Лекция 2

Комбинированные преобразования

$$[X'] = [X][T_1] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & x \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X'][T_2] = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y \end{bmatrix}$$

$$[X'] = [X][T_2] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X'][T_1] = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix}$$

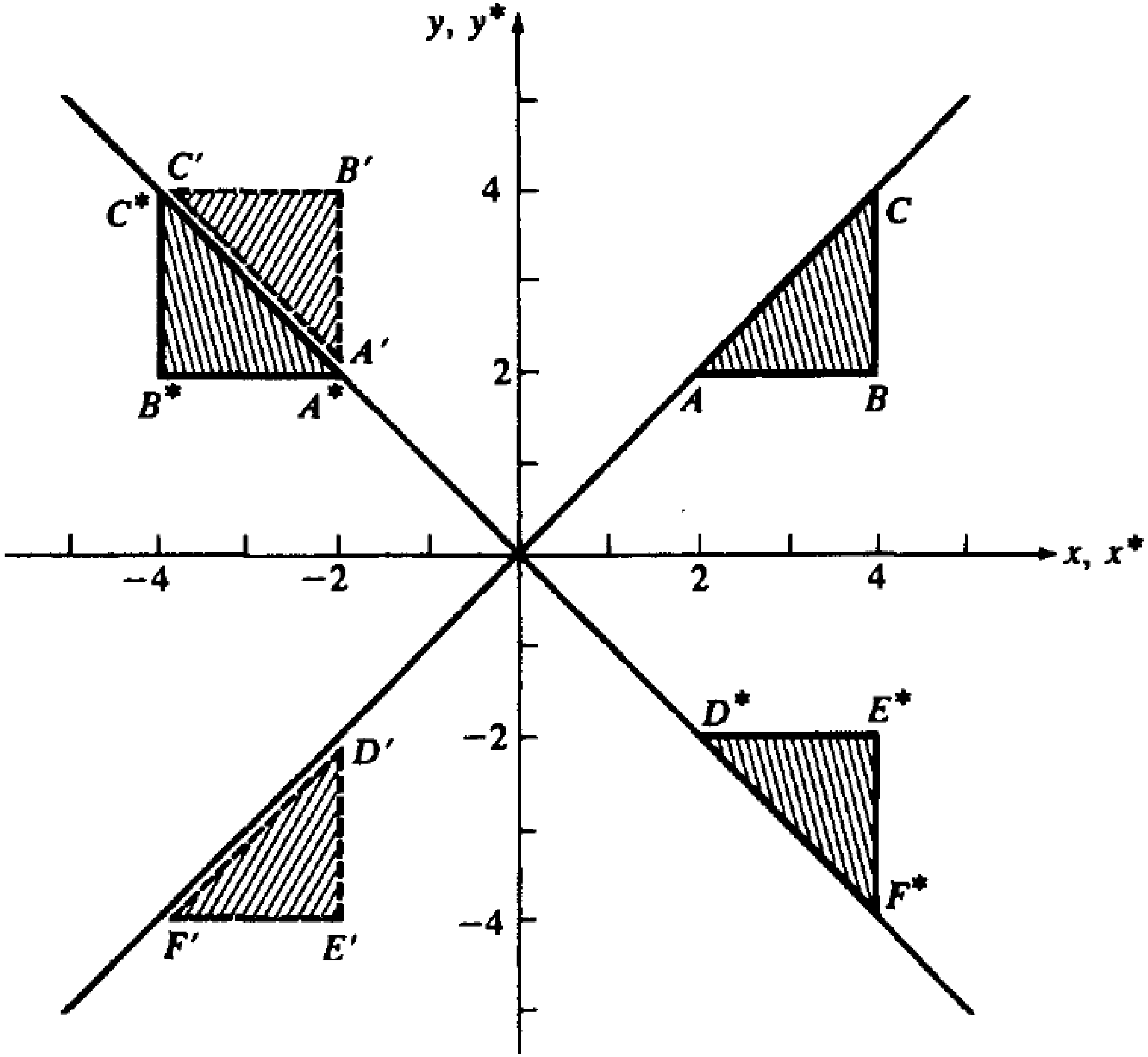
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} [T_1] \to \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} [T_2] \to \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$$

$$[T_1][T_2] \to [T_3] \qquad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} [T_3] \to \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$$

Пример 4. Комбинированные преобразования на плоскости

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Пример 4. Комбинированные преобразования на плоскости

