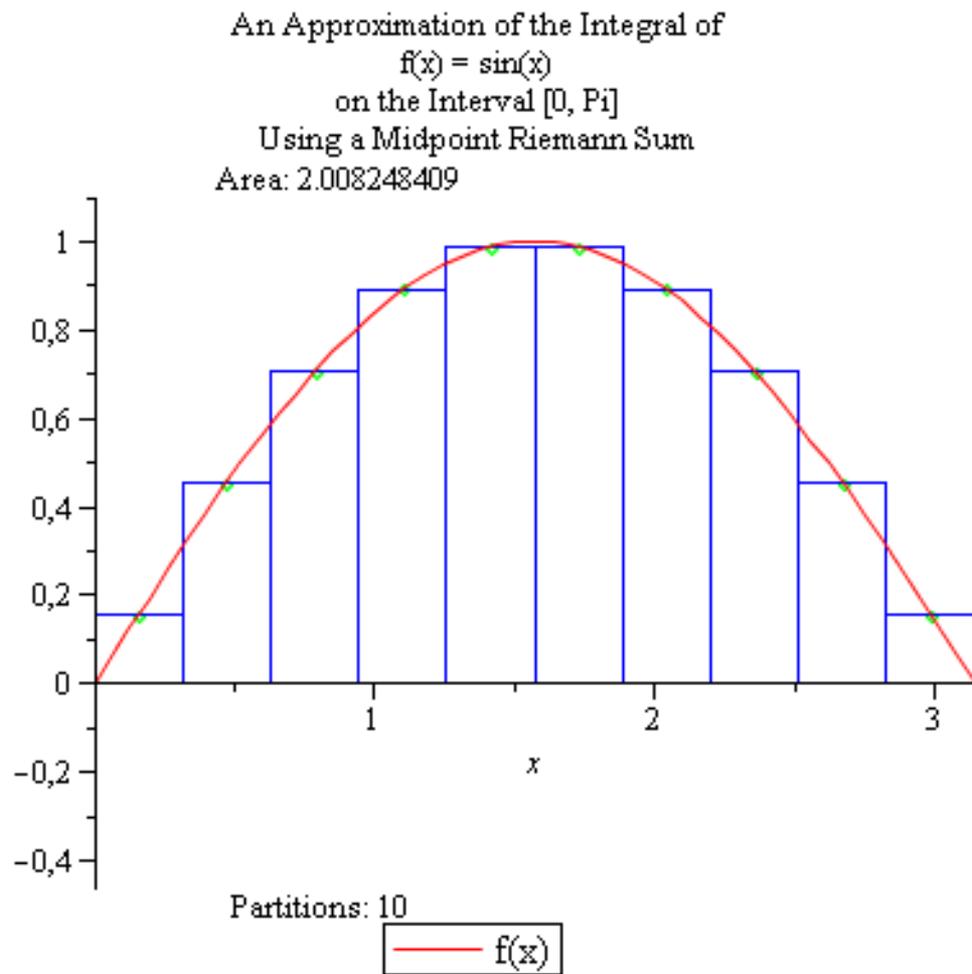
```
> ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = lower);
```

1.669364272

# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью средней суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление средней Римановой суммы

> *ApproximateInt*(*f*, *x* = 0 .. $\pi$ , *method* = *midpoint*, *output* = *plot*)

