Задачи включают параметры a, b, ω, n, m. Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает специальный список.

1. Рассмотрите гамильтонову системы ОДУ с гамильтонианом вида

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1 p_2 - p_2 U_1(q_1) - p_1 U_2(q_2) + U_1(q_1) U_2(q_2), \text{ где} \tag{1}$$

$$U_1(x) = a\cos(\omega x),\ U_2(x) = b\sin(\omega x). \tag{2}$$

1.1. Запишите уравнение Гамильтона-Якоби для производящей функции канонического преобразования

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \mapsto (P_1, P_2, Q_1, Q_2), \tag{3}$$

приводящего гамильтониан (1) к виду $K(Q_1, Q_2) = Q_1 Q_2$, и решите это уравнение методом разделения переменных.

1.2. С помощью построенной производящей функции решите в явной форме задачу Коши для исходной гамильтоновой системы с начальными условиями

$$p_1(0) = a,\ p_2(0) = b,\ q_1(0) = \frac{\pi}{2\omega},\ q_2(0) = \frac{\pi}{\omega}, \qquad (4).$$

1.3. Проконтролируйте полученное аналитическое решение с помощью численного. С этой целью постройте следующие 2 графика

$$\{(t, \widetilde{p_1}(t) - U_1(\widetilde{q_1}(t)) - Q_1),\, t \in (0, T)\},\ \{(t, \widetilde{p_2}(t) - U_2(\widetilde{q_2}(t)) - Q_2),\, t \in (0, T)\},\ ,\ T = \frac{2\pi}{\omega \min(b, a)}.$$

где тильдой обозначено численное решение, а Q_1 и Q_2 однозначно определены по начальным условиям. Постройте графики тех же величин, заменив T на $20T$. В обоих случаях значения ординаты на графиках должны быть очень малыми, так как при точном решении

$$p_1(t) - U_1(q_1(t)) - Q_1 = p_2(t) - U_1(q_2(t)) - Q_2 = 0\ \forall\, t.$$

1.4. Анимируйте кривую, параметризованную отображением

$$t \mapsto (p_1(t) - p_1(0), p_2(t) - p_2(0)),\ t \in (0, s),\ s \in (0, 100T),\ T = \frac{2\pi}{\omega \min(b, a)}$$

где s – параметр анимации, p_1, p_2 определяются точным решением исходной гамильтоновой системы. Повторите эту анимацию с заменив a на $\sqrt{a}$, b на $\sqrt{b}$.

Рекомендации.

1. Гамильтониан (1) разлагается на множители. Это предопределяет полное разделение переменных.
2. Численное решения строится с помощью команды `dsolve` с опцией `numeric`.
3. При решении п. 1.4 рекомендуется анимировать `complexplot` параметрически заданной кривой.

2. Решите задачу Коши для теплового уравнения с произвольно заданным параметром $\alpha > 0$:

$$u_t = u_{xx},\ (x, t) \in \mathbb{R}^2;\ u|_{x=0} = a\sin^m(\alpha t) + b\cos^n(\alpha t),\ u_x|_{x=0} = 0.$$

2.1. Проконтролируйте визуально выполнение начального условия. Для этого выберите $\alpha = 1$ и анимируйте на общей координатной плоскости графики

$$\{u(x, t),\ t \in (-2\pi, 2\pi)\},\ \{a\sin^m(\alpha t) + b\cos^n(\alpha t),\ t \in (-2\pi, 2\pi)\},\ x \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{\max(m, n)}}\right),$$

где x– параметр анимации.

2.2. Визуализируйте влияние параметра α. С этой целью 3D-анимируйте график

$$\{u(x,t),\ x\in(-1,1),\ t\in(-2\pi,2\pi)\},\ \ \alpha\in\left(0,\frac{40}{\max(m,n)}\right)\ \text{– параметр анимации.}$$

3. Решите краевую задачу для теплового уравнения с произвольно заданным параметром $\alpha>0$:

$$u_t=u_{xx},\ \ (x,t)\in\mathbb{R}^2;\ \ u|_{x=0}=a\sin^m(\alpha t)+b\cos^n(\alpha t),\ \sup_{x>0}|u(x,t)|<\infty. \tag{5}$$

3.1. Проконтролируйте визуально выполнение граничного условия. Для этого выберите $\alpha=1$ и анимируйте на общей координатной плоскости графики

$$\{u(x,t),\ \ t\in(-2\pi,2\pi)\},\ \ \{a\sin^m(\alpha t)+b\cos^n(\alpha t),\ \ t\in(-2\pi,2\pi)\},\ \ x\in\left(0,\sqrt{\frac{1}{\max(m,n)}}\right),$$

где x– параметр анимации.

3.2. Визуализируйте влияние параметра α. С этой целью 3D-анимируйте график

$$\{u(x,t),\ x\in(-1,1),\ t\in(-2\pi,2\pi)\},\ \ \alpha\in\left(0,\frac{40}{\max(m,n)}\right)\ \text{– параметр анимации.}$$

3.3. Ответьте на вопрос: может ли задача типа (5) с граничным условием $u|_{x=0}=\varphi$, где φ – тригонометрический многочлен положительной степени, иметь решение, ограниченное во *всей* плоскости?.