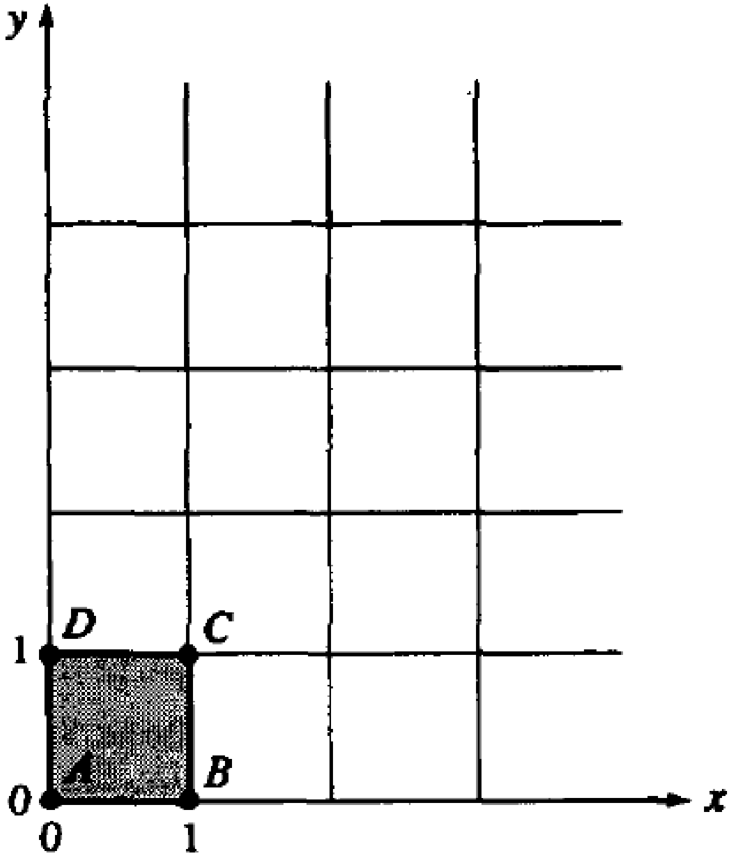
$$[X^*] = [X][T_1][T_2] = [X][T_3]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X][T_2][T_1] = [X][T_4]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

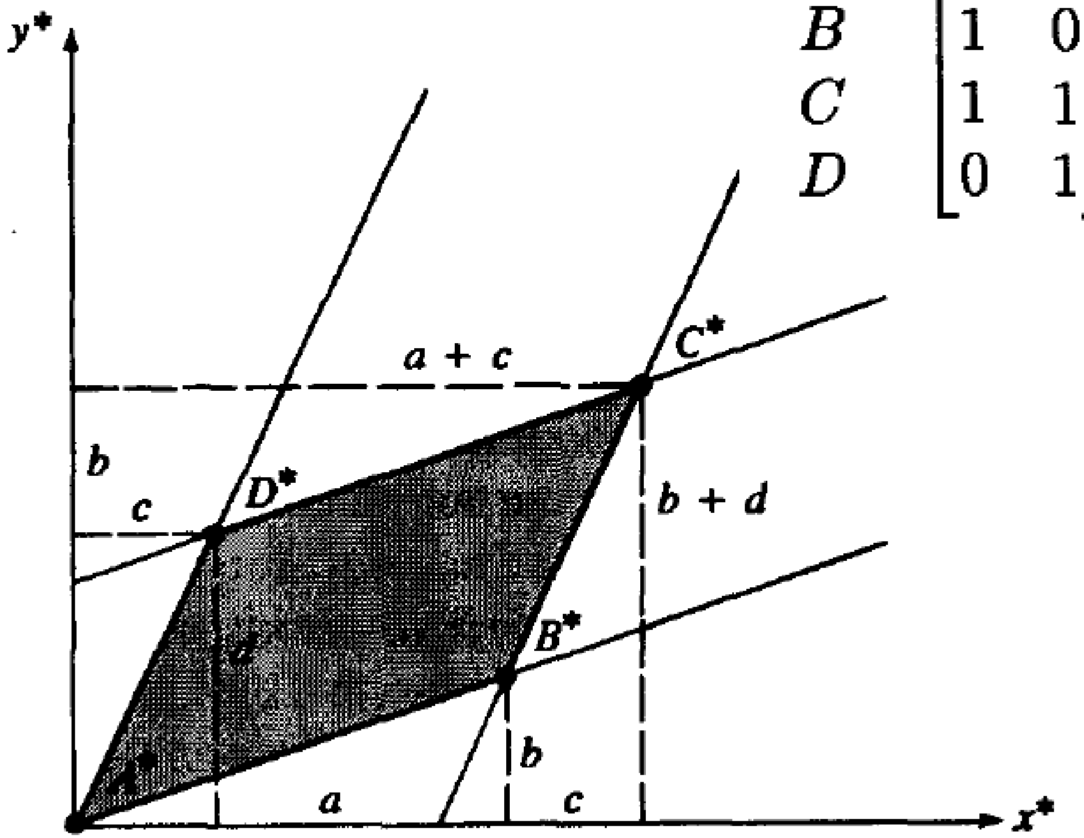
Преобразование единичного квадрата



$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{начало координат} - A \\ \text{единичная точка } B \text{ на оси } x \\ \text{внешний угол C} \\ \text{единичная точка } D \text{ на оси } y \end{array} \end{array}$$

