УМФ
Лекция 3
1-й семестр – осень 2018 г
Уравнения Хопфа и эйконала

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

3 сентября 2018 г.

1-график и УрЧП 1-го порядка

Напоминание: $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\mathcal{J} = \mathcal{J}(D) = \mathbb{R}^n \times D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ – область 1-струй, $\pi : (p, q, z) \mapsto q$ – каноническая проекция $\mathcal{J}(D) \to D$.

Введём ещё проекцию $\pi_1 : \mathcal{J}(D) \to D \times \mathbb{R}$, $\pi_1 : (p, q, z) \mapsto (q, z)$.

Определение 1. 1-графиком функции $u = u(q)$, $q \in D \subset \mathbb{R}^n$, называется множество

$$\mathrm{Gr}_1(u) = \{(p, q, z) \in \mathcal{J}(D) : \ z = u(q), \ p = \nabla u(q)\}. \tag{1}$$

$\mathrm{Gr}_1(u)$ – образ области D при отображении

$$G_1^u : q \mapsto (\nabla u(q), q, u(q)). \tag{2}$$

Отображение (2) называют отображением 1-графика.

Пример 1. 1-график линейной функции одной переменной $u(q) = kq$ – прямая в $\mathbb{R}^3$ параметризованная отображением 1-графика $G_1^u : q \mapsto (k, q, kq)$. Её проекция на плоскость (q, z) вдоль оси p дает график u – прямую $z = kq$.

1-график решения уравнения $F(\nabla u, q, u) = 0$ вложен в $2n$–мерную «поверхность» $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}(D)$, непараметрически заданную равенством $\{F(p, q, z) = 0\}$.

В литературе 1-график решения УрЧП порядка 1 часто рассматривается как частный случай «лежандровых многообразий» или «интегральных многообразий». Последние включают лежандровы как частный случай.

1-график и каноническая проекция.

Пусть $h : D \to \mathcal{J}(D)$ отображает D на $\Gamma = h(D)$ взаимно-однозначно. Тем не менее, образ Γ непредставим, вообще говоря, в виде 1-графика. Причины этого таковы.

Необходимо,чтобы отображение $\pi : \Gamma \to D$ было взаимно-однозначным (см. рис 1). В таком случае определена функция $u = u(q)$, такая, что $z = u(q)$ всюду на Γ; именно,

$$u(q) = z(\pi^{-1}(q)), \ q \in D, \ \pi^{-1}(q) \in \Gamma. \tag{3}$$

Тогда $\Gamma = \{(p, q, z) : z = u(q)\}$, и проекция $\pi_1\Gamma = \{(q, u(q))\}$ – график u. Одного этого недостаточно, чтобы $\Gamma = \mathrm{Gr}_1(u)$. Необходимо ещё, чтобы

$$\forall\, (p, q, z) \in \Gamma \ \ p = \nabla u(q) \text{ где } u \text{ – функция (3).} \tag{4}$$

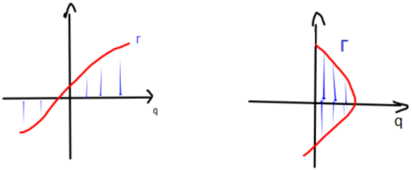

Рис. : 1. Слева – проекция кривой на ось q однозначна, справа – нет

Примеры 1-графиков и не 1-графиков.

Пример 2. $n = 1$, $h : q \mapsto (q, 0, q)$. $\Gamma = h(D)$ – биссектрисса угла $\widehat{pz}$, $\pi(\Gamma) = \{0\}$, так что Γ не представима в виде 1-графика какой-либо функции $u = u(q)$, и проекция $\pi_1\Gamma$ не представима в виде графика какой-либо функции $u = u(q)$.

Пример 3. $n = 1$, $h : q \mapsto (0, q, q)$. $\Gamma = h(D)$ – биссектрисса угла $\widehat{qz}$, $\pi(\Gamma) = \{q,\ q \in \mathbb{R}\}$, так что проекция $\pi_1\Gamma$ – график функции $u = q$, но $\Gamma \neq \mathrm{Gr}_1(u)$, так как $p \equiv 0 \neq u'(q) \equiv 1$.

