Задачи включают параметры a, b, ω, n, m. Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает специальный список. Условия задач включают функции и интервал $(-h, h)$, которые определены так

$$f(x) = \frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{x} \left(\frac{\omega}{s^2+\omega} + \left(\frac{a}{s^2+a}\right)^m + \left(\frac{b}{s^2+b}\right)^n\right) ds. \tag{1}$$

1. Решите задачу Коши

$$u_t + \frac{u_x^2 + \alpha^2 x^2}{2} = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}\ \ u|_{t=0} = f,\ \alpha = \omega$$

и на этой основе визуализируйте картину развития и разрушения графика $(x, p(x,t)),\ p = u_x$. В частности проконтролируйте визуально выполнение начального условия:

$$p|_{t=0} = f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{x^2+\omega} + \left(\frac{a}{x^2+a}\right)^m + \left(\frac{b}{x^2+b}\right)^n\right).$$

. *Рекомендации.*

1. Для визуализации графика решения $(x, p(x,t))$ (при фиксированном t) используйте команду `implcitplot`. В ней нужно указывать интервалы изменения p и x. Их нужно выбрать так, чтобы анимация давала достаточно ясную картину явления. В частности, должны быть видны основные детали графика начальной функции: минимумы, максимумы и т.д.

2. На малых временах, на анимации будет видно график (он не будет меняться) и **две** изменяющихся кривых. Одна из них будет нужным нам графиком, по крайней мере на малых временах, а вторая будет графиком производной другого решения уравнения, которое не удовлетворяет поставленному начальному условию. Так уж устроено функциональное уравнение, к которому нас приведёт интегирование исходного УрЧП.

3. Разрушение решения задачи Коши сопровождается слиянием этих графиков в единую кривую. Слияние начинается с той части графика, где значения решений близки к нулю. Поэтому, чтобы поймать это явление в кадр, вам надо подобрать достаточно широкий интервал изменения x.

2. Решите задачу Коши

$$u_t + (u_x^2 + \omega^2 x^2)/2 = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}\ \ u|_{t=0} = x + f(x),$$

и на этой основе визуализируйте картину развития и разрушения графика $(x, p(x,t)),\ p = u_x$. В частности проконтролируйте визуально выполнение начального условия.

Рекомендации.

1. См. пп.1,2 рекомендаций к задаче 1.

2. Разрушение решения задачи Коши сопровождается на этот раз, грубо говоря, поворотом графика на 90 градусов. Поэтому, чтобы поймать это явление в кадр, вам надо подобрать достаточно длинный интервал времени. Для оценки рекомендую взять $\pi/(2\omega)$.

3. Решите задачу Коши для уравнения эйконала с нулевым начальным условием, считая, что начальная кривая (а) эллипс с полуосями a, b, (б) парабола $y = \frac{\omega x^2}{\omega + b}$. Постройте и визуализируйте особенности и каустику соответствующего волнового фронта.

Рекомендация. Для визуализации особенностей используйте эквидистанты. При построении эквидистант рекомендую параметризации (а) эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, (б) параболы $x = t,\ y = \frac{\omega t^2}{\omega+b}$. Особые точки (острия) эквидистант должны лечь на каустики. Настоятельно рекомендую использовать этот факт для самоконтроля.