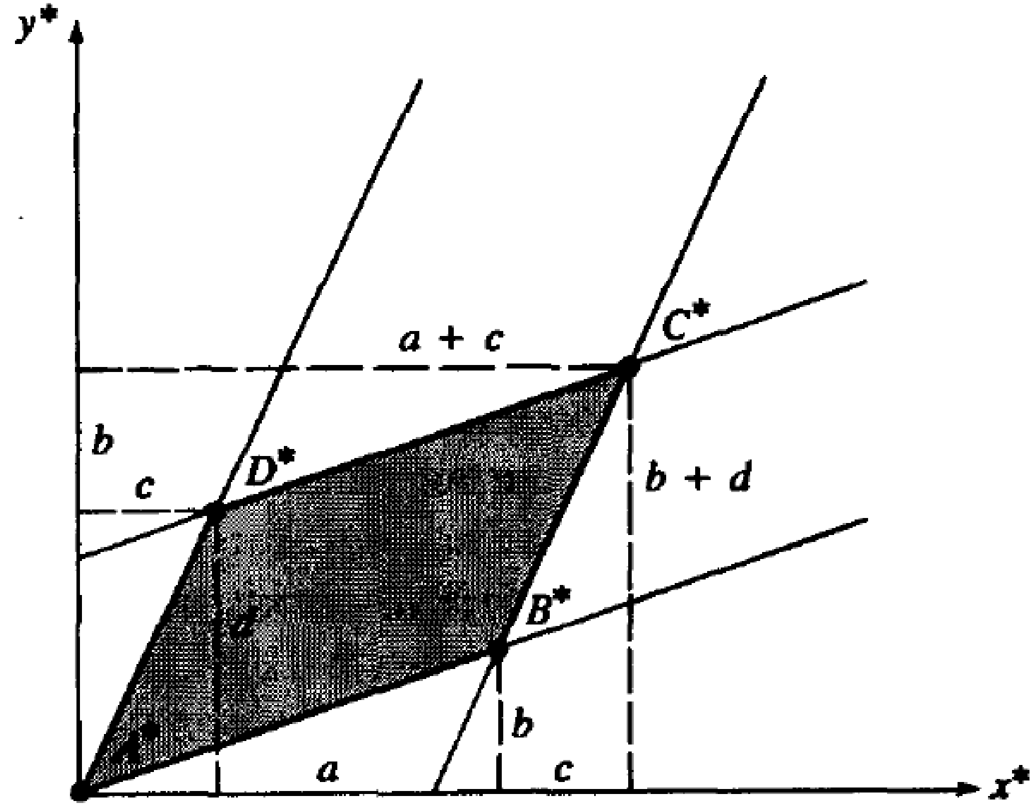
Преобразование единичного квадрата

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \begin{array}{c} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{array}$$



Преобразование единичного квадрата

$$A_p = (a+c)(b+d) - \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(cd) - \frac{c}{2}(b+b+d) - \frac{b}{2}(c+a+c).$$



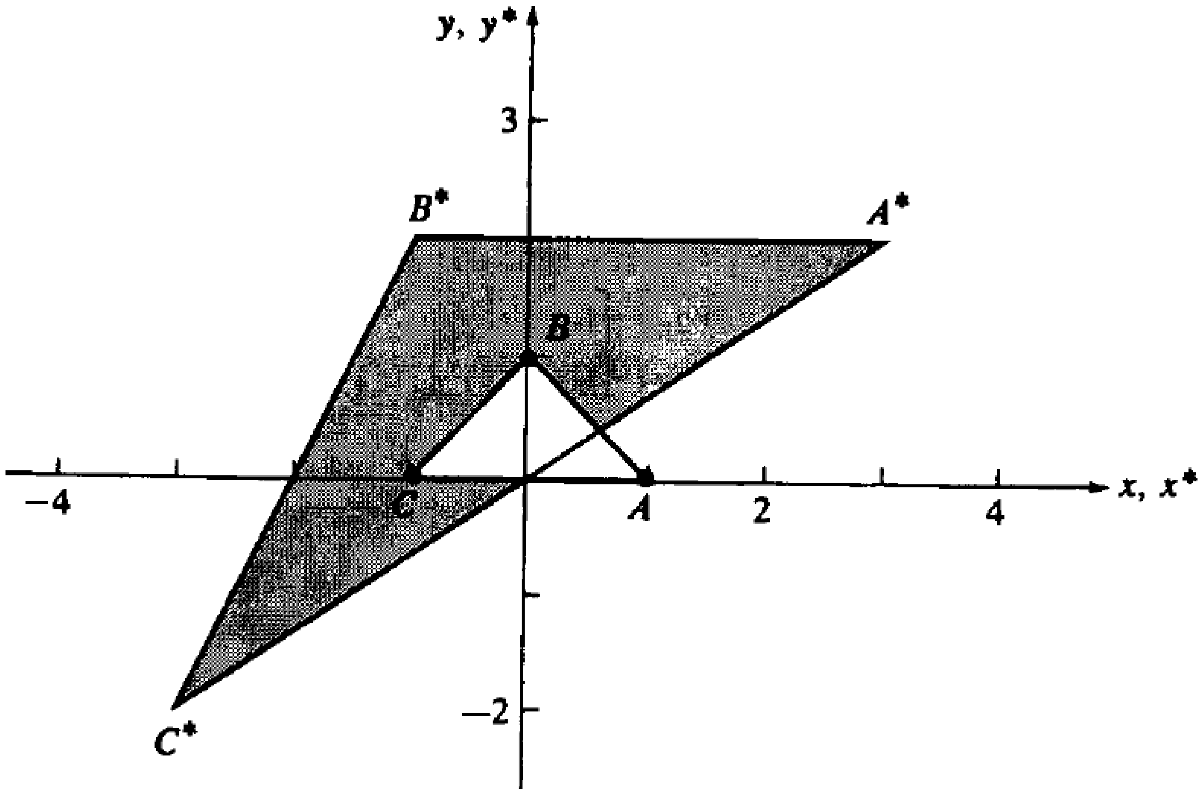
$$A_p = ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A_p = A_s(ad - bc) = A_s \det [T].$$

$$A_t = A_i(ad - bc).$$

Пример 5. Масштабирование области

ABC: $[1\ 0]$, $[0\ 1]$ $[-1\quad 0]$



$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \frac{1}{2}\,(\textit{основание})\,(\textit{высота}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2)(1) = 1$$

$$A_t = A_i(ad - bc) = 1(6+2) = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_t = \frac{1}{2}\,(\textit{основание})\,(\textit{высота}) = \frac{1}{2}(4)(4) = 8.$$

