Компьютерная графика

Кузьминова Марина Валерьевна

1. Двумерные преобразования

Точки: $[x, y]$, $[x, y, z]$ (координатный вектор)

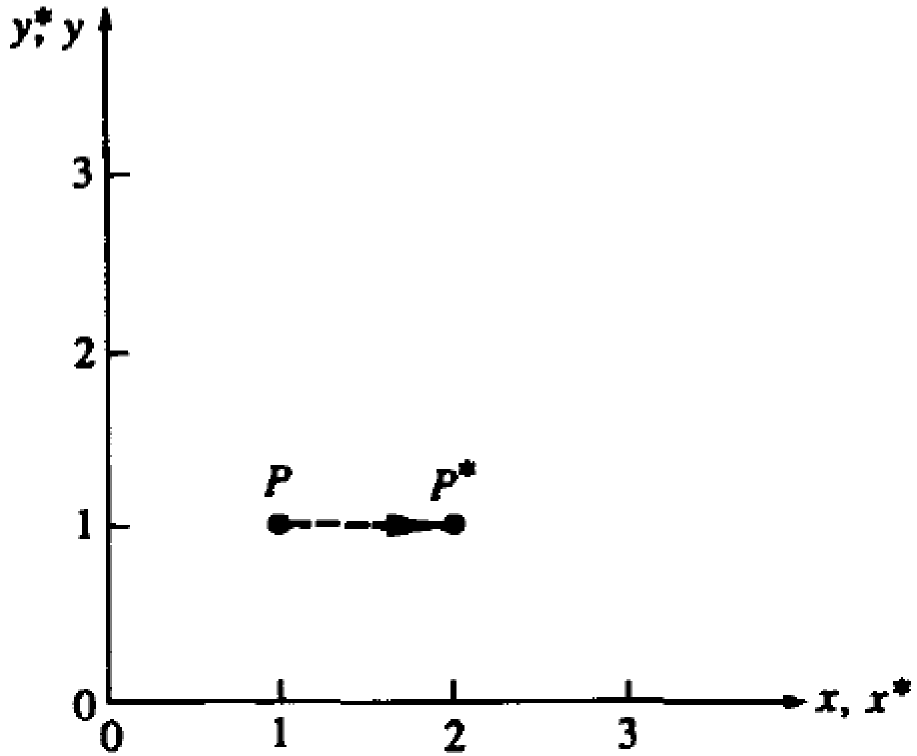
Матрица преобразований: $[T]$

Преобразование точек

$$[X][T] = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [(ax + cy)(bx + dy)] = [x^* y^*]. \tag{2-1}$$

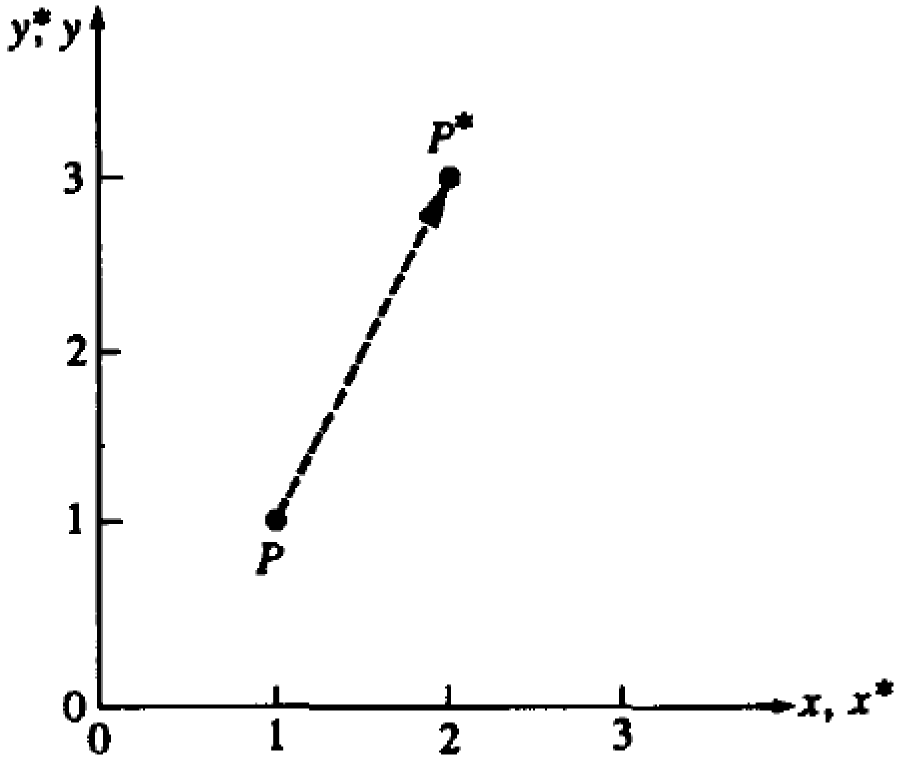
$$[X][T] = [x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y] = [x^* \quad y^*], \tag{2-2}$$