Замечание 1. Кривая $q = z^3$ однозначно проектируется на ось q. Соответствующая функция (3) имеет вид $\sqrt[3]{q}$, то есть, недифференцируема, хотя и непрерывна. Такого рода эффекты также могут препятствовать представлению поверхности, вложенной в область 1-струй, в виде 1-графика.

Пусть задана функция $F : \mathcal{J}(D) \to \mathbb{R}$, и

$$\mathcal{E} = F^{-1}(0) = \{(p, q, z) :\ F(p, q, z) = 0.\} \tag{5}$$

Предположим, что

$$F_z^2(J) + F_p^2(J) \neq 0\ \forall J = (p, q, z) \in \mathcal{E}. \tag{6}$$

Замечание 1. Предположение (6) необходимо для существования гладкой функции (3) в окрестности точки $\pi(J)$.

Теорема об 1-графике и решение УрЧП 1-го порядка

Теорема 1. Пусть контактная функция F определяет характеристический поток $f(\cdot, s) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $|s| < t_0$. Пусть множество $\Gamma \subset \mathcal{E}$ обладает следующими свойствами
(i) Γ инвариантно относительно $f(\cdot, s)$, так что $f(\cdot, s) : \Gamma \to \Gamma \ \forall s : \ |s| < s_0$;
(ii) проекция $\pi : \Gamma \to D$ взаимно однозначна и функция u, определённая в (3), непрерывно дифференцируема. Тогда множество $\Gamma \cap \mathrm{Gr}_1(u)$ также инвариантно: $f(\cdot, s) : \Gamma \cap \mathrm{Gr}_1(u) \to \Gamma \cap \mathrm{Gr}_1(u), \ \forall\, t : \ |t| < s_0$.

Доказательство отложим.

Идея применения теоремы 1 к решению нелинейных УрЧП порядка 1 такова. Пусть $n = 2$, так что $D \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 1. Множество $\Sigma_{S,\varphi} \subset \mathcal{E}$ назовём начальным интегральным многообразием уравнения $\mathcal{E}$, если найдутся функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ и кривая $S \subset D$, такие, что $\Sigma_{S,\varphi} = \mathrm{Gr}_1(\varphi) \cap \mathcal{E}$ и $S = \pi(\Sigma)$.

Пусть $\Sigma_{S,\varphi}$ – начальное интегральное многообразие уравнения $\mathcal{E}$, рассмотрим множество $\Gamma = \bigcup\limits_s f(\Sigma_{S,\varphi}, s) \subset \mathcal{E}$ (рис. 2).

Γ удовлетворяет условию (i) теоремы 1, предположим оно удовлетворят и условию (ii) этой теоремы. Тогда $\Gamma = \mathrm{Gr}_1(u) \subset \mathcal{E}$, где u – функция (3) $\Longrightarrow$ u – решение.

Структура 1-графика решения

Замечание 2. Чтобы провести указанное построение, нужно, чтобы Г разбивалась на характеристические траектории, некасательно пересекающие начальную площадку $\Sigma_{S,\varphi}$, рис. 2. Если χ – одна из таких траекторий, и $\widetilde{J} \in \chi$, то

$$u(\pi(\widetilde{J})) = z(f(J,\tau)),\ J = \chi \cap \Sigma_{S,\varphi} = (\nabla\varphi(q), q, \varphi(q)), q \in S, \tau : f(J,\tau) = \widetilde{J}.$$

При этом $u = \varphi$ и $\nabla u = \nabla\varphi$ на S.

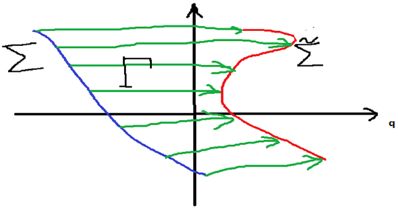

Рис. : 2. Устройство множества Г. Синим изображено начальное интегральное многообразие Σ. Зелёным изображены траектории характеристического потока. Они заметают 1-график функции, то есть, интегральное и одновременно лежандрово многообразие