Преобразование жестких конструкций

$$\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} = |\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\cos\theta, \tag{2-42}$$

$$\overline{V}_1 \times \overline{V}_2 = (V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y})\overline{k} = |\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\overline{k}\sin\theta, \tag{2-43}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\overline{V}_1\\ \overline{V}_2\end{bmatrix}[T] &= \begin{bmatrix}V_{1x} & V_{2y}\\ V_{2x} & V_{2y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}aV_{1x}+cV_{1y} & bV_{1x}+dV_{1y}\\ aV_{2x}+cV_{2y} & bV_{2x}+dV_{2y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{V}_1^*\\ \overline{V}_2^*\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2-44}$$

$$\overline{V}_1^* \times \overline{V}_2^* = (ad-cb)(V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y})\overline{k} = |\overline{V}_1^*|\,|\overline{V}_2^*|\,\overline{k}\sin\theta. \tag{2-45}$$

Преобразование жестких конструкций

$$\overline{V}_1^* \cdot \overline{V}_2^* = (a^2 + b^2)V_{1x}V_{2x} + (C^2 + d^2)V_{1y}V_{2y} + (ac + bd)(V_{1x}V_{2y} + V_{1y}V_{2x}) =$$
$$= |\overline{V}_1^*|\,|\overline{V}_2^*|\cos\theta. \qquad (2\text{-}46)$$

$$a^2 + b^2 = 1, \qquad (2\text{-}47a)$$
$$c^2 + d^2 = 1, \qquad (2\text{-}47b)$$
$$ac + bd = 0, \qquad (2\text{-}47c)$$
$$ad - bc = +1. \qquad (2\text{-}48)$$

$$[T][T]^{-1} = [T][T]^T = [I]$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемещения и однородные координаты

$$x^* = ax + cy + m,$$
$$y^* = bx + dy + n.$$

$[x \quad y]$ —> $[x' \quad y' \quad h]$, где $x = x'/h$, $y = y'/h$

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}, \tag{2-49}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m & y+n & 1 \end{bmatrix}. \tag{2-50}$$

Поворот вокруг произвольной точки

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}. \quad (2\text{-}51)$$

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \begin{Bmatrix} -m(\cos\theta - 1) \\ +n\sin\theta \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -n(\cos\theta - 1) \\ -m\sin\theta \end{Bmatrix} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2\text{-}52)$$

Пример 6. Поворот относительно произвольной точки

Центр: точка $[4\ \ 3]$

T1= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ T2 = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x^* \quad y^* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Отражение относительно произвольной прямой

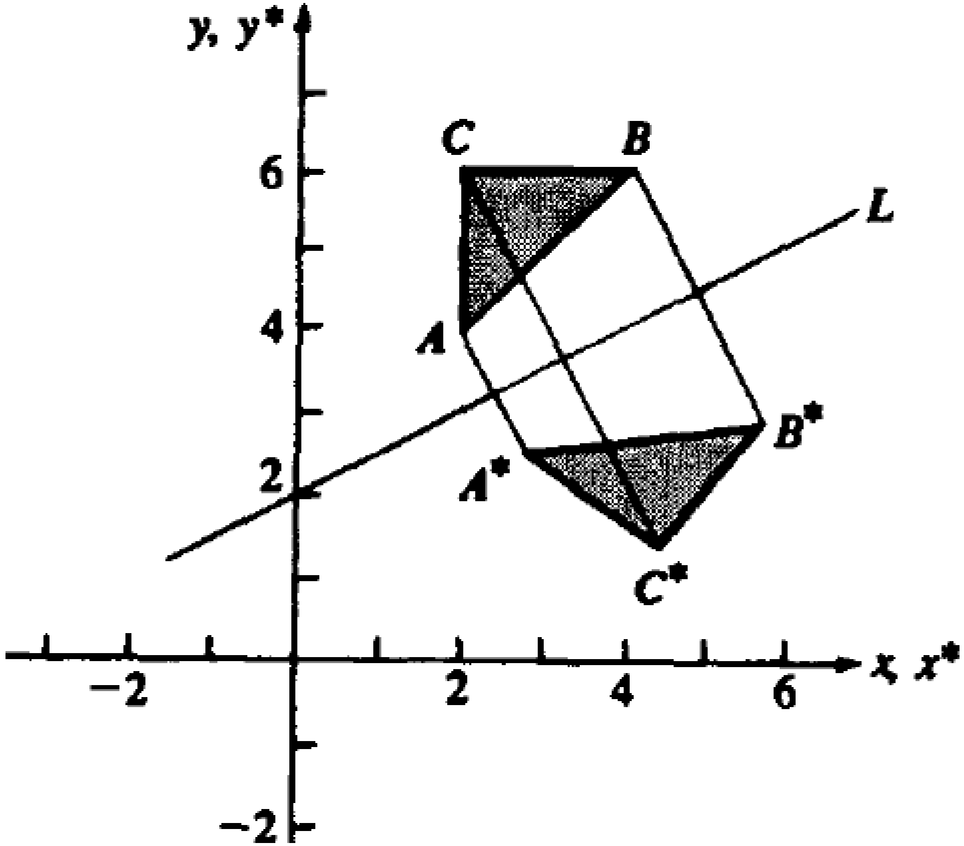
- перемещение линии и объекта таким образом, чтобы линия прошла через начало координат;
- поворот линии и объекта вокруг точки начала координат до совпадения с одной из координатных осей;
- отражение относительно координатной оси;
- обратный поворот вокруг начала координат;
- перемещение в исходное положение.

