Лабораторная работа №3
РАСТЯЖЕНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
1. Линейная теория упругости
2. Статический анализ
3. Плоская задача (плоское напряженное состояние)
4. Концентрация напряжений

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Тонкая прямоугольная пластина с размерами $2a$; a=5 (см) по длине и $2b$; b=2 (см) по ширине и толщиной 0.1 (см) имеет в центре отверстие радиуса R=0.25 (см) (Рис. 1). Пластина выполнена из упругого изотропного материала с модулем Юнга $E=2\cdot10^6$ (кГ/см^2) и коэффициентом Пуассона ν=0,3. Пластина растягивается распределенной нагрузкой интенсивности $p=10^3$ (кГ/см^2), действующей на ее левую и правую грани. Требуется определить максимальные напряжения в пластине.

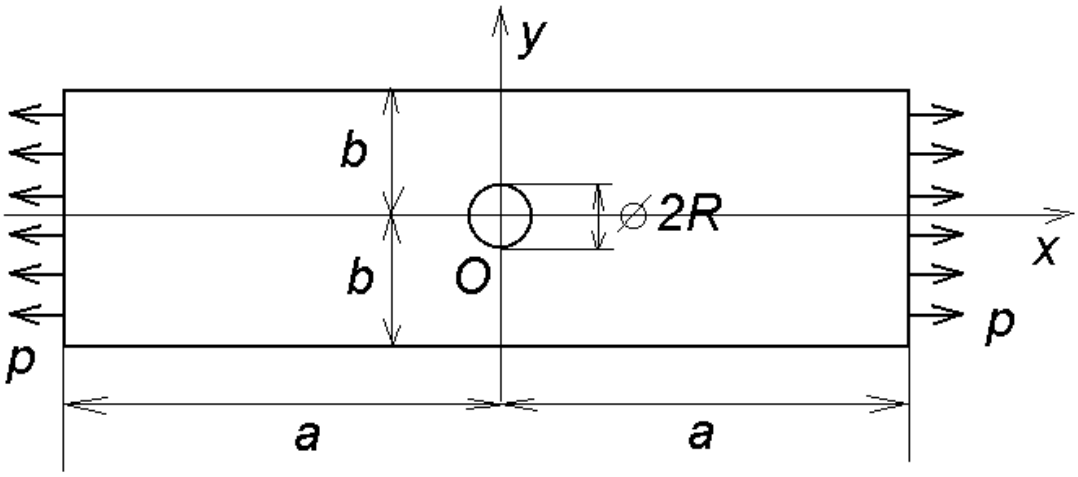


Рис. 1. Схема области

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отверстие вносит возмущение в однородное напряженное состояние одноосно растягиваемой пластины. В зоне, вблизи отверстия, происходит повышение напряжений, называемое концентрацией напряжений. Аналогичная задача для бесконечной пластины, одноосно растягиваемой на бесконечности равномерными нагрузками, называется задачей Кирша и является фундаментальной задачей теории упругости о концентрации напряжений. В задаче Кирша максимальные напряжения, равные $3p$, возникают в точке с координатами $(0, R)$ (см. рис.1) и являются тангенциальными напряжениями.

Поскольку поля напряжений, деформаций и перемещений являются существенно неоднородными около отверстия, то для получения приемлемой точности конечно-элементных расчетов при построении конечно-элементных сеток следует задавать параметры, обеспечивающие сгущение разбиений вблизи отверстия.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При плоском напряженном состоянии перемещения пластины в области Ω, принадлежащей плоскости xy, можно характеризовать вектором перемещений $\underline{U}=\{U_x, U_y\}=\{U, V\}$, где $U=U(x, y)$, $V=V(x, y)$. Компоненты ε_{xx}, $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}$, ε_{yy} тензора деформаций $\underline{\underline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{pmatrix}$, выражаются через поле перемещений $\underline{U}$ по формулам

$$S_{xx}=\varepsilon_{xx}=\partial U/\partial x; \qquad S_{yy}=\varepsilon_{yy}=\partial V/\partial y; \tag{1}$$
$$S_{xy}=\varepsilon_{xy}=(\partial U/\partial y+\partial V/\partial x)/2$$

Определяющие соотношения, связывающие механические напряжения и деформации в упругой изотропной среде при плоском напряженном состоянии, имеют вид

$$\begin{aligned} T_{xx}&=\sigma_{xx}=\lambda^*(S_{xx}+S_{yy})+2\mu\, S_{xx}\\ T_{yy}&=\sigma_{yy}=\lambda^*(S_{xx}+S_{yy})+2\mu\, S_{yy}\\ T_{xy}&=\sigma_{xy}=2\mu\, S_{xy}\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \tag{3}$$

$$\lambda=\frac{\nu\, E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{pmatrix}$ – тензор напряжений, σ_{xx}, $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$, σ_{yy} - компоненты тензора напряжений.

Коэффициенты λ и μ из (4) называются коэффициентами Ламе, коэффициент μ часто обозначается также через G и имеет смысл модуля сдвига. Модуль E из (4) называется модулем Юнга, а ν – коэффициентом Пуассона.

Уравнения равновесия упругой среды в плоской задаче имеют вид

$$\partial T_{xx}/\partial x+\partial T_{xy}/\partial y=0 \tag{5}$$

$$\partial T_{xy}/\partial x+\partial T_{yy}/\partial y=0 \tag{6}$$

Подстановка в (5), (6) определяющих соотношений (2) и формул (1) приводит к эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно неизвестных функций перемещений U и V. К этой системе следует добавить граничные условия на границе $\Gamma=\partial\Omega$

области. Основными видами граничных условий в теории упругости являются следующие условия. Пусть граница Γ разбита на два подмножества: Γ_u и Γ_σ. На части границы Γ_u считаются известными компоненты вектора перемещений

$$U = U_*, \qquad V = V_*, \qquad \{x, y\} \in \Gamma_u \tag{7}$$

На участке Γ_σ задается вектор напряжений $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$

$$T_{xx} n_x + T_{xy} n_y = p_x \qquad T_{xy} n_x + T_{yy} n_y = p_y, \qquad \{x, y\} \in \Gamma_\sigma \tag{8}$$

где $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ – вектор внешней единичной нормали к границе Γ.

Граничные условия (7) носят следующие наименования: граничные условия в перемещениях, граничные условия 1-ого рода, условия типа Дирихле, главные граничные условия. Обычно в (7) $U_* = 0$, $V_* = 0$, что соответствует жесткому закреплению участка границы Γ_u.

Аналогично, граничные условия (8) имеют следующие наименования: граничные условия в напряжениях, граничные условия 2-ого рода, условия типа Неймана, естественные граничные условия. При однородных граничных условиях (8), когда $p_x = 0$, $p_y = 0$, участок Γ_σ границы называется участком, свободным от напряжений. Вектор напряжений $\mathbf{p} = \{p_x, p_y\}$, как векторная функция от x, y, может включать сосредоточенные векторы $\mathbf{F} = \{F_x, F_y\}$, которые имеют смысл сосредоточенных сил.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ANSYS

Для решения задачи о растяжении пластины необходимо использовать элементы для структурного анализа (Structural analysis). Такие элементы будут иметь степени свободы (Degrees of Freedom) UX, UY, UZ – перемещения в каждом узле. Конечные элементы для трехмерного моделирования называются Solid (твердотельные). Поскольку упругая пластинка является тонкой, и все воздействия производятся по ее тонким торцевым граням, то можно рассматривать задачу о растяжении пластинки в условиях плоского напряженного состояния, то есть свести задачу к двумерной (см. рис. 2). Для двумерного моделирования тонкой пластины можно рассматривать плоские (Plane) либо оболочечные (Shell) конечные элементы для структурного анализа.

Двумерные элементы могут иметь вид треугольника или четырехугольника. Трехмерные элементы могут иметь такие формы как тетраэдр, призма, гексаэдр. На рис. 3 показаны линейные элементы (без промежуточных узлов) и квадратичные элементы (с промежуточными узлами).