Преобразование точек



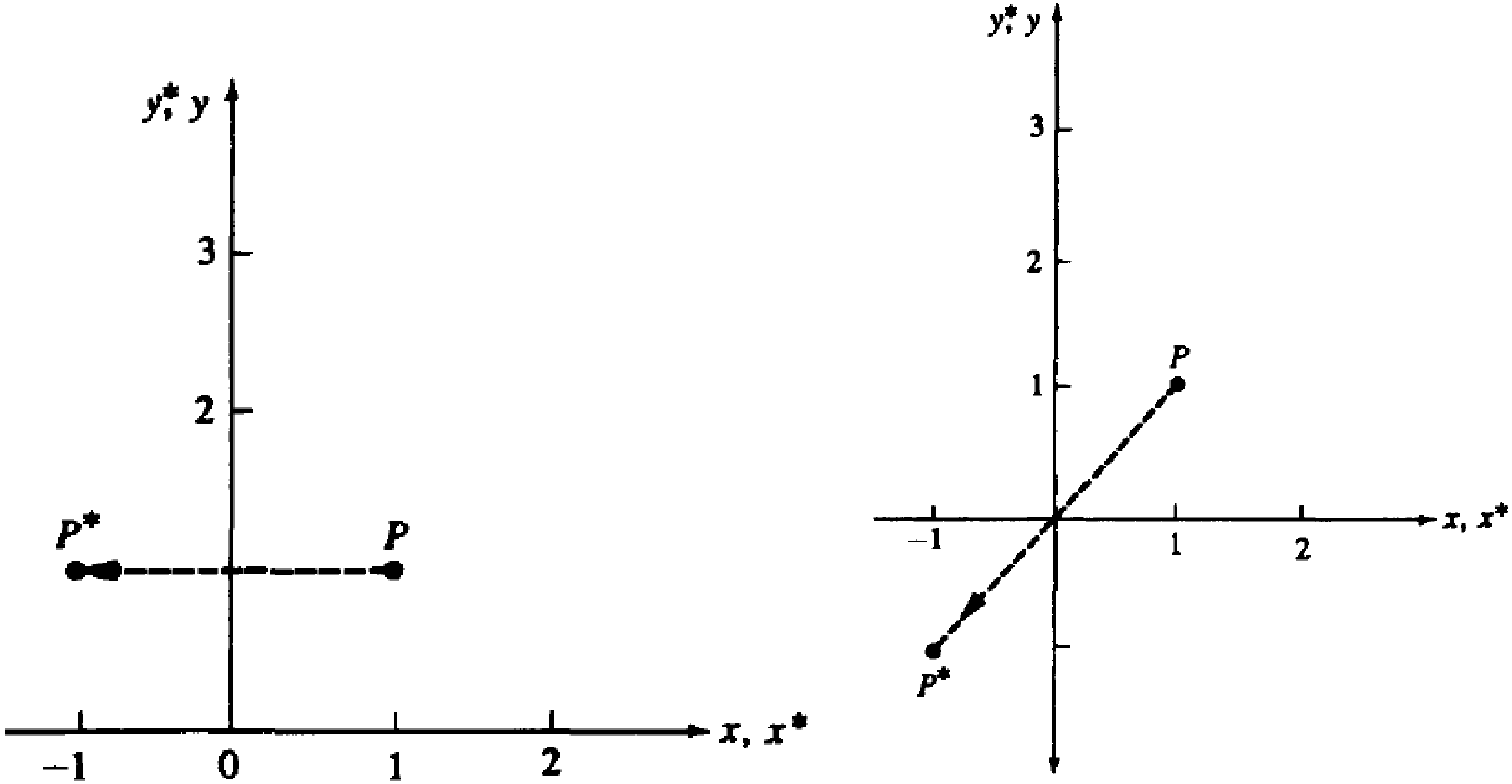
$$[X][T] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}, \qquad (2\text{-}3)$$