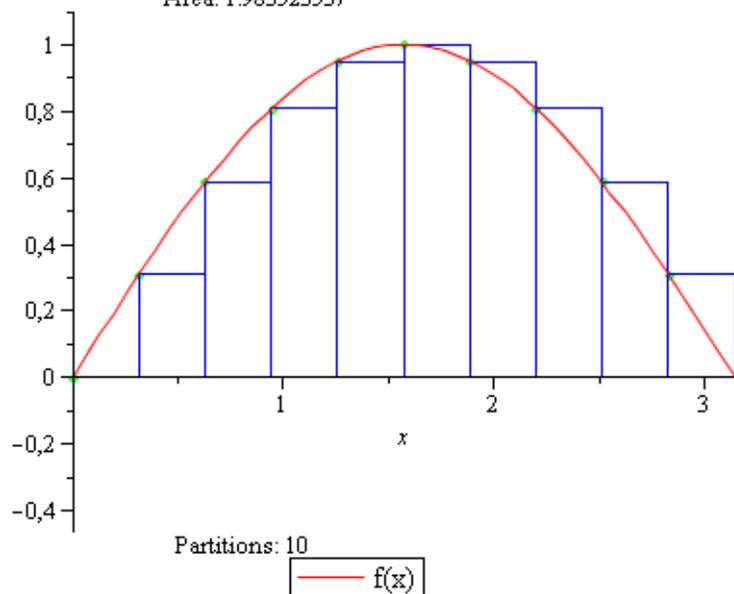


# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью левой и правой суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление левой и правой Римановых сумм

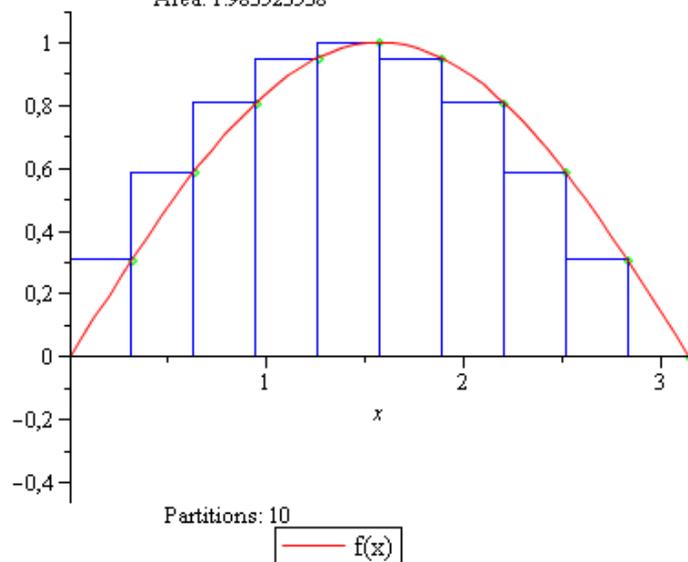
> `ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = left, output = plot)`

An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = \sin(x)$   
on the Interval  $[0, \pi]$   
Using a Left-endpoint Riemann Sum  
Area: 1.983523537



> `ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = right, output = plot)`

An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = \sin(x)$   
on the Interval  $[0, \pi]$   
Using a Right-endpoint Riemann Sum  
Area: 1.983523538

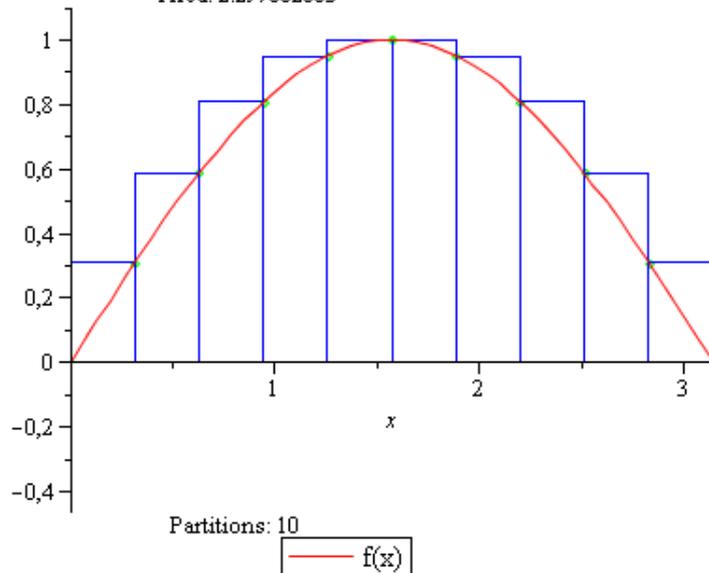


# Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью верхней и нижней суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление верхней и нижней Римановых сумм