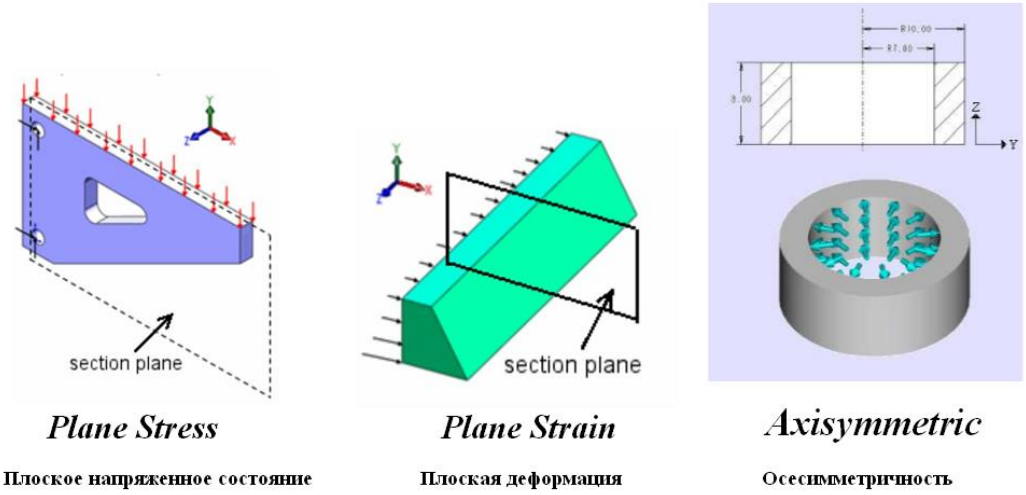


Рис. 2 Двумерная постановка задачи

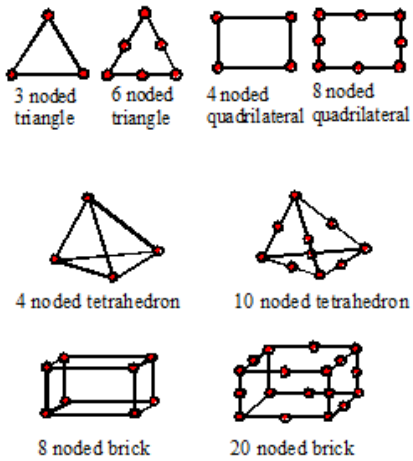
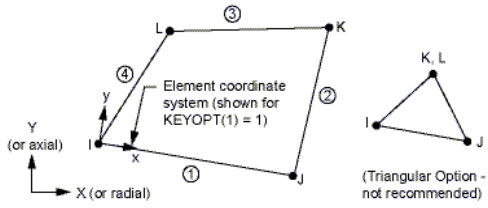
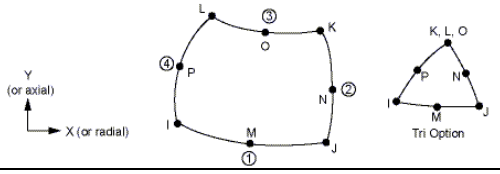
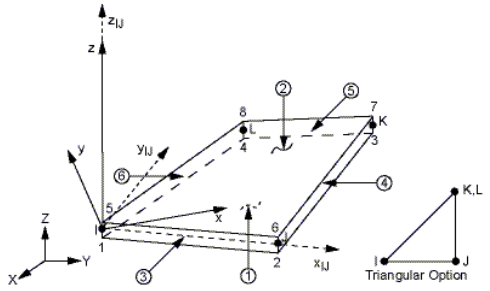
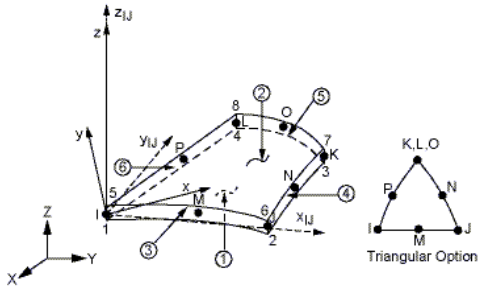
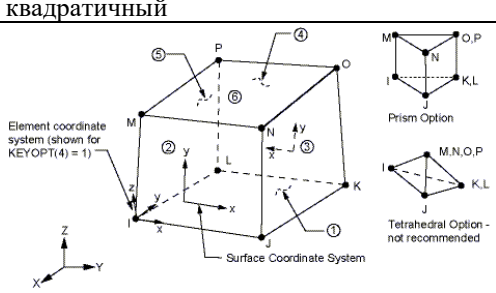
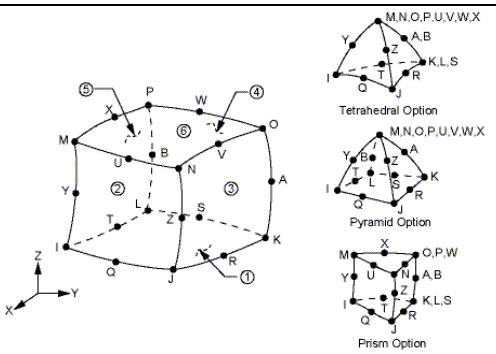
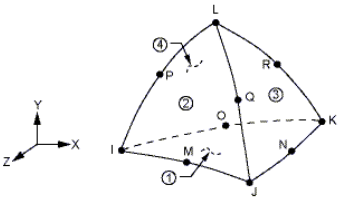


Рис. 3. Виды линейных и квадратичных двумерных и трехмерных конечных элементов

В таблице ниже приведены основные элементы для линейного структурного анализа.

Таблица 1. Некоторые элементы для структурного анализа (степени свободы – перемещения)

Типы элементов	**Название элемента**	**Вид, количество узлов, степень аппроксимации**	**Степени свободы, поведение**
Двумерные плоские конечные элементы	**PLANE42, 182** 2-D Structural Solid	 4 узла линейный	**UX, UY** **KEYOPT(3)** Element behavior: **0 -** Plane stress **1 -** Axisymmetric **2 -** Plane strain **3 -** Plane stress with thickness input
	PLANE82, 183 2-D 8-Node Structural Solid	 	**UX, UY** **KEYOPT(3)** Element behavior: **0 -** Plane stress

		8 узлов квадратичный	**1 -** Axisymmetric **2 -** Plane strain **3 -** Plane stress with thickness input
Оболочечные конечные элементы	**SHELL63, 181** Elastic Shell	 4 узла линейный	**UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ** KEYOPT(1) Element stiffness: 0 -- Bending and membrane stiffness 1 -- Membrane stiffness only 2 -- Bending stiffness only
	SHELL93, 281 8-Node Structural Shell	 8 узлов квадратичный	**UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ**
Трехмерные конечные элементы	**SOLID45, 185** 3-D Structural Solid	 8 узлов линейный	**UX, UY, UZ**
	SOLID95, 186 3-D 20-Node Structural Solid	 20 узлов квадратичный	**UX, UY, UZ**
	SOLID92, 187 3-D 10-Node Tetrahedral Structural Solid	 10 узлов, квадратичный	**UX, UY, UZ**

1. Решение задачи в плоской постановке с использованием элемента PLANE и результаты расчетов

Пример решения задачи в плоской постановке содержится в файле St2LS_plane.inp.

В файле St2LS_plane.inp содержатся команды. После выполнения этого файла в ANSYS (File → Read Input from…) требуется провести постпроцессорную обработку полученных результатов.

Построение твердотельной и конечно-элементной модели

Заметим, что геометрия пластины и граничные условия обладают свойствами симметрии относительно центральных осей пластинки x и y (см. Рис.1), поэтому можно решать задачу для четверти области с заданием условий симметрии на соответствующих гранях.

Следующий фрагмент файла St2LS_ plane.inp демонстрирует технику решения задачи о растяжении упругой пластинки **в условиях плоского напряженного состояния** в APDL ANSYS. Здесь можно использовать линейных 4-узловой элемент **PLANE182** или квадратичный 8-узловой четырехугольный элемент **PLANE183** (с промежуточными узлами).