Преобразование точек



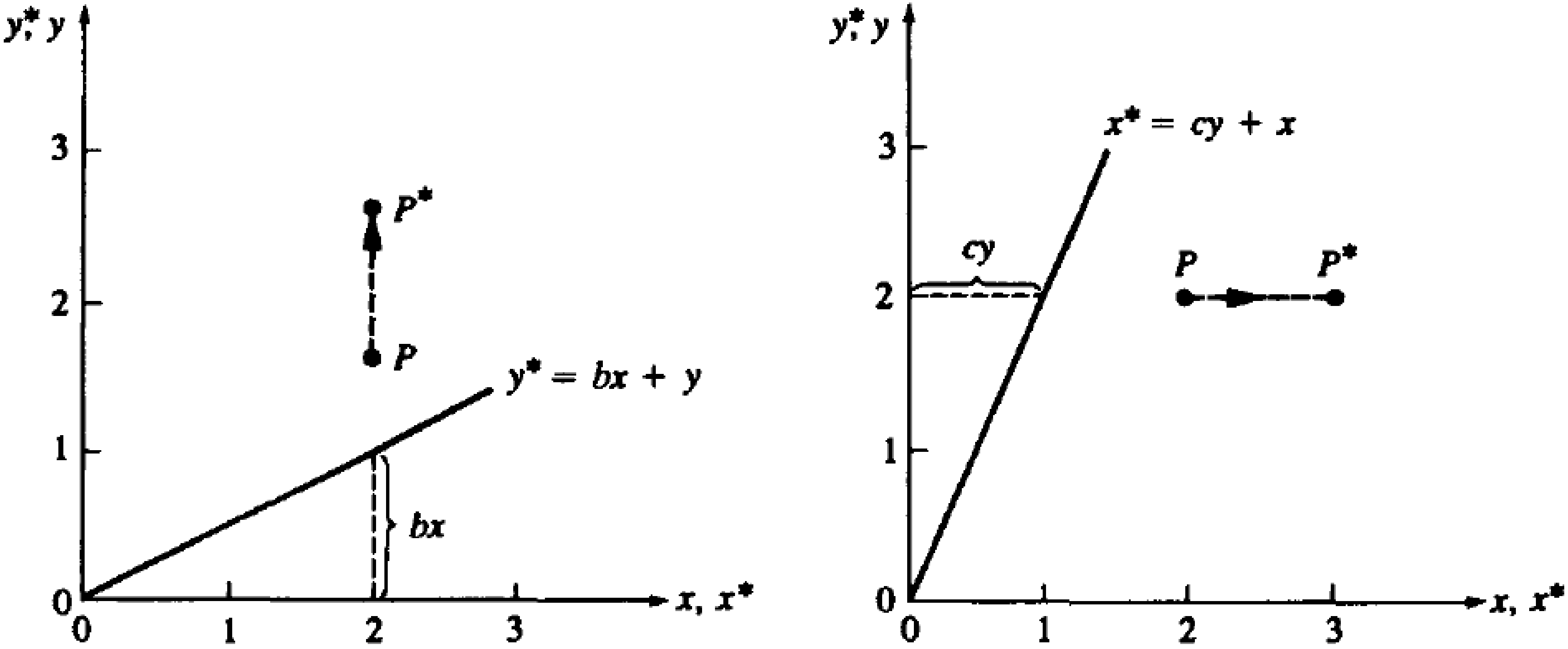
$$[X][T] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}. \tag{2-4}$$

Преобразование точек



$$[X][T] = [x \quad y]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad y] = [x^* \quad y^*], \qquad (2\text{-}5)$$

Преобразование точек



$$[X][T] = [x \quad y]\begin{bmatrix}1 & b\\0 & 1\end{bmatrix} = [x \quad (bx+y)] = [x^* \quad y^*]\,. \qquad (2\text{-}6)$$

Преобразование прямых линий

$$[A] = [0 \quad 1] \quad [B] = [2 \quad 3]$$

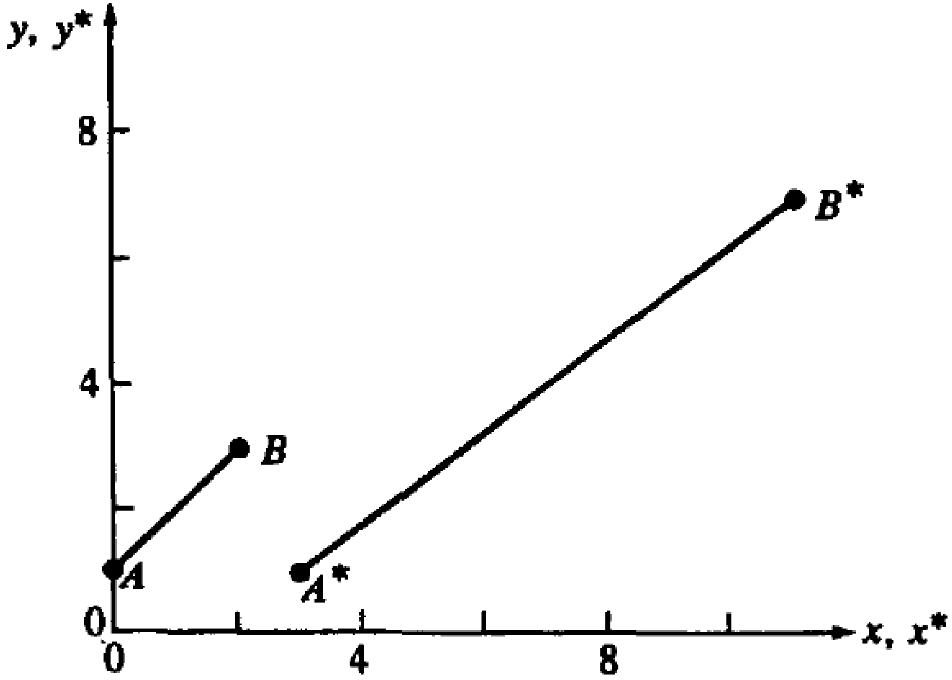
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A][T] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 1] = [A^*]$$

$$[B][T] = [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [11 \quad 7] = [B^*]$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[L][T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = [L^*]$$