В матричном виде данное преобразование имеет представление

$$[T] = [T'][R][R'][R]^{-1}[T']^{-1}, \tag{2-53}$$

где T' — матрица перемещения, R — матрица поворота вокруг начала координат, R' — матрица отражения.

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой



ABC: $[2\ 4\ 1]$, $[4\ 6\ 1]$ и $[2\ 6\ 1]$

$$y = \frac{1}{2}(x+4).$$

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой

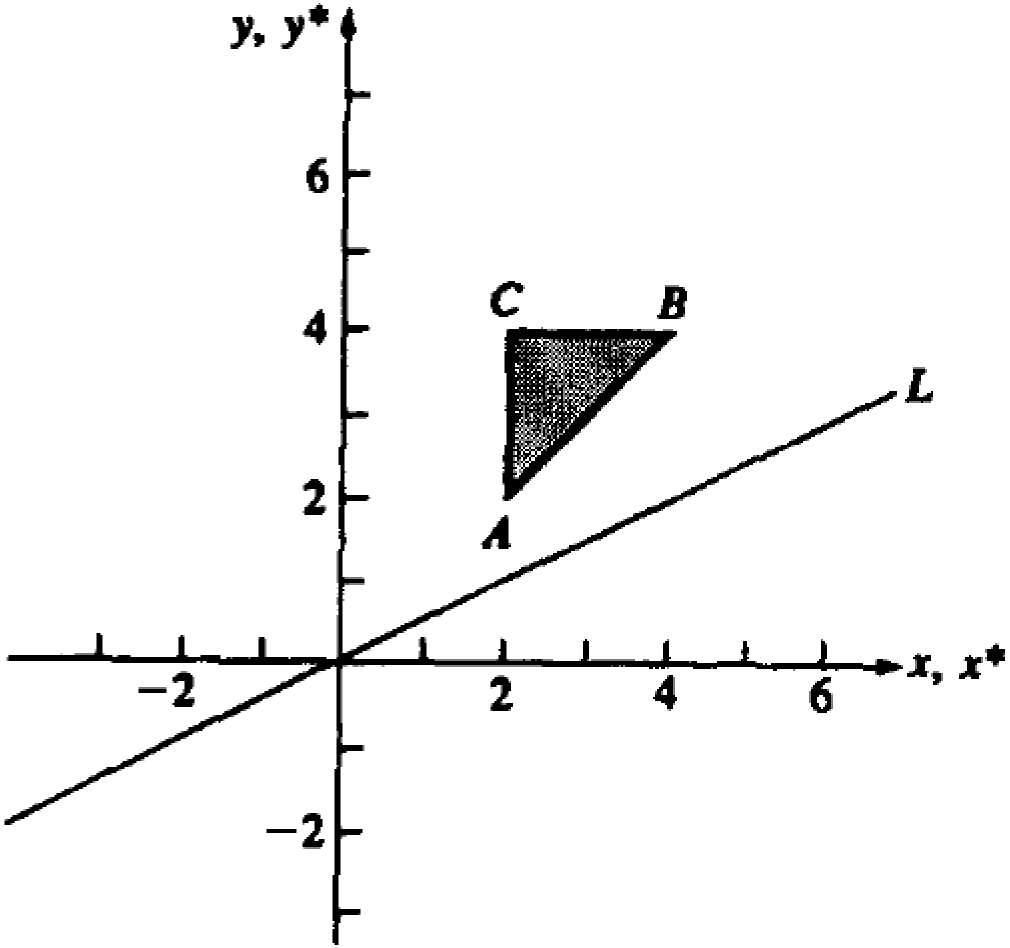
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \quad \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ -8/5 & 16/5 & 1 \end{bmatrix},$$