Сначала строится твердотельная модель пластины – плоская область. Затем команда **AMESH** строит конечно-элементное разбиение полученной области.

```
/TITLE, Plane Stress tension of an elastic plate with a hole
/PREP7
! В силу симметрии задачи рассматривается четверть пластинки
A=5  ! Длина четверти пластинки
B=2  ! Ширины четверти пластинки
R=0.25    ! Радиус отверстия
H=0.1     ! Толщина пластинки
P=1e3     ! Величина растягивающей нагрузки  (кГ/см^2)
MP,EX,1,2e6    ! Модуль Юга EX=2*10+6  (кГ/см^2)
MP,NUXY,1,0.3  ! Коэфициент Пуассона NUXY=0.3

!-------------------------------------------------------------
ET,1,PLANE183   !  Восьмиузловой  плоский  КЭ  PLANE183  для структурного анализа (четырехугольник с промежуточными узлами)
!Степени свободы:  UX, UY, по умолчанию - плоское напряж. состояние)
!-----------------------------------------------------------

K,1,0,0   ! Определение граничных точек четверти пластинки
K,2,A,0
K,3,A,B
K,4,0,B
A,1,2,3,4 ! Определение площади 1 по точкам
APLOT,1   ! Показ площади 1

PCIRC,R   ! Определение круга радиуса R с центром в центре рабочей плоскости
```

```
ASBA,1,2  ! Вычитание из площади 1 площади 2 (круга)
APLOT,ALL ! Показ четверти пластины с отверстием

! Задание параметров для построения сетки конечных элементов
KESIZE,ALL,B/4
KESIZE,5,R/5
KESIZE,6,R/5

AMESH,ALL       ! Построение сетки КЭ для площади 3
FINISH
```

На рис. 4 показаны построенная область А3 с нанесенными номерами областей и опорных точек. (Пункты меню Plot->Areas, для нумерации областей и точек PlotCtrls->Numbering->отметить Area numbers, Keypoint numbers).

На рис. 5 показаны линии, составляющие построенную область. Изображены номера линий и опорных точек. (Пункты меню Plot->Lines, для нумерации областей и точек PlotCtrls->Numbering->отметить Line numbers, Keypoint numbers).

На рис. 6 показаны полученные в результате конечно-элементного разбиения элементы и узлы. (Пункты меню Plot->Elements, Plot->Nodes).

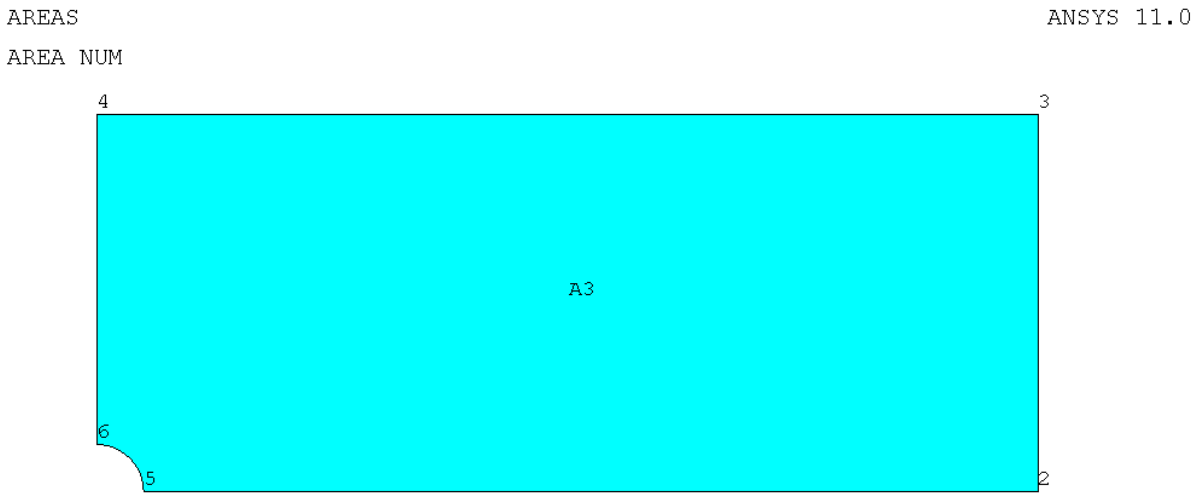


Рис. 4. Область с номерами опорных точек

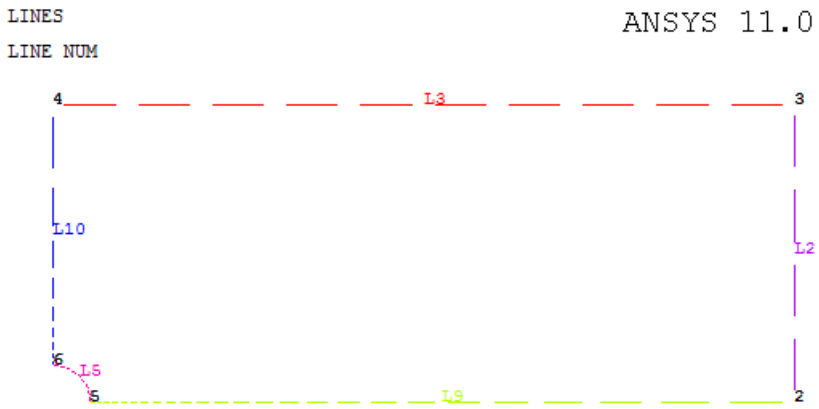


Рис. 5. Линии с номерами опорных точек

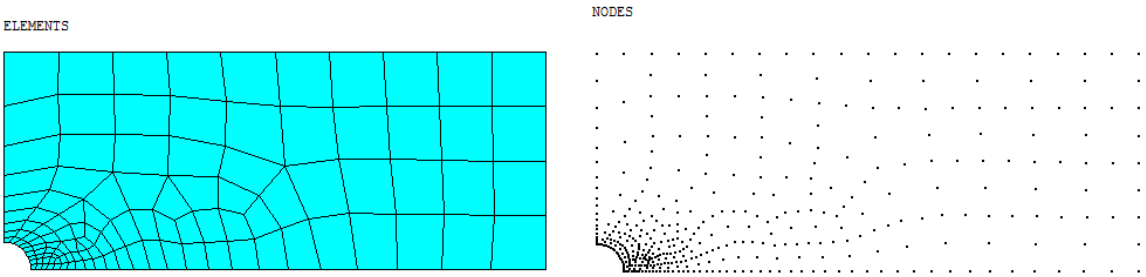


Рис. 6. Элементы PLANE183 и их узлы

Задание граничных условий для плоской задачи

По условию задачи пластина растягивается распределенной нагрузкой интенсивности $p=1\cdot10^3$ (кГ/см^2), действующей на ее левую и правую грани, а остальные грани считаются свободными от напряжений. Поскольку моделируется правая верхняя четверть пластины, то требуется поставить условия симметрии на линиях разреза и условие растягивающей распределенной нагрузки на правой грани. На оставшихся частях границы ничего задавать не нужно, т.к. это границы, свободные от механических напряжений. Это условие в Ansys действует по умолчанию.

Заметим, что граничные условия можно задать либо на сущности конечно-элементной модели (узлы и элементы), либо на сущности твердотельной модели (линии, области). Следует иметь в виду, что все «твердотельные» граничные условия будут преобразованы в «конечно-элементные» граничные условия на этапе решения задачи. При этом, «твердотельные» граничные условия на заданной линии имеют приоритет над «конечно-элементными» граничными условиями на узлах той же линии.

Приведем фрагмент кода из файла St2LS_plane.inp. Здесь растягивающая поверхностная нагрузка задается на узлы (сущности кэ-модели), а условие симметрии – на линии (сущности твердотельной модели). Закомментированные команды позволяют задать те же условия симметрии на узлы.