Преобразование средней точки

$$[A] = [x_1 \quad y_1], \quad [B] = [x_2 \quad y_2] \quad \text{и} \quad [T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A* \\ B* \end{bmatrix}, \qquad (2\text{-}11)$$

$$[A^*] = [ax_1 + cy_1 \quad bx_1 + dy_1] = [x_1^* \quad y_1^*],$$

$$[B^*] = [ax_2 + cy_2 \quad bx_2 + dy_2] = [x_2^* \quad y_2^*]. \qquad (2\text{-}12)$$

Преобразование средней точки

$$\begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^* + x_2^*}{2} & \frac{y_1^* + y_2^*}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(ax_1 + cy_1) + (ax_2 + cy_2)}{2} & \frac{(bx_1 + dy_1) + (bx_2 + dy_2)}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a\frac{(x_1 + x_2)}{2} + c\frac{(y_1 + y_2)}{2} & b\frac{(x_1 + x_2)}{2} + d\frac{(y_1 + y_2)}{2} \end{bmatrix}. \tag{2-13}$$

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)/2 & (y_1 + y_2)/2 \end{bmatrix}. \tag{2-14}$$

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a\frac{(x_1 + x_2)}{2} + c\frac{(y_1 + y_2)}{2} & b\frac{(x_1 + x_2)}{2} + d\frac{(y_1 + y_2)}{2} \end{bmatrix}. \tag{2-15}$$

Пример 1. Средняя точка прямой

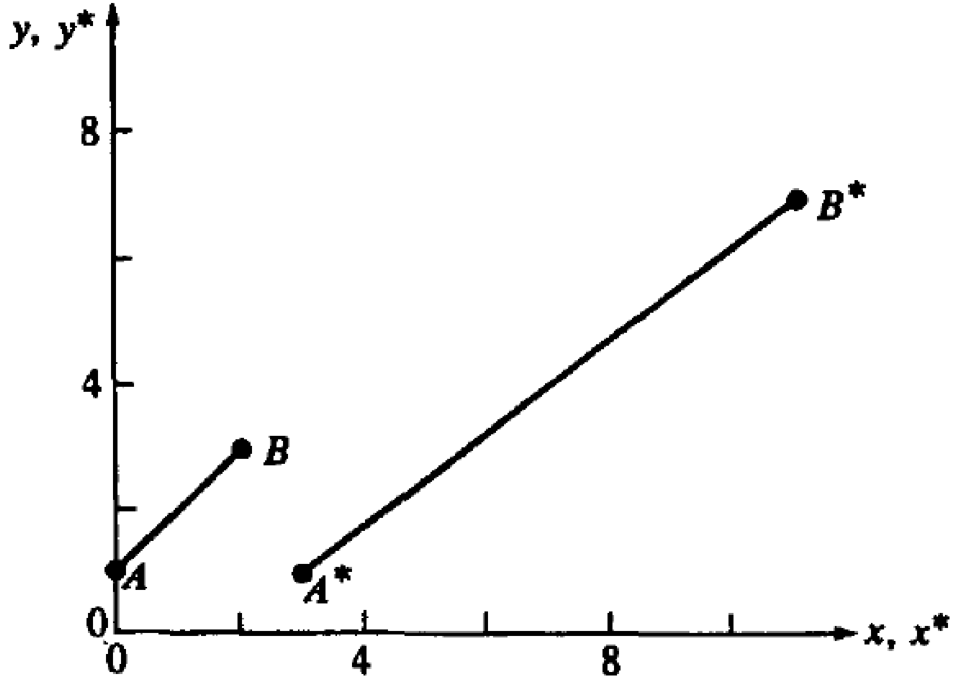
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+11}{2} & \frac{1+7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0+2}{2} & \frac{1+3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$



С другой стороны, $\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix}$

Преобразование параллельных прямых

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2\text{-}16)$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}. \qquad (2\text{-}17)$$

$$m^* = \frac{(bx_2 + dy_2) - (bx_1 + dy_1)}{(ax_2 + cy_2) - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)}$$

$$m^* = \frac{b + d\dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}{a + c\dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}} = \frac{b + dm}{a + cm}. \qquad (2\text{-}18)$$