Линейное уравнение с нелинейной точки зрения

Пример 4 – транспортное уравнение $\alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = 0$. Имеем $q = (x,y), p = (p^x, p^y)$, $\mathcal{E} = \{\alpha p^x + \beta p^y = 0\}$, Пусть задано интегральное многообразие $\Sigma_{S,\varphi} = \cup_{q\in S}\{(\nabla\varphi(q), q, \varphi(q))\}$, где $S = \{\Phi(q) = 0\}$. Рассмотрим площадку Γ, заметённую образами $\Sigma_{S,\varphi}$ при её переносе характеристическим потоком f. Выберем точку $\widetilde{J} \in \Gamma$, и пусть $\pi(\widetilde{J}) = (x,y)$. и соединим $\widetilde{J}$ с $J = \chi \cap \Sigma_{S,\varphi}$ характеристической траекторией χ. Общий вид характеристической системы транспортного уравнения с источником указан в примере 5 лекции 2, где в рассматриваемом случае следует положить $\gamma = 0$. Тогда $z \equiv \mathrm{const}$ на χ (что установлено ещё в лемме 1 лекции 1). Если при этом равенство (3) определяет функцию u, то

$$u(x,y) = u(\pi(\widetilde{J})) = z(\widetilde{J}) = z(J) = \varphi(X,Y),\ \pi(J) = (X,Y) \in S,$$

причём (x,y) и (X,Y) соединяет характеристика $\pi(\chi)$. Осталось найти эту характеристику и выразить выразить X, Y через (x,y). С этой целью отделяем уравнения характеристик $X' = \alpha(X,Y)$, $Y' = \alpha(X,Y)$ от характеристической системы (лекция 2, пример 5), находим параметрическое выражение $(X,Y) = (X,Y)(s)$ или первый интеграл $G(X,Y) = \mathrm{const}$, и далее следуем схемам, указанным в лекциях 1 или 2, соответственно.

Линейная задача Коши с нелинейной точки зрения.

Пусть S, $\psi = \psi(q)$ – заданные кривая и функция. Положим

$$\mathrm{Gr}(\psi, S) = \{(q, \psi(q)),\ q \in S\}. \tag{7}$$

Далее НИМ=начальное интегральное многообразие

Определение 1. Поднятием графика $\mathrm{Gr}(\psi, S)$ в УрЧП $\mathcal{E}$ порядка 1 назовём НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$ уравнения $\mathcal{E}$, такое что $\pi_1(\Sigma_{S,\varphi}) = \mathrm{Gr}(\psi, S)$; другими словами, $\varphi = \psi$ на S.

Пример 5 – задача Коши для транспортного уравнения $\alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = 0$. Предположим, известно поднятие некоторого графика $\mathrm{Gr}(\psi, S)$ в $\mathcal{E} = \{\alpha p^x + \beta p^y = 0\}$. Тогда применение общей процедуры приводит к алгоритму решения задачи Коши для транспортного уравнения, изложенному в лекции 1, см. также пример 5 лекции 2, где данные ψ, S взяты за начальные. Этот алгоритм непосредственно использует ТОЛЬКО значения ψ на S. Отсюда вывод: при вычислении решения задачи Коши для транспортного уравнения с данными S, ψ непосредственно используется только $\mathrm{Gr}(\psi, S)$, но НЕ конкретное выражение его поднятия в уравнение.

Однако, связь между общей нелинейной конструкцией и методом лекции 1 должна быть изучена. С этой целью рассмотрим построение поднятия 1-графика начальных данных в транспортное уравнение.

Поднятие начальных данных в транспортное уравнение

Пусть $S = \{\Phi(q) = 0\}$. Поднятие $\Sigma_{S,\varphi}$ ищем в виде

$$\Sigma_{S,\varphi} = \{(p, q, z) : \ q \in S, \ p = \nabla\psi(q) + \lambda\nabla\Phi(q), \ z = \psi(q)\}. \tag{8}$$

где λ находим из условия $\Sigma_{S,\varphi} \subset \mathcal{E}$; в нашем случае приходим к уравнениям

$$\alpha(\psi_x + \lambda\Phi_x) + \beta(\psi_y + \lambda\Phi_y) = 0, \ \forall \ (x, y) \in S = \{\Phi(x, y) = 0\}. \tag{9}$$

$$(9) \Longrightarrow \lambda = -(\alpha\psi_x + \beta\psi_y)(\alpha\Phi_x + \beta\Phi_y)^{-1}, \ (x, y) \in S = \{\Phi(x, y) = 0\}. \tag{10}$$

Таким образом, λ определена в окрестности любой точки $q \in S$ такой, что

$$(\alpha\Phi_x + \beta\Phi_y)(q) \neq 0. \tag{11}$$

Условие (11) означает, что траектории характеристического потока проходящие через точки множества $\pi^{-1}(q)$ проектируются в характеристику, не касательную к S. В лекции 1 точки начальной кривой, удовлетворяющие этому условию названы нехарактеристическими (определение 1). Требование нехарактеристичности существенно. (См. пример 3, определение 4 и теорему 1 в лекции 1).