В примере правая грань лежит на прямой x=a, поэтому растягивающая поверхностная нагрузка задается на узлах с координатой x=a (PRES = -P, сжимающая будет с плюсом: PRES = P). В примере (см. рис. 1) условия симметрии нужно задать на левой границе (лежит на прямой x=0, ось OY - вертикальная) и нижней границе (лежит на прямой y=0, ось OX - горизонатальная). Условие симметрии на вертикальной оси OY (x=0) означает запрет перемещений по горизонтали, т.е. UX=0. Условие симметрии на горизонтальной оси OX (y=0) означает запрет перемещений по вертикали, т.е. UY=0.

```
/SOLU
ANTYPE,STAT           ! Решение статической задачи.
NSEL,S,LOC,X,A   ! Выбор всех узлов с координатой X=A
SF,ALL,PRES,-P   ! Для всех выбранных узлов растягивающая поверхностная
нагрузка PRES = -P
NSEL,ALL         ! Вернуться к выбору всех узлов модели
DL,9,,SYMM       ! Условие симметрии на линии 9 (линии с Y=0)
```

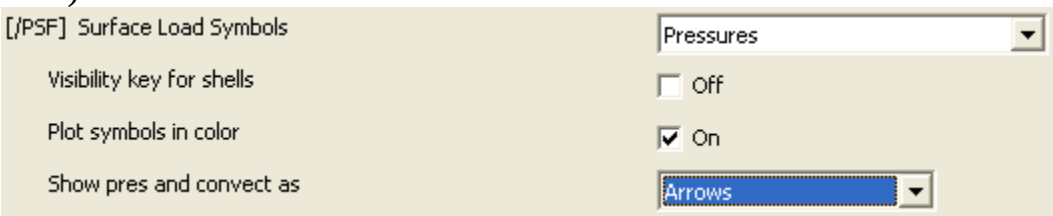
```
DL,10,,SYMM      ! Условие симметрии на линии 10 (линии с X=0)

! ******************************************************
! Для плоского КЭ со степенями свободы UX, UY условия симметрии на линиях 9
и 10 здесь
! эквиваленты следующим командам
! УСЛОВИЯ СИММЕТРИИ НА ЛИНИЯХ 1/4 ПЛАСТИНЫ
!NSEL,S,LOC,X,0
!D,ALL,UX,0
!NSEL,S,LOC,Y,0
!D,ALL,UY,0
!NSEL,ALL
! ******************************************************

SOLVE            ! Решить систему МКЭ
FINISH
```

Команды D и DL задают ограничения на степени свободы: команда D – на узлах, команда DL – на линиях. Команды SF и SFL задают поверхностную нагрузку: команда SF – на узлах, команда SFL – на линиях.

Заметим, что узлы можно выбирать как по координатам, так и по линиям, на которых они находятся. Например, в модельной задаче правая грань – это линия L2 (см. рис. 3). Тогда поверхностную нагрузку можно задать следующим образом:

```
LSEL,S,LINE,,2   ! Выбор линии 2
NSSL,S,1 ! Выбор узлов, лежащих на выбранной линии
! 2й аргумент команды NSSL - ключ выбора узлов на линии (здесь 1 - выбор
внутренних и внешних узлов (концов линии); 0 - выбор только внутренних
узлов)
SF,ALL,PRES,-P   ! Для всех выбранных узлов поверхностная нагрузка PRES = -
P
```

Получающаяся конечно-элементная модель вместе с принятыми граничными условиями показана на рис. 7. (Пункты меню Plot->Elements, для отображения граничных условий PltCtrls->Symbols->отметить All applied BC, выбрать изображение условий распределенной нагрузки: Surface Load Symbols->Pressures)



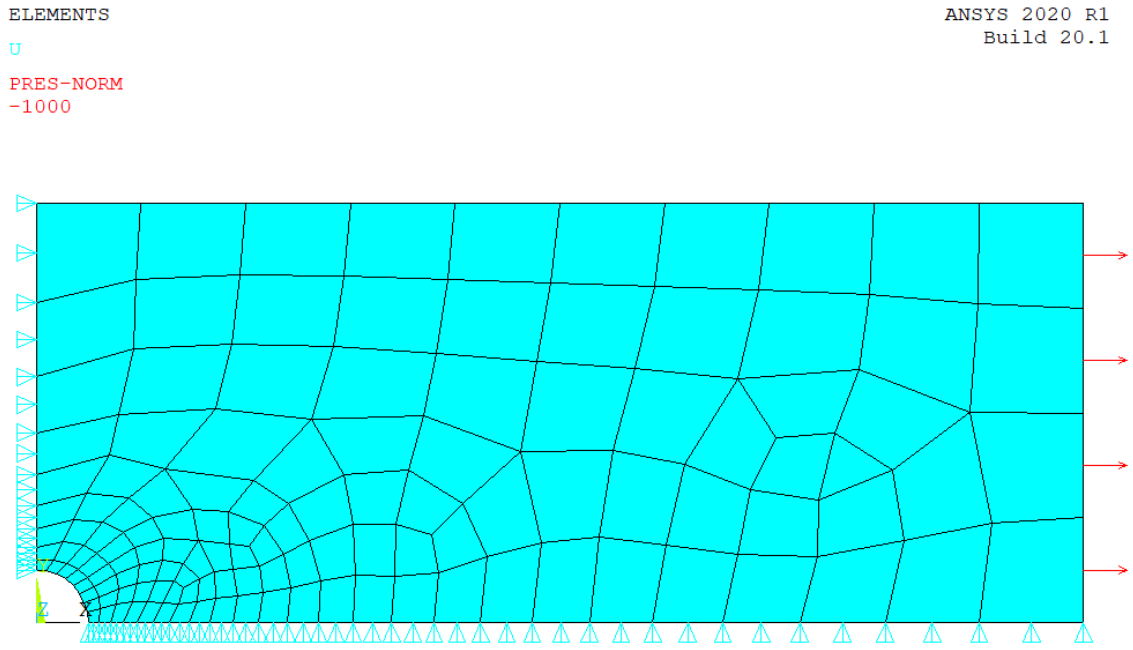


Рис. 7. Конечно-элементная сетка с граничными условиями

Анализ результатов расчетов для плоской задачи

Выведем деформированную форму пластины (рис. 8): пункты меню General Postproc → Plot Results → Deformed shape → Def + undef edge (деформированная сетка в сравнении с недеформированным краем).

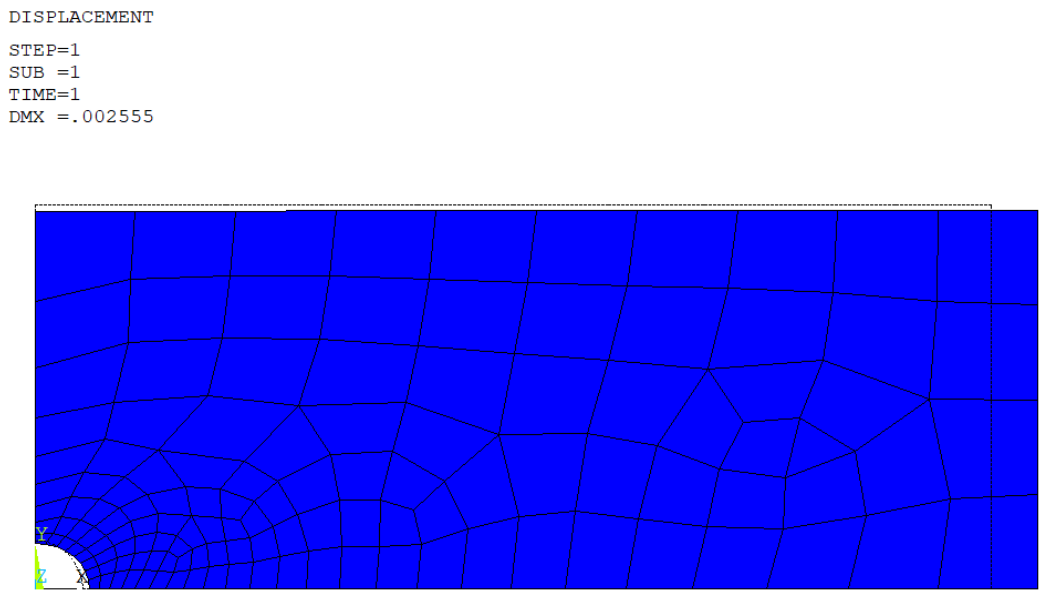


Рис. 8. Деформированная форма пластины (деформированная сетка в сравнении с недеформированным краем)

В качестве результатов расчетов можно привести картины распределения осевых перемещений U_x (рис. 9), осевых напряжений T_{yy} (рис. 10) и окружных (тангенциальных) напряжений $T_{\theta\theta}$ (рис. 11).

Пункты меню для изображения картины распределения перемещений U_x: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → DOF Solution → X-Component of displacement.

Пункты меню для изображения картины распределения напряжений T_{yy}: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Stress → Y-Component of stress.