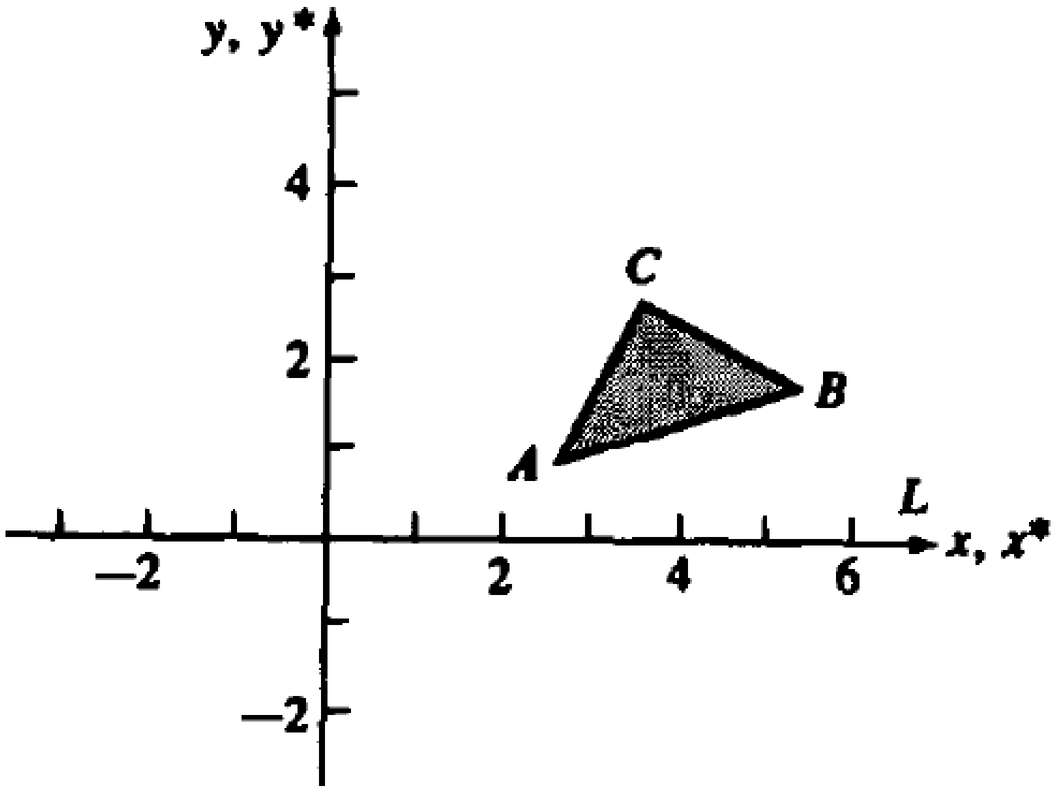
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ -8/5 & 16/5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 & 12/5 & 1 \\ 28/5 & 14/5 & 1 \\ 22/5 & 6/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой



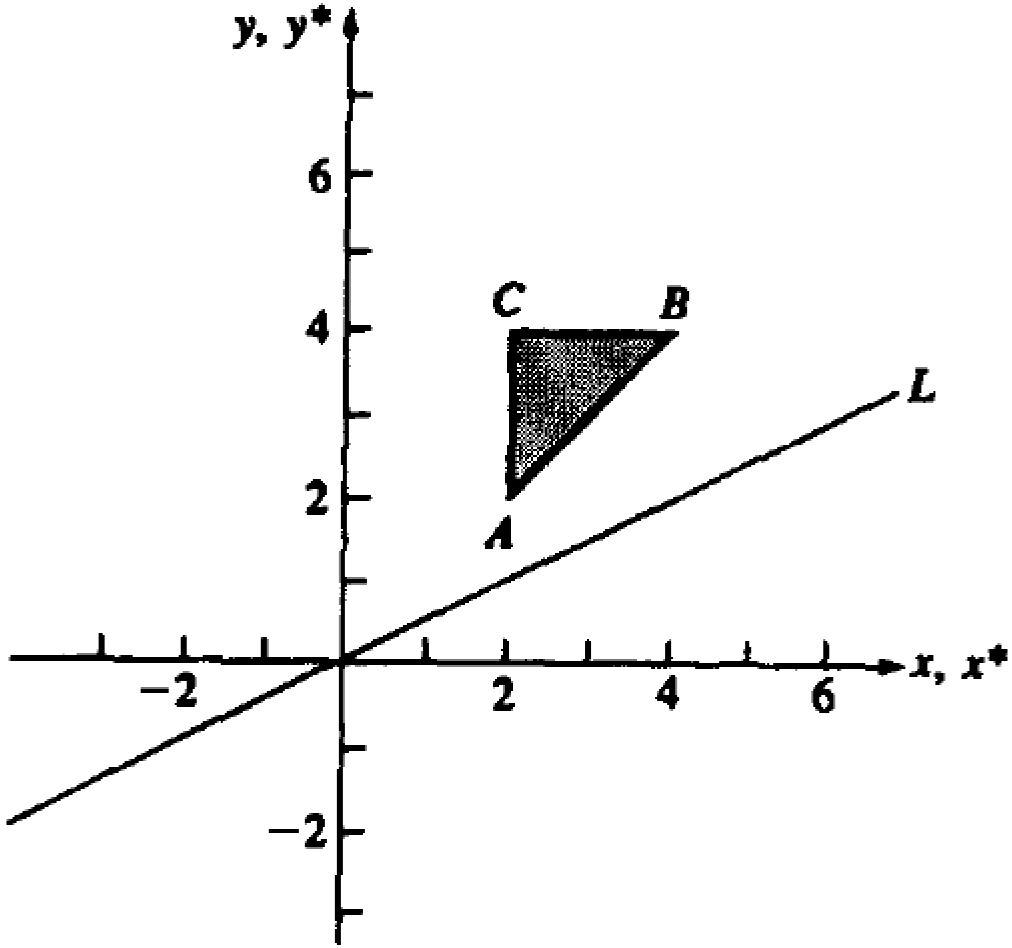
Перенос прямой в начало координат

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой



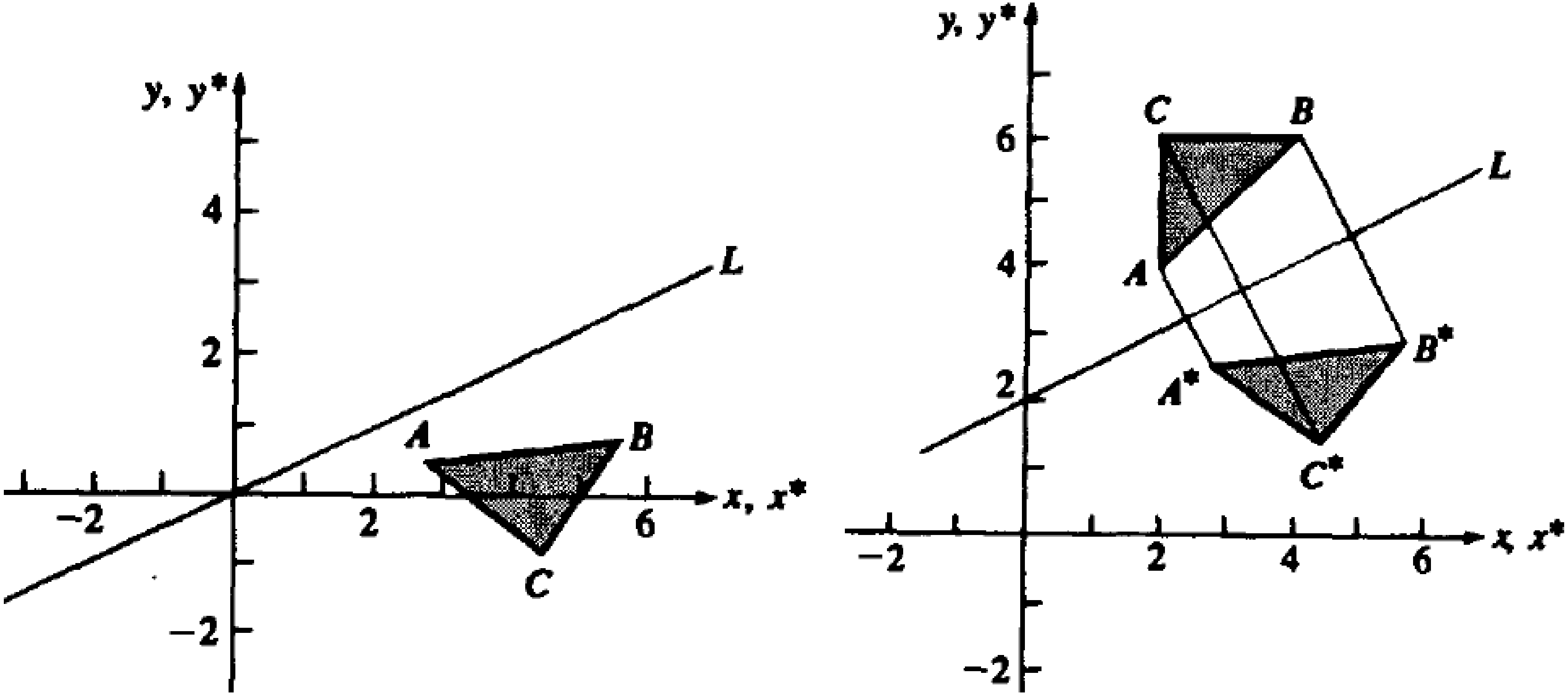
Поворот до совпадения с осью Ox

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой



Отражение относительно оси Ox

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой



Обратный поворот и перенос

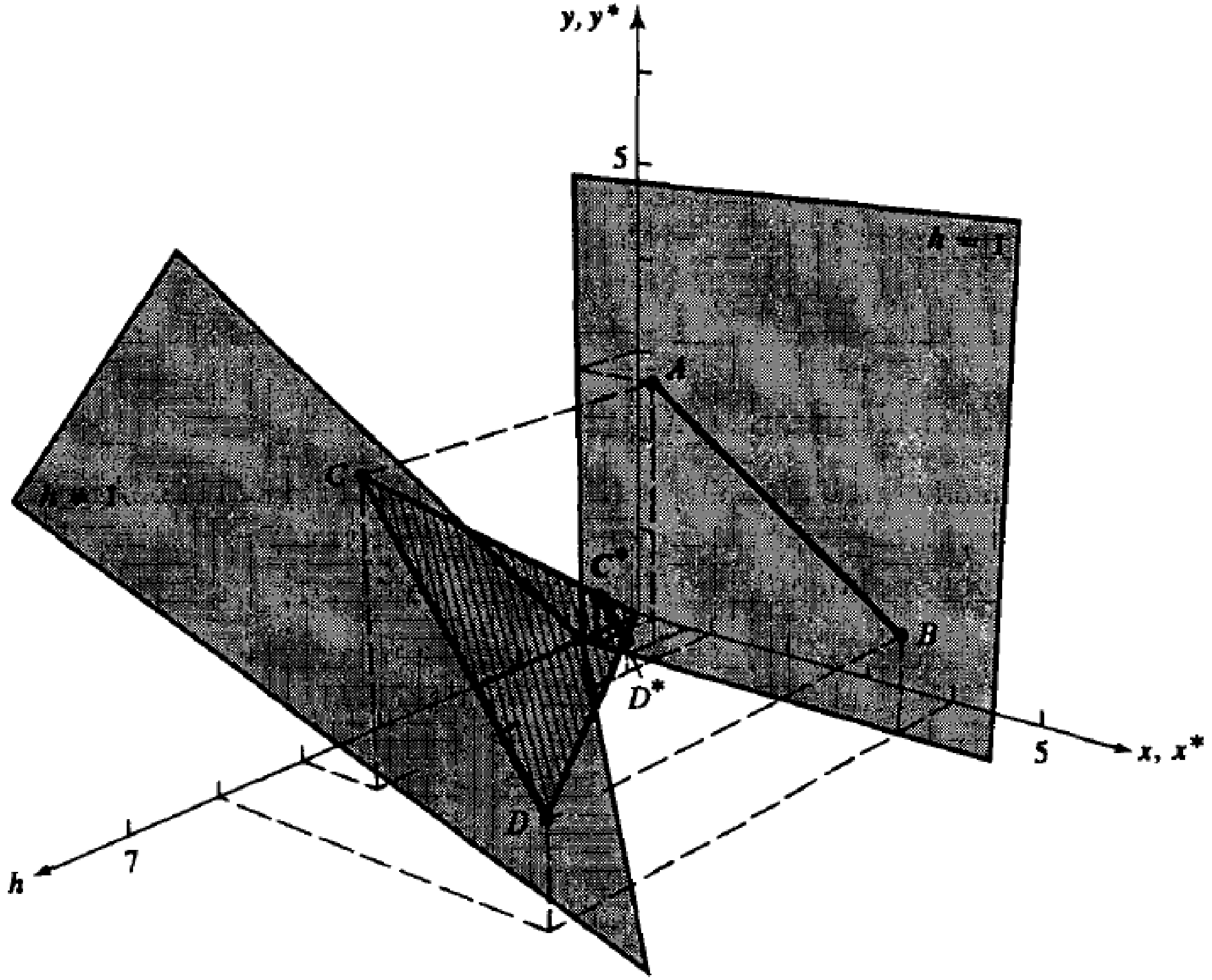
Проецирование – геометрическая интерпретация однородных координат

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & n & \vdots & s \end{bmatrix}. \qquad (2\text{-}54)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hx & hy & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} x & y & (px + qy + 1) \end{bmatrix}. \qquad (2\text{-}55)$$

$$X = hx, Y = hy \text{ и } h = px + qy + 1$$