После того, как значения λ в точках кривой S найдены, остается найти функцию $\varphi : \ \mathrm{Gr}_1(\varphi) \supset$ множество (8); или, подробнее,

$$\varphi : \ \varphi = \psi, \ \nabla\varphi = \nabla\psi + \lambda\nabla\Phi \text{ на } S. \tag{12}$$

Тогда НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$ – искомое поднятие.

Общее решение уравнения Хопфа

Существование функции, удовлетворяющей (12) при заданной λ есть следствие одной общей теоремы анализа (теорема Уитни о продолжении). На доказательстве не останавливаемся.

Итак, поднятие в транспортное уравнение определено для графика ограничения начальной функции на окрестность любой нехарактеристической точки начальной кривой.

Замечание 3. Всё выводы, сделанные при разборе примеров 4 и 5, верны в случае транспортного уравнения с общим нелинейным источником.

Пример 6 – интегрирование уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$. Имеем $q = (x,t), p = (p^x, p^t)$, $\mathcal{E} = \{p^t + zp^x = 0\}$, Пусть $\Sigma_{S,\varphi} = \cup_{q\in S}\{(\nabla\varphi(q), q, \varphi(q))\}$ – НИМ уравнения $\mathcal{E}$, и $S = \{\Phi(q) = 0\}$. Рассмотрим площадку Г, заметённую образами $\Sigma_{S,\varphi}$ при её переносе характеристическим потоком f уравнения Хопфа. Выберем точку $\widetilde{J} \in \Gamma$, и пусть $\pi(\widetilde{J}) = (x,t)$, и соединим $\widetilde{J}$ с $J = \chi \cap \Sigma_{S,\varphi}$ характеристической траекторией χ. В силу характеристической системы уравнения Хопфа (пример 6 лекции 2), $z \equiv \mathrm{const}$ на χ. Если при этом равенство (3) определяет функцию u, то

$$u(x,y) = u(\pi(\widetilde{J})) = z(\widetilde{J}) = z(J) = \varphi(X,T),\ \pi(J) = (X,T) \in S,$$

причём (x,t) и (X,T) соединяет характеристика $\pi(\chi)$.

Столкновение характеристик и разрывы.

Осталось найти эту характеристику и выразить выразить X, T через (x, t). С этой целью решаем уравнения

$$\Phi(X, T) = 0, \quad X - x = u(T - t), \; u = \varphi(X, T), \tag{13}$$

где второе уравнение определяет характеристику, соединяющую точки (x, t) и $(X, T) \in S = \{\Phi(X, T) = 0\}$ (лекция 2, пример 6).

Пусть (u, X, T) выражены через (x, t) из уравнений (13) для всех (x, t) из некоторой области D_0, заметённой характеристиками, проходящими через S. Тогда $u(x, t)$ – значение решения в точке $(x, t) \in D_0$.

Таким образом, уравнение Хопфа *проинтегрировано*, то есть, сведено к функциональным (не содержащим производных неизвестных функций) уравнениям (13).

Замечание 3. Построенное решение может быть непродолжаемо вовне области D_0 из-за возникновения разрывов решения в точках пересечения характеристик. Так как направление характеристики зависит от значения решения на ней, характеристики «начинающиеся» в разных точках S, могут пересечься в некоторой точке вне S. Если они несут разные значения решения, то разрыв решения в точке их пересечения неизбежен.

Задача Коши для уравнения Хопфа.