Пункты меню для изображения картины распределения тангенциальных напряжений $T_{\theta\theta}$ (координата y соответствует координате θ в глобальной цилиндрической системе координат): General Postproc → Options for Outp → Results coordinate system → Global Cylindrical; Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Stess →Y-Component of stress.

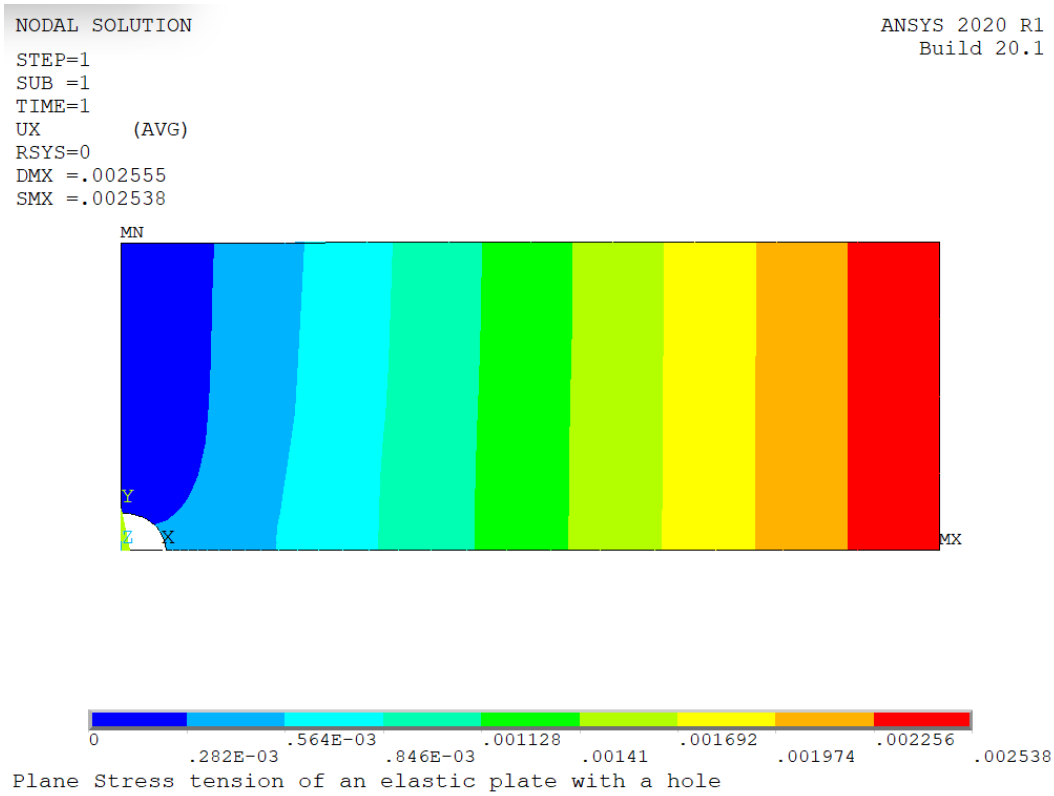


Рис. 9. Распределение перемещений u_x

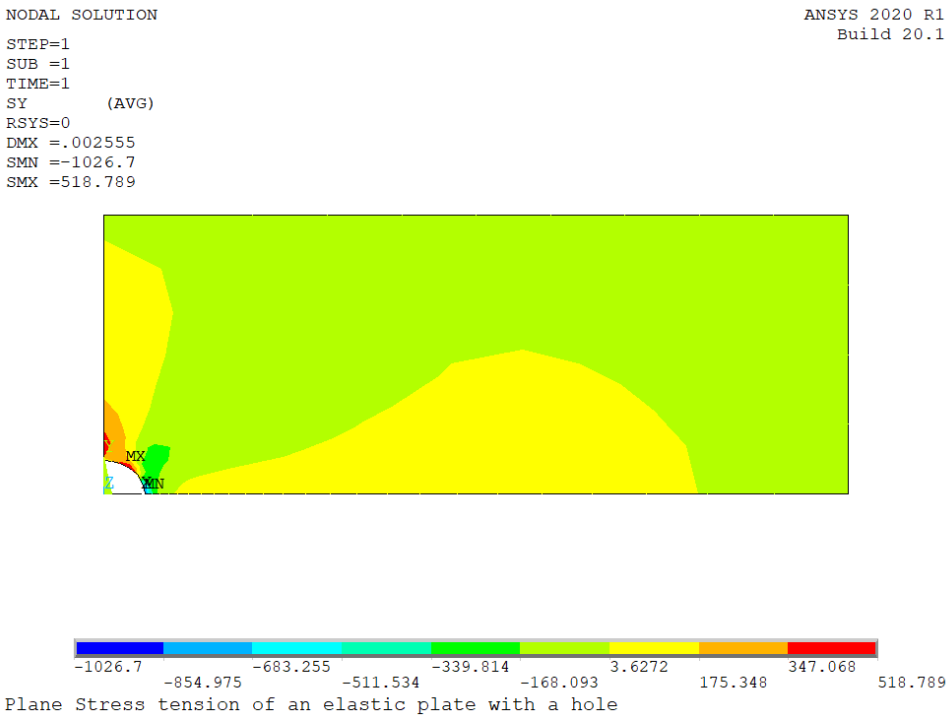


Рис. 10. Распределение осевых напряжений T_{yy}

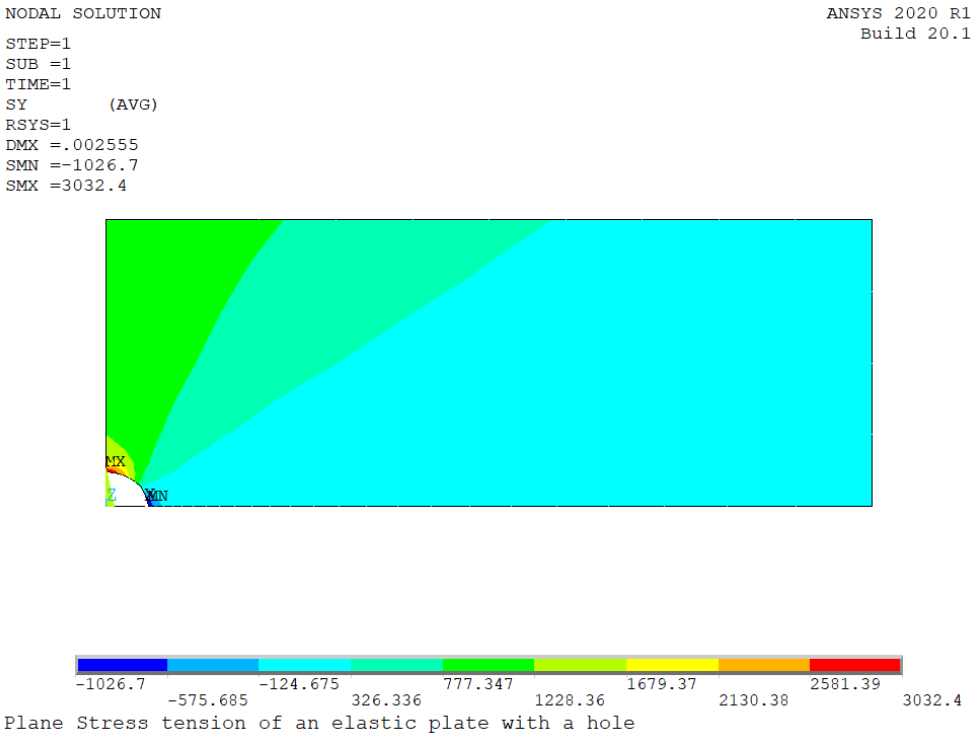


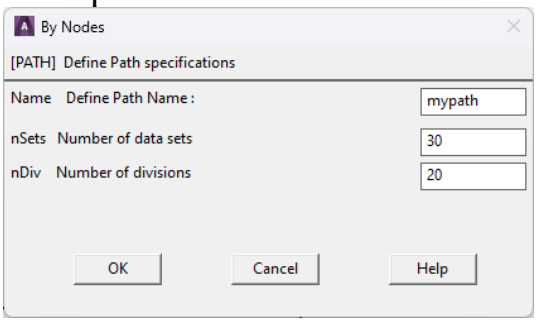
Рис. 11. Распределение тангенциальных напряжений $T_{\theta\theta}$

Как видно из рис. 10 и 11, отверстие является концентратором напряжений.