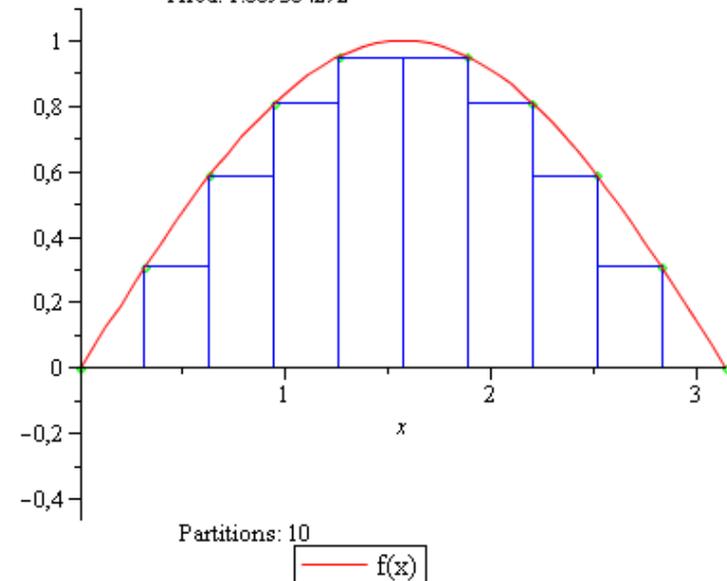
> `ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = upper, output = plot)`

An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = \sin(x)$   
on the Interval  $[0, \pi]$   
Using an Upper Riemann Sum  
Area: 2.297682803



> `ApproximateInt(f, x = 0 .. pi, method = lower, output = plot)`

An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = \sin(x)$   
on the Interval  $[0, \pi]$   
Using a Lower Riemann Sum  
Area: 1.669364272



# Интегральные преобразования

---

- Преобразование Фурье
- Преобразование Лапласа

# Преобразование Фурье

- **fourier(f(x), x, k)** – преобразование Фурье

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

- **invfourier(F(k), k, x)** – обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$$

- Команды интегральных преобразований входят в пакет **inttrans**

> *with(inttrans) : assume(0 < a); fourier(e<sup>-a|x|</sup>, x, k)*

$$\frac{2a}{a^2 + k^2}$$

> *invfourier*( $\frac{1}{k^2 - a^2}, k, x$ )

$$\frac{1}{2} \frac{\sin(ax) (-2 \operatorname{Heaviside}(x) + 1)}{a}$$

# Преобразование Фурье: косинус- и синус-преобразования

- **fouriersin(f(x), x, k)** – синус-преобразование Фурье

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx$$

- **fouriercos(f(x), x, k)** – косинус-преобразование Фурье

- $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx$

- **fouriersin(F(k), k, x); fouriercos(F(k), k, x)** - обратные преобразования

>  $f := \exp(-a * x) * \sin(b * x) : \text{assume}(0 < a);$

>  $\text{fouriersin}(f, x, k);$

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} a \left( \frac{1}{a^2 + (b - k)^2} - \frac{1}{a^2 + (k + b)^2} \right)}{\sqrt{\pi}}$$

>  $\text{fouriercos}(f, x, k);$

$$\frac{\sqrt{2} \left( \frac{1}{2} \frac{k + b}{a^2 + (k + b)^2} + \frac{1}{2} \frac{b - k}{a^2 + (b - k)^2} \right)}{\sqrt{\pi}}$$

# Преобразование Лапласа

- **laplace(f(x), x, p)** – преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx$$

- **invlaplace(F(p), p, x)** – обратное преобразование Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{px} dp$$

> *with(inttrans) : F(p) = laplace(cos(a\*x) \* sinh(b\*x), x, p);*

$$F(p) = \frac{b(-a^2 - b^2 + p^2)}{((p+b)^2 + a^2)((p-b)^2 + a^2)}$$

> *assume(a > 0) : invlaplace(1/(p^2 + 2\*a\*p), p, x)*

$$\frac{1}{2} \frac{1 - e^{-2ax}}{a}$$