Пример 7 – задача Коши для уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$. При вычислении решения задачи Коши для уравнения Хопфа с начальным условием $u = \psi$ на S непосредственно используются только данные Коши: решение задачи Коши можно найти из уравнений (13), причём второе из них следует записать, заменяя φ на ψ. Рассмотрим начальные условия $u|_{x=0} = \psi(t)$. В этом случае $\Phi(x,t) = x$, и уравнения (13) примут вид

$$X = 0, \quad X - x = u(T - t), \;\; u = \psi(T).$$

Следовательно, $T(x,t) = t - x/u$, и решение u неявно задано уравнением

$$u = \psi(t - x/u), \;\; \psi(t) \neq 0, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда видно, что интервал значений u не шире интервала значений ψ; в частности, если ψ нигде не обращается в нуль, то и u нигде не обращается в нуль, и имеет тот же знак, что и ψ. Если $\exists\, T_0 : \;\psi(T_0) = 0$, задача Коши может не иметь решения в окрестности точки $(0, T_0)$, так как выражение $T(x,t)$ не определено при $u = \psi(T_0) = 0$.

Для обоснования сведения задачи Коши для уравнения Хопфа к уравнениям (13) нужно в общем виде построить поднятие графика начальных данных в уравнение.

Поднятие данных Коши в уравнение Хопфа

Поднятие ищем в виде (8), но λ теперь находим из уравнения

$$\psi_t + \lambda\Phi_t + \psi(\psi_x + \lambda\Phi_x) = 0, \ \forall\ (x,t) \in S = \{\Phi(x,t) = 0\}. \tag{14}$$

$$(14) \Longrightarrow \lambda = -(\psi_t + \psi\psi_x)(\Phi_t + \psi\Phi_x)^{-1}, \ (x,t) \in S = \{\Phi(x,t) = 0\}. \tag{15}$$

Таким образом, λ определена в окрестности любой точки $q \in S$ такой, что

$$\Phi_t(q) + \psi(q)\Phi_x(q) \neq 0 \tag{16}$$

Пусть все точки S удовлетворяют (16) при данной ψ. Тогда $Gr(\psi, S)$ можно поднять в уравнение Хопфа аналогично тому, как это было сделано в случае транспортного уравнения (пример 6). Вывод: поднятие в уравнение Хопфа определено для графика ограничения начальной функции на окрестность точки начальной кривой, нехарактеристической в смысле условия (16).

В случае начального условия $u|_{x=0} = \psi(t)$ условие (16) сводится к $\psi(t) \neq 0$.

Условие (16) аналогично условию поднятия в транспортное уравнение, см. (11). Однако, (16) означает, что траектории характеристического потока проходящие через точки множества $\pi_1^{-1}(q, \psi(q))$ проектируются в характеристику, не касательную к S, а (11) означает то же самое, но для всех точек из $\pi^{-1}(q)$. Зависимость от значений начальной функции – новая черта условия (16).

Интегрирование уравнения эйконала

Определение 2. Уравнением эйконала называется вполне нелинейное уравнение $(\nabla u)^2 + \Pi(q) = \Pi_0$, где – заданная функция, и $\Pi_0 = const$. Предполагается, что константа Π_0 выбрана так, что

$$\mathcal{E} = \{(p, q, z) : \ p^2 + \Pi(q) = \Pi_0\} \neq \varnothing \text{ и } p^2 + (\nabla \Pi)^2(q) \neq 0 \text{ на } \mathcal{E}. \tag{17}$$

Рассматривается также и более общее уравнение, в котором p^2 заменено на $(p, A(q)p)$, где $A(q)$ – положительно-определённая матрица.

Пример 8 – интегрирование простейшего уравнения эйконала Рассмотрим уравнение $u_x^2/2 + u_y^2/2 - 1 = 0$, так что

$$\mathcal{E} = \{(p, q, z) : \ p^2 = 1\}, \ p = (p^x, p^y) \in \mathbb{R}^2, q = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{17$'$}$$

Характеристическая система и поток имеют вид

$$P^2 = 1, \ \dot{Q} = 2P, \ \dot{P} = 0, \ \ \dot{Z} = 2P^2, \ Q = (X, Y), \ P = (P^x, P^y); \tag{18}$$

$$f(\cdot, \sigma) : (p, q, z) \mapsto (p, q + p\sigma, p^2\sigma); \tag{19}$$

Пусть задано НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$, где $S = \{\Phi(q) = 0\}$. Рассмотрим площадку Γ, заметённую образами $\Sigma_{S,\varphi}$ при её переносе характеристическим потоком (19). Выберем точку $\widetilde{J} = (p, q, z) \in \Gamma$, и соединим $\widetilde{J}$ с $J = (P, Q, Z) = \chi \cap \Sigma_{S,\varphi}$ характеристической траекторией χ. Тогда,в силу (19),

Задача Коши для уравнения эйконала

$$p = \nabla\varphi(Q) = P, \ \ Q = q + 2p\sigma, Z = \varphi(Q) = z + 2p^2\sigma, \ \ \Phi(Q) = 0. \qquad (20)$$

Если при этом равенство (3) определяет функцию u, то $u = z(q)$, где $z(q)$ выражено из уравнений (20) (эта система сводится к четырём уравнениям с шестью неизвестными q, Q, z, σ; Q, z, σ нужно выразить через q.)