Для сравнения численного решения с аналитическим построим график тангенциальных напряжений вдоль пути (рис. 12), проходящего через точку максимума, а именно вдоль оси ординат от точки с координатами (0,R) до точки с координатами (0,b).

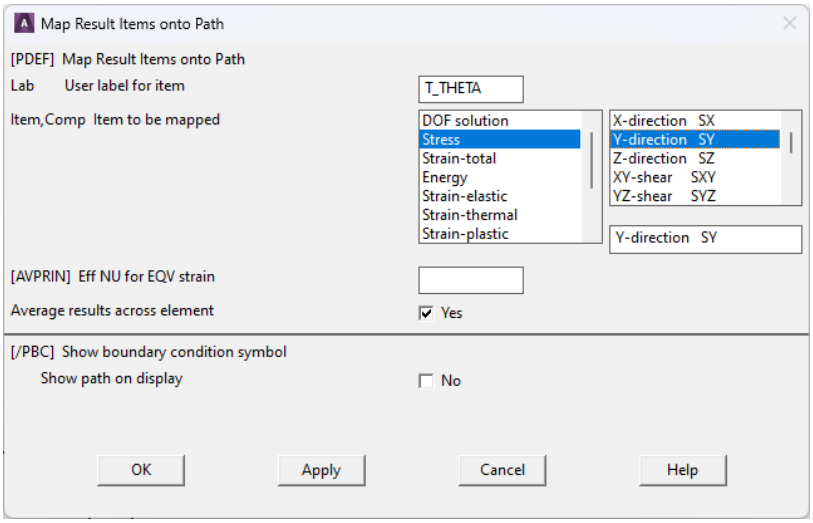
Для построения графика вдоль пути в интерактивном режиме нужно:

1) Задать точки, определяющие путь: вывести конечно-элементную сетку или узлы (в верхнем меню Plot → Elements или Plot → Nodes), затем в Main Menu выбрать General Postproc → Path Operations → Define Path → By Nodes и мышкой указать узлы в точках с координатами (0,R) и (0,b). В открывшемся окне ввести имя пути, например mypath:

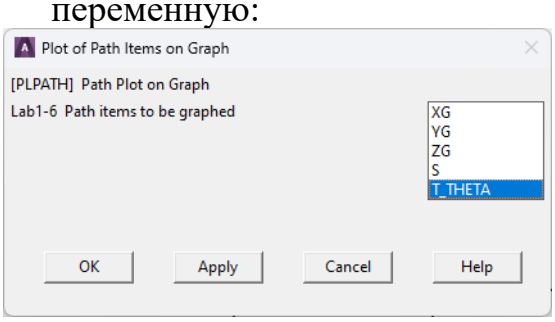


Переменная по оси абсцисс на графике будет расстоянием вдоль пути (Distance).

2) Определить, какую переменную выводить по оси ординат: General Postproc → Path Operations → Map onto Path и в открывшемся окне задать имя переменной и выбрать саму переменную. Для тангенциальных напряжений $T_{\theta\theta}$ зададим имя переменной T_THETA и выберем Stress, Y-direction SY.



3) Нарисовать график: General Postproc → Path Operations → Plot Path Item → On Graph и в открывшемся окне указать введенную ранее переменную:



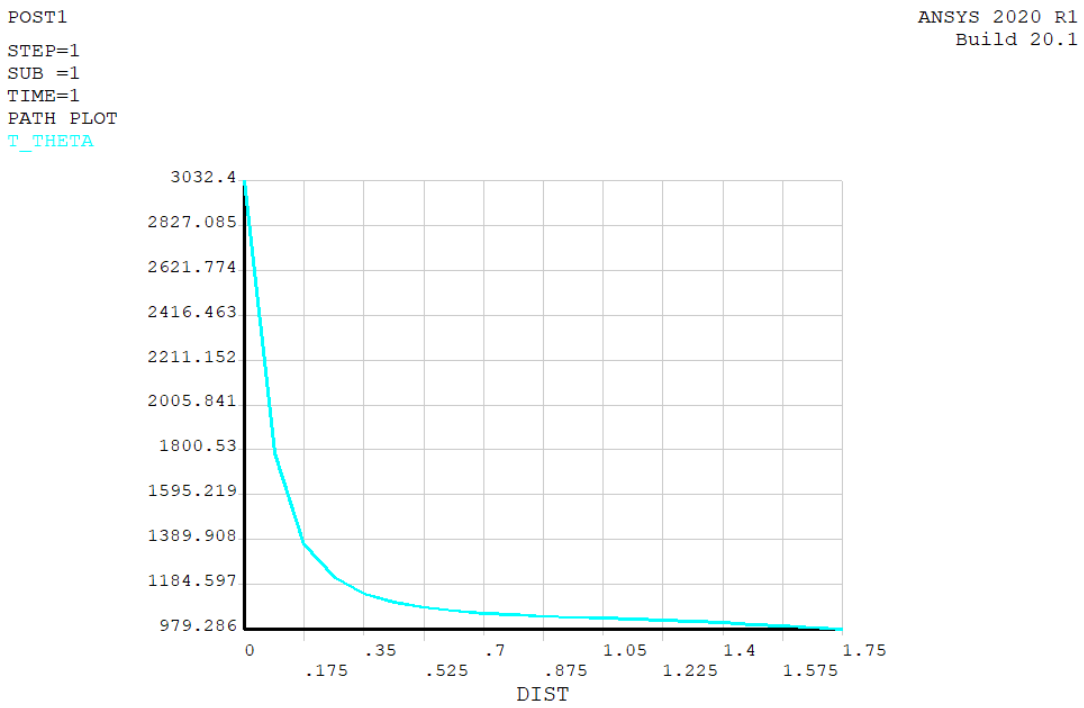


Рис. 12. График тангенциальных напряжений вдоль пути

Максимум напряжений получается в точке с координатами (0,R) $\sigma_{\theta\theta} = 3032$ (кГ/см^2). Таким образом, поскольку растягивающая нагрузка была равна p=1·10^3 (кГ/см^2), то напряжения в окрестности концентратора возрастают приблизительно в 3 раза.

Рис. 8-11 можно также вывести с помощью следующих команд постпроцессора:

```
/POST1
/PLOPTS,LOGO,OFF   ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде
/PLOPTS,FRAME,OFF  ! Не показывать рамку
/PLOPTS,DATE,OFF   ! Не показывать дату

SET,last ! Считывание результатов
PLDISP,2 ! Деформированная сетка с недеформированным краем
! Задержка для просмотра картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"

PLNSOL,U,X !  Вывод перемещений по оси X
*GET,UXMAX,PLNSOL,0,MAX ! UXMAX - максимальные перемещения по оси X

! Задержка для просмотра картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"
PLNSOL,S,Y ! Вывод осевых напряжений (в декартовой системе координат)

! Задержка для просмотра картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"
RSYS,1     !  Переход  в  цилиндрическую  систему  координат  для
представления результатов
PLNSOL,S,Y !  Вывод  тангенциальных  напряжений  (в  цилиндрической
системе координат)
```

Рис. 12 дают команды постпроцессора:

```
/POST1
! ******************************************************
! График тангенциальных напряжений T_Theta
! вдоль пути на оси OX от точки (0,R) до точки (0,B)
! Задержка для просмотра предыдущей картинки
*ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"
PATH,XX,2
PPATH,1,,0,R
PPATH,2,,0,B
PDEF,T_Theta,S,Y
PLPATH,T_Theta
!*****************************************************

RSYS,0     ! Возврат в декартовую систему координат для представления результатов
```

Имеет смысл обратить внимание на следующие команды: команду задержки ***ASK**, которая позволяет посмотреть одну из картинок перед выводом следующей; команду ***GET**, которая здесь помещает в параметр **UXMAX** значение максимального перемещения по оси X; команду **RSYS,1**, которая дает возможность выводить результаты в цилиндрической системе координат, и, таким образом, получать значения $\sigma_{\theta\theta}$; и команды **PATH, PPATH, PDEF, PLPATH**. Последние команды позволяют получить <u>график поведения какой-либо величины вдоль определенного геометрического пути</u>.