Преобразование пересекающихся прямых

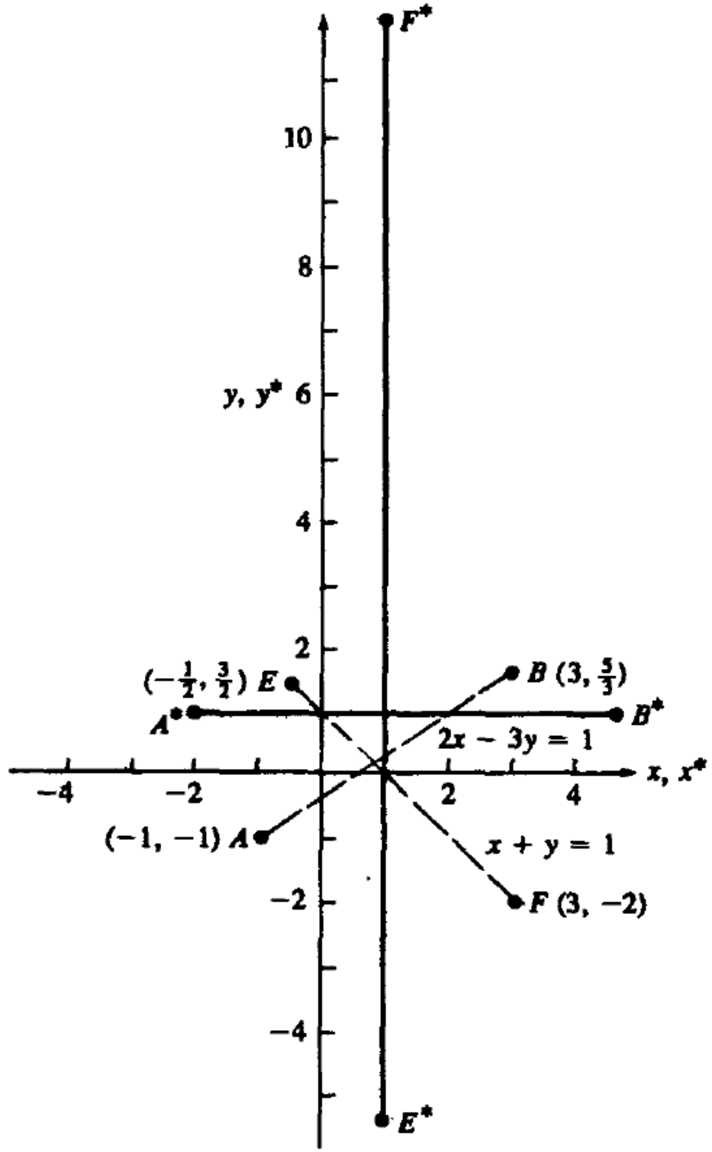
$$y = m_1 x + b_1,$$
$$y = m_2 x + b_2.$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$[X][M] = [B] \qquad (2\text{-}19)$$

$$[X_i] = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix} = [B][M]^{-1} \qquad (2\text{-}20)$$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_2 - m_1} & \dfrac{m_2}{m_2 - m_1} \\ \dfrac{-1}{m_2 - m_1} & \dfrac{-m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}21)$$



Преобразование пересекающихся прямых

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = [b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_2 - m_1} & \dfrac{m_2}{m_2 - m_1} \\ \dfrac{-1}{m_2 - m_1} & \dfrac{-m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix},$$

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} & \dfrac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}, \qquad (2\text{-}22)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y^* &= m_1^* x^* + b_1^*, \\ y^* &= m_2^* x^* + b_2^*. \end{aligned}$$

$$m_i^* = \frac{b + d m_i}{a + c m_i} \qquad (2\text{-}23)$$

$$b_i^* = b_i(d - c m_i^*) = b_i \frac{ad - bc}{a + c m_i}, \qquad \text{где} \qquad i = 1, 2. \qquad (2\text{-}24)$$

Преобразование пересекающихся прямых

$$[X_i^*] = [x_i^* \quad y_i^*] =$$
$$= \left[\frac{b_1^* - b_2^*}{m_2^* - m_1^*} \quad \frac{b_1^* m_2^* - b_2^* m_1^*}{m_2^* - m_1^*}\right]$$

$$[X_i^*] = [x_i^* \quad y_i^*] =$$
$$= \left[\frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1}\right]. \qquad (2\text{-}25)$$

$$[x_i^* \quad y_i^*] = [x_i \quad y_i]\,[T] =$$
$$= \left[\frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \quad \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1}\right] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$
$$= \left[\frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1}\right]. \qquad (2\text{-}26)$$

Пример 2. Пересекающиеся прямые

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 5/3 \end{bmatrix} \quad [E] = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}$$

AB: $-(2/3)\,x + y = -1/3$

EF: $x + y = 1$

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} -2/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-1/3 \quad 1].$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_i^* & y_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_i^* & y_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix}[T] = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот

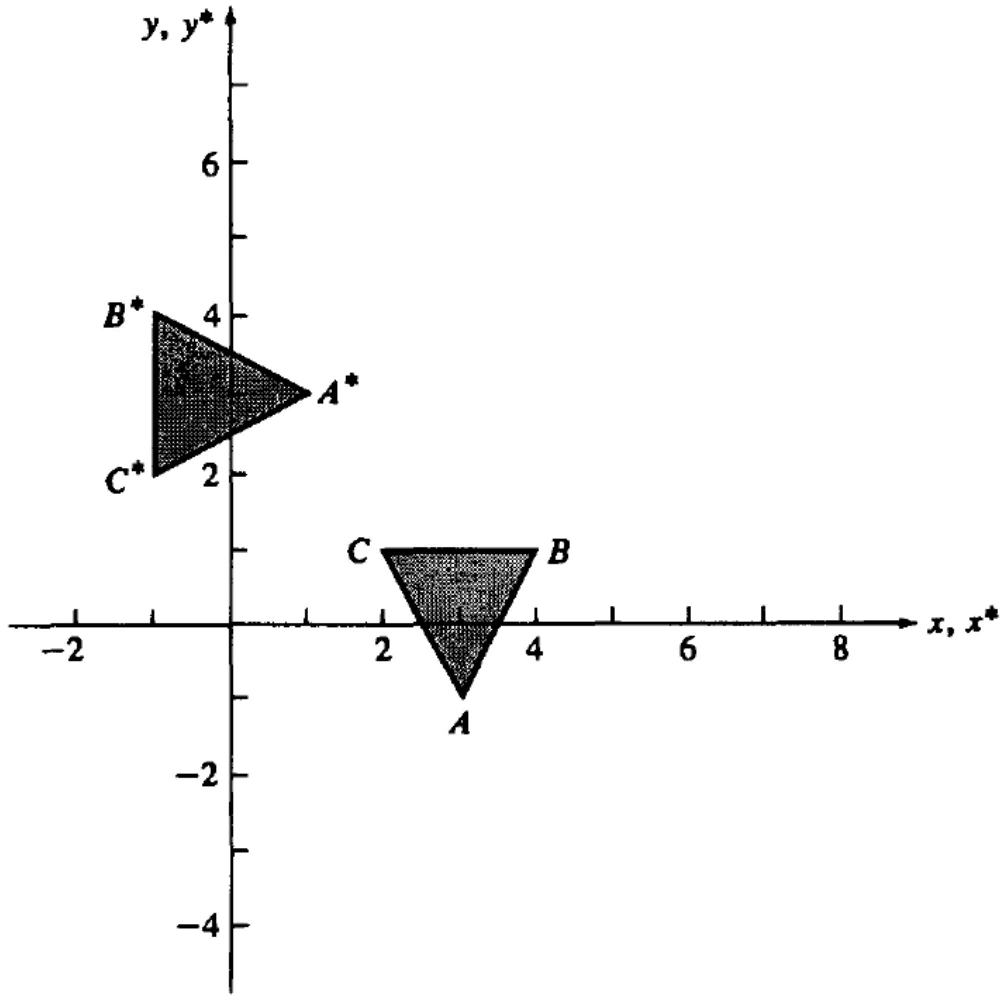
$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (90^\circ)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

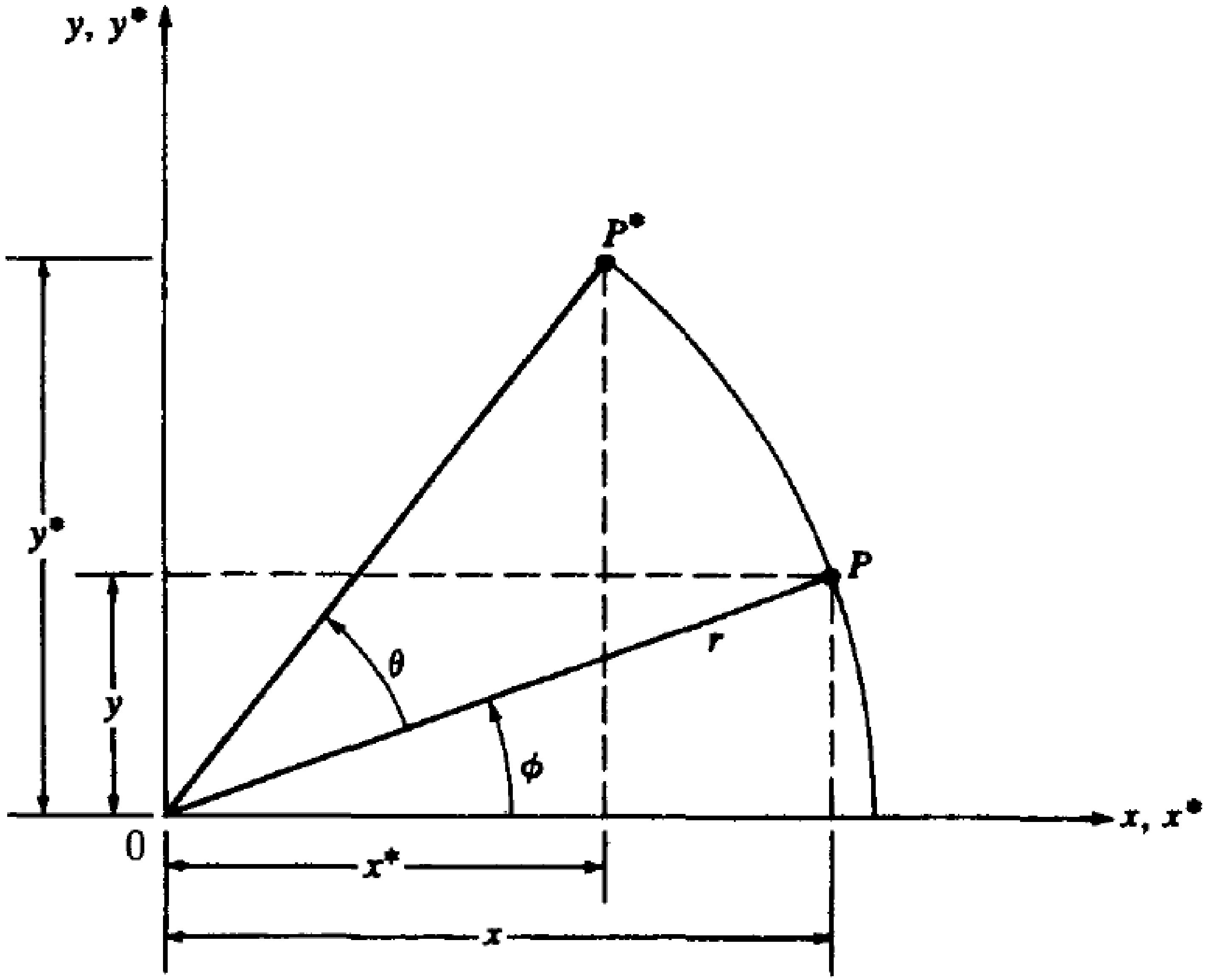
$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (180^\circ)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (270^\circ)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (0^\circ)$$