Замечание 4. Характеристики уравнения эйконала прямые, параметризованные отображением $Q = q + \sigma p$. В отличие от уравнения Хопфа, их направления зависят от p, а не от z.

Пример 9 – интегрирование задачи Коши для уравнения эйконала с физически естественным начальным условием $u|_S = 0$, где $S = \{\Phi(q) = 0\}$. Поднимаем $\mathrm{Gr}(0, S)$ в уравнение эйконала. Ищем НИМ (8), где полагаем $\psi = 0$. Получаем уравнение $\lambda^2(\nabla\Phi)^2 = 1$, и два НИМ

$$\Sigma^{\pm}_{0,S} = \{(\pm\mathbf{n}(Q), Q, 0), \ \ Q = (X, Y) \in S\}, \ \ \mathbf{n}(Q) = \nabla\Phi(Q)/|\nabla\Phi(Q)|. \qquad (21)$$

Сдвиги НИМ $\Sigma^{\pm}_{0,S}$ вдоль потока (19) заметают лежандрово многообразие

$$\Gamma^{\pm} = \{(p, q, z) = (\pm\mathbf{n}(Q), Q \pm 2\tau\mathbf{n}(Q), 2\tau), \ \ \tau \in \mathbb{R}, \ \ Q \in S\}. \qquad (22)$$

Отсюда ответ:

задача Коши для уравнения эйконала имеет не менее двух решений

$$u(q) = \pm z, \; z : \; q = Q + z\mathbf{n}(Q), \; \Phi(Q) = 0. \tag{23}$$

В случае $S = \{(x,y) : y = 0\}$ имеем $Q = (X,0)$,$\mathbf{n}(Q) = (0,1)$, $q = (x,y) = (X, \pm z)$, $z = \pm y$, $u^{\pm} = \pm y$.

В случае $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$ имеем $\mathbf{n}(Q) = Q = (X, Y)$, $(x,y) = (X,Y) + z(X,Y)$, $X = x/(1+z)$, $Y = y/(1+z) \Longrightarrow x^2 + y^2 = (1+z)^2$. Отсюда $\pm(1+z) = \pm\rho$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, и, с учётом начального условия, $\pm u = 1 - \rho$. Полученные решения определены вне произвольной окрестности начала.

Из (21-22) следует, что характеристика, проходящая через точку Q кривой S, совпадает с нормалью к этой кривой. Нормали к S в точках $Q_1 \neq Q_2$, вообще говоря, пересекаются в некоторой точке

$$q_* : \; q_* = Q_1 + \delta_* \mathbf{n}_1 = Q_2 + \delta_* \mathbf{n}_2, \; \mathbf{n}_{1,2} = \mathbf{n}(Q_{1,2}). \tag{24}$$

(объяснение равенства $|q_* - Q_1| = |q_* - Q_2|$ пока отложим). Поэтому

$$\pi^{-1}(q_*) \supset \{(\pm\mathbf{n}_1, q_*, \pm\delta_*), (\pm\mathbf{n}_2, q_*, \pm\delta_*)\} \subset \Gamma^{\pm},$$

то есть, каноническая проекция $\Gamma^{\pm} \to D$ при $|\tau| \geq |\delta_*/2|$ заведомо необратима, так что решения (23) определены лишь в достаточно узкой полоске, прилегающей к S.

Замечание 5. В отличие от уравнения Хопфа, пересекающиеся характеристики приносят в точку пересечения одинаковые значения z, но разные значения p: из точек Q_1 сносится вектор $\mathbf{n}_1$, а из Q_2 – вектор $\mathbf{n}_2 \neq \mathbf{n}_1$.