2. Решение задачи в пространственной постановке

В предыдущем подразделе задача о растяжении тонкой пластинки решалась как плоская с использованием гипотез о плоском напряженном состоянии. В МКЭ можно с успехом решать трехмерные задачи, а поэтому здесь интересно решить трехмерную задачу для данной пластинки и сравнить полученные результаты.

В данном примере для трехмерного моделирования будет рассматриваться 1/8 часть пластины.

Для расчета растяжения пластинки с отверстием в трехмерной постановке предназначен файл St3LS_solid.inp. Он достаточно похож на St2LS_plane.inp. Отличие состоит в том, что вместо областей строятся объемы:

```
V,1,2,3,4,5,6,7,8 ! Объем (прямоугольный параллелепипед) по 8 вершинам

CYLIND,R,,H/2 ! Цилиндр радиуса R и длины H/2

VSBV,1,2   ! Вычитание из объема 1 объема 2 (цилиндра)
VPLOT,ALL  ! Показ одной восьмой части пластины с отверстием
```

Сгущение конечно-элементной сетки задается вблизи четырех опорных точек отверстия:

```
! Задание параметров для построения сетки конечных элементов
```

```
KESIZE,ALL,B/4
KESIZE,10,R/5
KESIZE,13,R/5
KESIZE,12,R/5
KESIZE,14,R/5
```

Объем произвольной формы всегда можно разбить на конечные элементы с помощью квадратичных тетраэдров (с промежуточными узлами). В этом случае для разбиения объемов заданными трехмерными тетраэдральными элементами используется стандартная команда генерации сетки VMESH, например:

```
!-----------------! Тетраэдральная сетка
!ET,1,SOLID92  ! 10-узловой тетраэдральный КЭ теории упругости
VMESH,ALL ! Разбить все объемы на конечные элементы
```

Полученная конечно-элементная сетка с тетраэдральными элементами SOLID92 показана на рис. 14. Здесь видно, что для данного разбиения сетка получается довольно грубая сетка по толщине пластины.

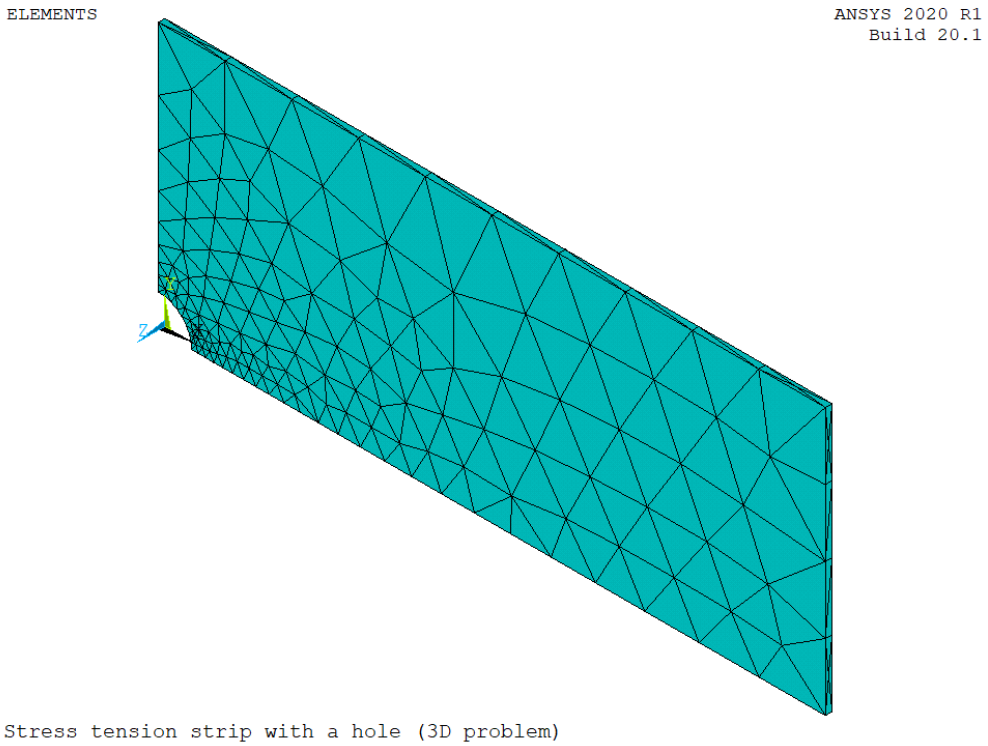
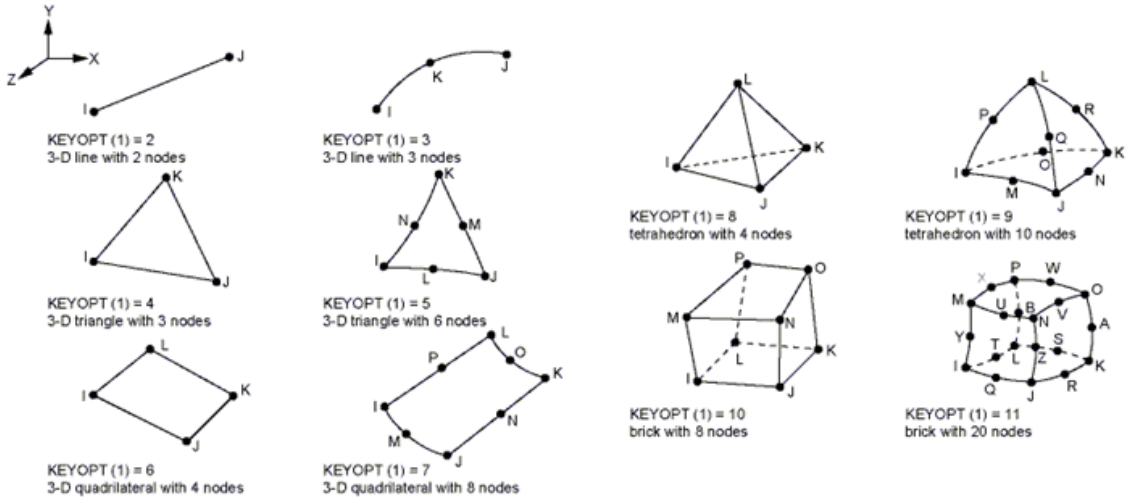


Рис. 14. Конечно-элементная сетка с тетраэдральными элементами в трехмерной задаче

Если же форма трехмерной фигуры позволяет построить каноническое (регулярное) разбиение гексаэдрами, то это можно сделать с помощью протягивания вспомогательной двумерной конечно-элементной сетки вдоль объема (получение гексаэдров из четырехугольников). Для этого используется вспомогательный геометрический конечный элемент, который не имеет степеней свободы, а служит только для задания геометрии сетки. С помощью MESH200 разбивается исходная плоская область. Следует указать форму этого элемента, задав значение опции keyopt1 (см. рисунок). Затем для создания трехмерного

конечно-элементного разбиения в результате протягивания полученной двумерной сетки вдоль объема используется команда **VSWEEP**.

Геометрия элемента MESH200




```
!-----------! Гексаэдральная сетка с линейными элементами (без
промежуточных узлов)
!et,1,SOLID45 ! Задать КЭ типа 1: основной элемент
! SOLID45 - 3D 8-узловой элемент для структурного анализа, степени свободы:
ux,uy,uz (перемещения)
!ET,2,MESH200,6 ! Задать КЭ типа 2: вспомогательный четырехугольный 4-
узловой (параметр 6) КЭ - только для геометрии сетки
!MSHAPE,0 ! Разбиение на четырехугольники

!-----------! Гексаэдральная сетка с квадратичными элементами (с
промежуточными узлами)

et,1,SOLID95 ! Задать КЭ типа 1: основной элемент
!SOLID95 – 3D 20-узловой элемент для структурного анализа с промежуточными
узлами, степени свободы: ux,uy,uz (перемещения)
ET,2,MESH200,7 ! Задать КЭ типа 2: вспомогательный четырехугольный 8-
узловой (параметр 7) КЭ  - только для геометрии сетки
MSHAPE,0 ! Разбиение на четырехугольники
!-------------------------------------------------------

TYPE,2 ! Выбрать тип КЭ для разбиения плоской области (вспомогательный КЭ)
!Выбрать исходную двумерную область
ASEL,S,LOC,Z,0
!Разбить эту область вспомогательным элементом
AMESH,ALL
TYPE,1 ! Выбрать тип КЭ для разбиения объемов (основной КЭ)
! Протянуть разбиение плоской области вдоль объема и получить трехмерную
сетку
VSWEEP,ALL
ASEL,ALL
FINISH
```

Полученная конечно-элементная сетка с гексаэдральными элементами SOLID95 показана на рис. 15.