Поворот на произвольный угол θ



$$P = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\phi & r\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\phi+\theta) & r\sin(\phi+\theta) \end{bmatrix}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) & r(\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta) \end{bmatrix}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$x^* = x\cos\theta - y\sin\theta, \tag{2-27a}$$

$$y^* = x\sin\theta + y\cos\theta. \tag{2-27b}$$

$$\begin{aligned} [X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2-28}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{2-29}$$

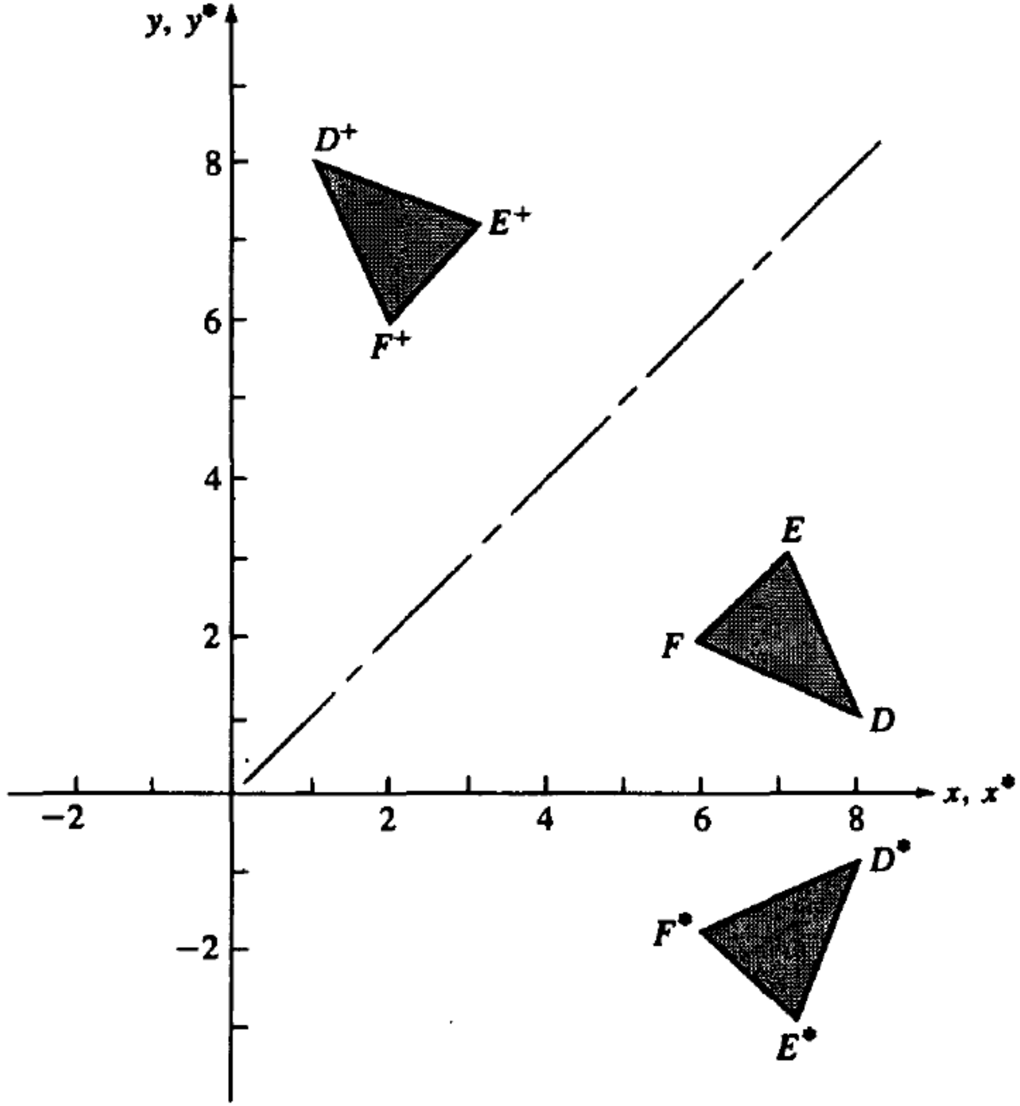
$$\det[T] = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \tag{2-30}$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \tag{2-31}$$

$$\begin{aligned} [T][T]^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I], \end{aligned}$$