Определение 2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$, $\operatorname{dist}(s, K) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{|s - t|,\ t \in K\}$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $S = \partial D$. Положим $D_\rho = \{s \in D : \operatorname{dist}(s, S) \le \rho\}$, $\delta_S(s) = \operatorname{dist}(s, S)$, $s \in D$, $\mathbf{n}(t) = \nabla\Phi(t)/|\nabla\Phi(t)|$, $t \in S$.

Пример 10. Пусть q точка единичного круга радиуса 1. Проведём через неё диаметр. Его конец, ближний к q, – ближайшая к q точка граничной окружности. Эта точка единственна, если q не в центре. Пусть q сдвигается вдоль диаметра к центру круга. Когда q пройдёт центр, ближайшая к ней точка окружности «перепрыгнет» на противоположный конец диаметра.

Лемма 1. Пусть $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \ge 2$, $\Phi \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}^n)$, $D = \{s : \Phi(s) > 0\}$ – область, $S = \partial D = \{s \in \mathbb{R}^n : \Phi(s) = 0,\ \nabla\Phi(s) \neq 0\}$ – компакт. Тогда найдётся $\exists\rho > 0$ такое, что (i) $\forall\, s \in D_\rho\, \exists! t : |s - t| = \delta_S(s)$; (ii) $s = t + \delta(s)\mathbf{n}(t)$, ; (iii) отображение $P_S : s \mapsto t$ принадлежит $\mathrm{C}^{\ell-1}(D_\rho)$, и функция $\delta \in \mathrm{C}^\ell(S_\rho)$, причём $\nabla\delta(s) = \mathbf{n}(t)$.

Определение 3. Множество $S_\sigma = \{t + \sigma\mathbf{n}(t),\ t \in S\}$ называется эквидистантой S.

По лемме 1, S_σ представляет собой линию уровня $\{\delta_S(s) = \sigma\}$.

Решения (23) совпадают с δ_S с точностью до знака; в частности линии уровня $\{u(q) = z\} = S_z$.

В случае общего положения, существует критическое расстояние δ_*, такое, что разные нормали к S не пересекаются в D_σ при $\sigma < \delta_*$, и пересекаются в D_σ при $\sigma > \delta_*$. Критическая эквидистанта S_{δ_*} содержит хотя бы одну точку пересечения нормалей (т.е. точку q_* вида (24)), которая равноудалена от нескольких точек границы. В этой точке происходит разрыв решения (23), а на самой эквидистанте возникает особенность типа острия. При $\sigma > \delta_*$ на S_σ появляются точки, удалённые от S на расстояние, меньшее σ, и сохраняются острия. С ростом σ эти острия заметают некоторые кривые, называемые *каустиками.*

Рассмотрим задачу Коши для некоторого УрЧП $\mathcal{E}$ порядка 1 с данными S, φ. Пусть НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$ – поднятие $\mathrm{Gr}(\varphi, S)$ в $\mathcal{E}$. Рассмотрим «лежандрово многообразие» Г, заметаемое $\Sigma_{S,\varphi}$ при его переносе характристическим потоком уравнения $\mathcal{E}$.

Определение 4. *Волновой фронт лежандрова многообразия* Г – образ $\pi\Gamma$ множества Г при канонической проекции.

Определение 4. *Волновой фронт (физический)* – образ $\pi f(\Sigma_{\varphi,S}, \tau)$ при канонической проекции.

Волновые фронты (физические) уравнения эйконала (17′) – эквидистанты начальной поверхности.

Формализация понятия каустики

Начальную кривую S можно интерпретировать как начальное положение физического волнового фронта. Прочие волновые фронты получаются сдвигом вдоль характеристик, пересекающих начальный фронт. Последние называют «лучами». В случае уравнения ($17'$), лучи – нормали к начальному фронту.

При столкновении лучей решение задачи Коши терпит разрыв, а на физическом волновом фронте может возникнуть острие. При этом с лежандровым многообразием ничего особенного не происходит, и его волновой фронт (в смысле определения 4) может накрыть область, значительно большую, чем та,в которой определено решение задачи Коши.

Особенности (острия и т.д.) физических волновых фронтов и разрывы решения задачи Коши связаны с неоднозначностью канонической проекции лежандрова многообразия на свой волновой фронт.

Определение 6. Каустикой волнового фронта лежандрова многообразия $\Gamma \subset \mathcal{J}(D)$ называется множество критических значений канонической проекции $\pi : \Gamma \to D$.