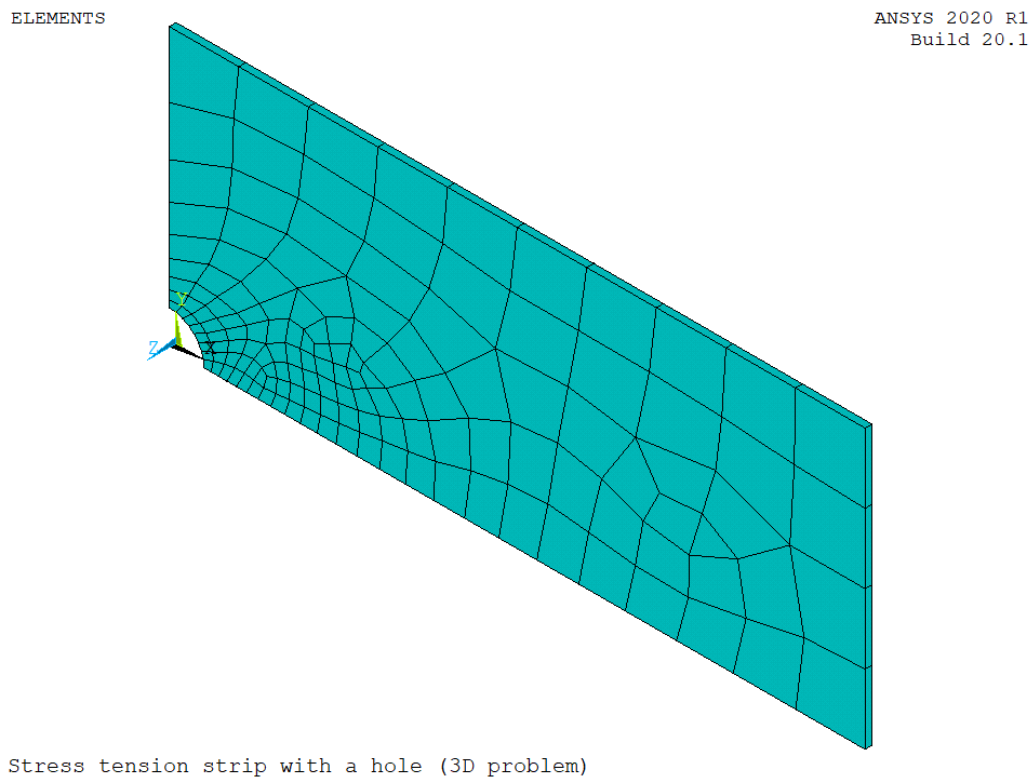


Рис. 15. Конечно-элементная сетка с гексаэдральными элементами в трехмерной задаче

В решателе снова зададим растягивающую поверхностную нагрузку на узлы, а условие симметрии – на области симметрии (их будет три). Закомментированные команды позволяют задать те же условия симметрии на узлы.

```
/SOLU
ANTYPE,STAT          ! Решение статической задачи.
NSEL,S,LOC,X,A        ! Выбор всех узлов с координатой X=A
SF,ALL,PRES,-P  ! Для всех выбранных узлов поверхностная нагрузка
PRES = -P
NSEL,ALL   ! Вернуться к выбору всех узлов модели
DA,11,SYMM
DA,12,SYMM
DA,14,SYMM

! ******************************************************
! Для трехмерного КЭ со степенями свободы UX, UY, UZ условия
симметрии на областях 11, 12 и 14 здесь
! эквиваленты следующим командам
! УСЛОВИЯ СИММЕТРИИ НА ГРАНЯХ 1/8 ПЛАСТИНЫ
!NSEL,S,LOC,X,0
!D,ALL,UX,0
!NSEL,S,LOC,Y,0
!D,ALL,UY,0
!NSEL,S,LOC,Z,0
!D,ALL,UZ,0
!NSEL,ALL  ! Вернуться к выбору всех узлов модели

SOLVE            ! Решить систему МКЭ
```

Если для препроцессора и решателя имеются некоторые отличия по сравнению с файлом St2LS_plane.inp, связанные с трехмерностью пластинки, то команды постпроцессора могут быть взяты теми же самыми, что и для плоской задачи.

В результате расчетов получим аналогичные характеристики решения. Например, график поведения осевых напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль оси X=0 для расчетов с гексаэдральными квадратичными элементами приведен на рис. 16.

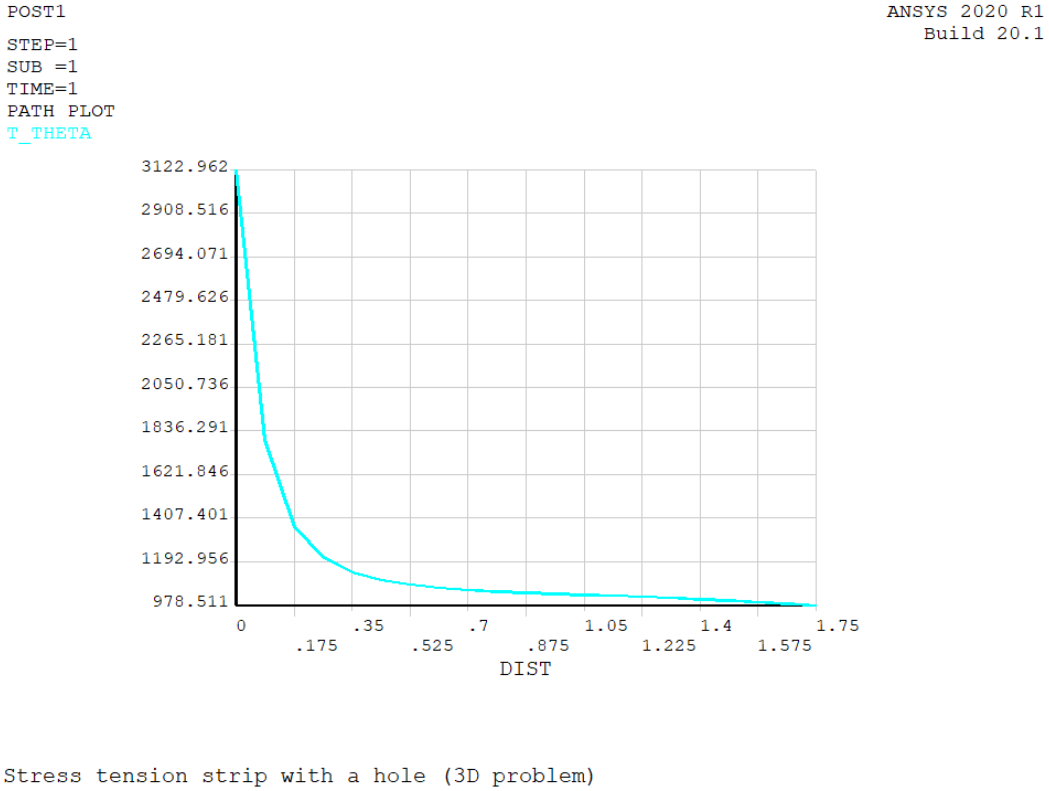


Рис. 16. График тангенциальных напряжений в трехмерной задаче

Как можно видеть из рис. 16, осевые напряжения в точке концентрации в трехмерной задаче есть $\sigma_{\theta\theta} = 3122$ (кГ/см^2), тогда как для плоской задачи ранее было получено $\sigma_{\theta\theta} = 3032$ (кГ/см^2). Эти значения достаточно близки, что свидетельствует о применимости модели плоского напряженного состояния для рассматриваемой геометрии пластинки и условий ее нагружения.