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [T]^{-1}$$

Отражение



Отражение

Ось OX: $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

Ось OY: $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Прямая $y = x$: $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Прямая $y = -x$: $[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Пример 3. Отражение и вращение

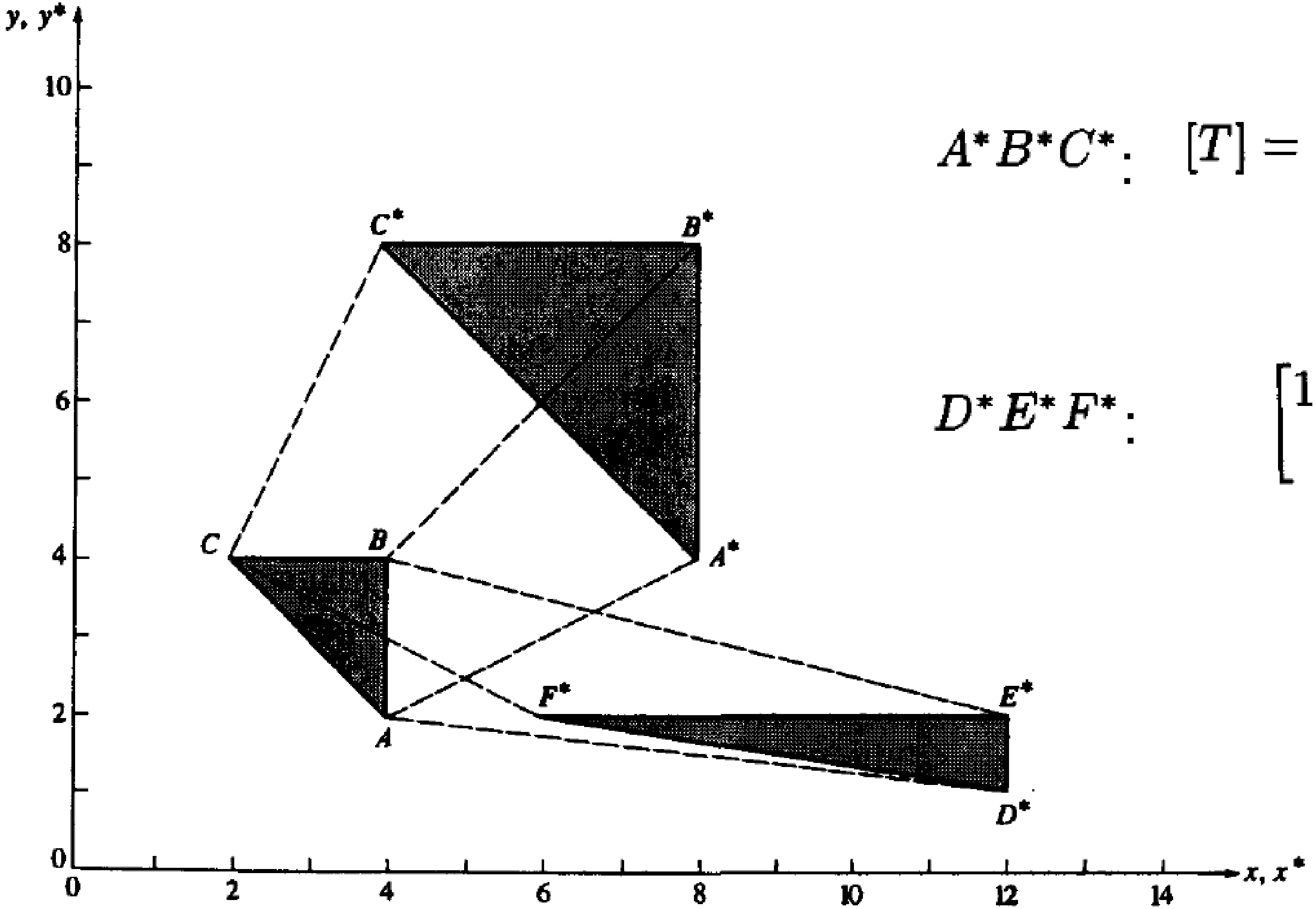
$$[X^*] = [X][T_1] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[X^+] = [X^*][T_2] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[X^+] = [X][T_3] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Масштабирование



$$A^*B^*C^*: \quad [T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D^*E^*F^*: \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Масштабирование

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad (2\text{-}37)$$

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 12 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Масштабирование