Определение 7. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется критической для отображения $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, если ранг матрицы Якоби $g'(x)$ не максимален (т.е $< \min(m, n)$). Образ $y = f(x)$ критической точки x называется критическим значением отображения f.

Критические точки и значения

Пример 11. Матрица Якоби отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ – строка $g_{x_1}..g_{x_n}$. Следовательно, критическими следует признать точки, в которых все частные производные функции $g = g(x)$ равны нулю. Матрица Якоби отображения $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (g_1..g_n)$ – столбец $g_{1t}..g_{nt}$. Следовательно, критическими следует признать точки, в которых производные всех координат g_i, $i = 1..n$, по t равны нулю.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ и $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Определение 8. Точка $x \in \Lambda$ называется критической для отображения $g : \Lambda \to \mathbb{R}^m$, а точка $y = g(x)$ – критическим значением, если найдётся окрестность $\mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^m$ точки x, область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ и $h \in \mathrm{C}^1(\Omega, \mathcal{U}_x)$ такие, что (i) $h(\Omega) = \Lambda \cap \mathcal{U}_x$; отображение $h : \Omega \to \Lambda \cap \mathcal{U}_x$ обратимо и обратное отображение непрерывно; точки $\Lambda \cap \mathcal{U}_x$ – некритические значения h; (ii) точка $y = f(x)$ – критическое значение $f \circ h$.

Пример 12. $g : (x, y) \to y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \{(x, x^p)\}$, $p \in \mathbb{N}$, $h : x \mapsto (x, x^p)$, $g \circ h : x \mapsto x^p$. Следовательно, при $p > 1$, $(0, 0) \in \Lambda$ и $0 = g(0, 0)$ – критическая точка и значение $g : \Lambda \to \mathbb{R}$.

Замечание 6. Понятие критической точки отображения $g : \Lambda \to \mathbb{R}^m$ невозможно сформулировать, не имея «параметризующего» отображения h. В выборе h есть произвол, но можно показать, что критичность $x \in \Lambda$ не зависит от выбора h.

Вычисление каустик

Вычисляем каустики волнового фронта лежандрова многообразия (22) уравнения эйконала (17′).

Пусть $r : s \mapsto (x(s), y(s)),\ s \in \mathbb{R}$ параметризует S;
тогда $R : (s,t) \mapsto (x(s) + tn_1, y(s) + tn_2, n_1, n_2, t),\ \ n_{1,2} = n_{1,2}(r(s))$, параметризует Γ;
тогда $\pi \circ R : (s,t) \to (x(s) + tn_1, y(s) + tn_2)$.
Каустика волнового фронта Γ состоит из точек $(x(s) + tn_1, y(s) + tn_2)$, таких, что

$$\det \begin{pmatrix} n_1 & x' + tn_1' \\ n_2 & y' + tn_2' \end{pmatrix} = 0. \tag{25}$$

Пример 12. Пусть $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Уравнение (25) примет вид

$$\det \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) - t\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) + t\cos(s) \end{pmatrix} = (1 + t) = 0.$$

Ответ: каустика совпадает с центром окружности S.

Каустики и кривизны.

Уравнение(25) линейно по t. Из него находим

$$t = t_*(s) = -\frac{n_1 y' - n_2 x'}{n_1 n_2' - n_2 n_1'} = \frac{1}{\kappa(s)}$$

$\kappa(s)$ – кривизна кривой S в точке $r(s)$.

Функция $t_*(s)$ определена во всех точках $(x(s), y(s)) \in S: \ \kappa(s) \neq 0$. Точки $(x(s), y(s)) \in S: \ \kappa(s) = 0$ называются точками уплощения.

Каустика волнового фронта Γ параметризуется отображением отображением $s \mapsto (x(s) + t_*(s)n_1, y(s) + t_*(s)n_2)$.

Итак, (i) из любой точки на $(x(s), y(s)) \in S$, за исключением точек уплощения, исходит луч $s \mapsto (x(s) + tn_1, y(s) + tn_2)$ приводящий на каустику за время $t_*(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$;

(ii) лежандрово многообразие Γ однозначно проектируется на область D_{δ_*}, $\delta_* = \frac{1}{\sup\limits_S |\kappa|}$.