4. Решите задачу Коши для теплового уравнения с произвольно заданным параметром $\alpha>0$:

$$u_t=u_{xx},\ \ (x,t)\in\mathbb{R}^2;\ \ u|_{t=0}=a\sin^m(\alpha x)+b\cos^n(\alpha x). \tag{6}$$

4.1. Проконтролируйте визуально выполнение начального условия. Для этого выберите $\alpha=1$ и анимируйте на общей координатной плоскости графики

$$\{u(x,t),\ \ x\in(-2\pi,2\pi)\},\ \ \{a\sin^m(\alpha x)+b\cos^n(\alpha x),\ \ x\in(-2\pi,2\pi)\},\ \ t\in\left(0,\frac{1}{\max^2(m,n)}\right),$$

где t– параметр анимации.

4.2. Визуализируйте влияние параметра α. С этой целью 3D-анимируйте график

$$\{u(x,t),\ x\in(-2\pi,2\pi),\ t\in(-1,1)\},\ \ \alpha\in\left(0,\sqrt{\frac{5}{\max(m,n)}}\right)\ \text{– параметр анимации.}$$

4.3. Ответьте на вопросы: может ли задача Коши (6) с начальным условием $u|_{t=0}=\varphi$, где φ – тригонометрический многочлен положительной степени, иметь (а) решение, ограниченное во *всей* плоскости; (б) решение, удовлетворяющее дополнительному условию $u_t|_{t=0}=0$?

Рекомендации.

1. Полезно разложить тригонометрический многочлен $\psi(t)=a\sin^m(s)+b\cos^n(s)$ по степеням $z=\mathrm{e}^{is}$. Это делается с помощью формул Эйлера:

$$\psi=a\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^n+b\left(\frac{\mathrm{z}+z^{-1}}{2i}\right)^m. \tag{7}$$

Это выражение переписывается так

$$\psi=\psi_0+\sum_{k=-N}^{N}\psi_k z^k,\ \ N=\max(m,n), \tag{8}$$

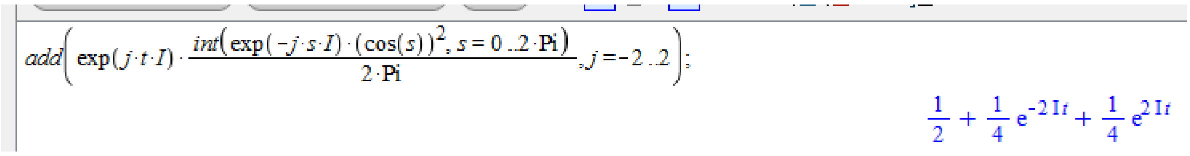

Рис. 1: Здесь $\psi(s) = \cos^2(s)$ Для суммирования рекомендуется использовать `add`, а не `sum`.

Коэффициенты при степенях z даёт элементарная формула бинома. Поскольку $|z| = 1$, имеем $z^{-1} = z^*$, где * означает комплексное сопряжение, поэтому коэффициенты при z^k и z^{-k} сопряжены: $\psi_k = \psi^*_{-k}$. Это вытекает из вещественности многочлена ψ.

2. Вычисление разложения (8) можно автоматизировать с помощью `Maple`, см. рис. 1. С этой целью используем тождество

$$\psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=-N}^{N} z^j \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\psi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{j+1}}, \tag{9}$$

где I любой интервал длины 2π (рекомендуется проверить самостоятельно!), так что

$$\psi_j = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\psi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{j+1}} \overset{\zeta = \mathrm{e}^{i\sigma}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(\sigma) \mathrm{e}^{-ij\sigma}\, d\sigma. \tag{10}$$

3. Пусть тригонометрический многочлен ψ представлен в виде разложения (8). Каждому одночлену z^j, $j \neq 0$, поставим в соответствие два элементарных решения уравнения теплопроводности из числа полученных разделением переменных (лекция от 23.10), полагая $z = \mathrm{e}^{it}$ или $z = \mathrm{e}^{ix}$:

$$\left(a_j \operatorname{ch}(\mu_j \sqrt{\alpha} x) + \frac{b_j \operatorname{sh}(\mu_j \sqrt{\alpha} x)}{\mu_j \sqrt{\alpha}} \right) \mathrm{e}^{ij\alpha t},\ \mu_j = \sqrt{\frac{|j|}{2}}\,(1 + i \operatorname{sgn} j) \ \text{ или } \mathrm{e}^{ij\alpha x} \exp(-j^2 \alpha^2 t),\ j > 0. \tag{11}$$

(заметим, кстати, что $\mu_j^2 = ij$, и $(ij)^2 = -j^2$); при этом противоположным j соответствуют комплексно-сопряжённые решения, кроме того, $j = 0$ соотвествует одно вещественное решение

$$a_0 + b_0 x.$$

4. В силу сказанного, решение каждой из задач 2-4 имеет вид

$$a_0 + b_0 x + 2 \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Re}(\psi_j u_j(x,t)), \tag{12}$$

где $u_j(x,t)$ – элементарное решение из списка (11). Подстановка решения (12) в условия Коши, или в граничное условие, а также в условие ограниченности (если оно имеется), должна обращать их в тождественно истинные высказывания. Отсюда определяются постоянные a_j, b_j и отбираются элементарные решения u_j. При проверке указанных условий целесообразно представить ψ в виде (8).