Проецирование – геометрическая интерпретация однородных координат



Проецирование – геометрическая интерпретация однородных координат

$$x^* = \frac{X}{h} \qquad y^* = \frac{Y}{h}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y}{h} & \frac{Y}{h} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{h} & \frac{Y}{h} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px + qy + 1} & \frac{y}{px + qy + 1} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-56}$$

$$x^* = \frac{X}{h} = \frac{x}{px + qy + 1}, \tag{2-57a}$$

$$y^* = \frac{Y}{h} = \frac{y}{px + qy + 1}. \tag{2-57b}$$

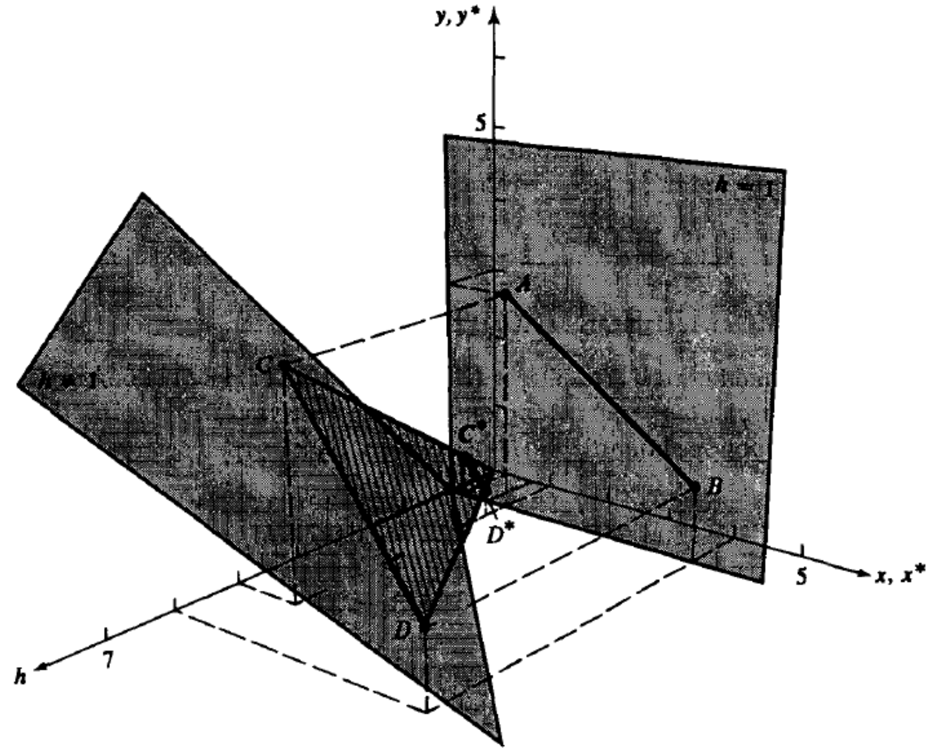
Пример 8. Проецирование в однородных координатах

$p = q = 1$, $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[C*] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[D*] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}.$$



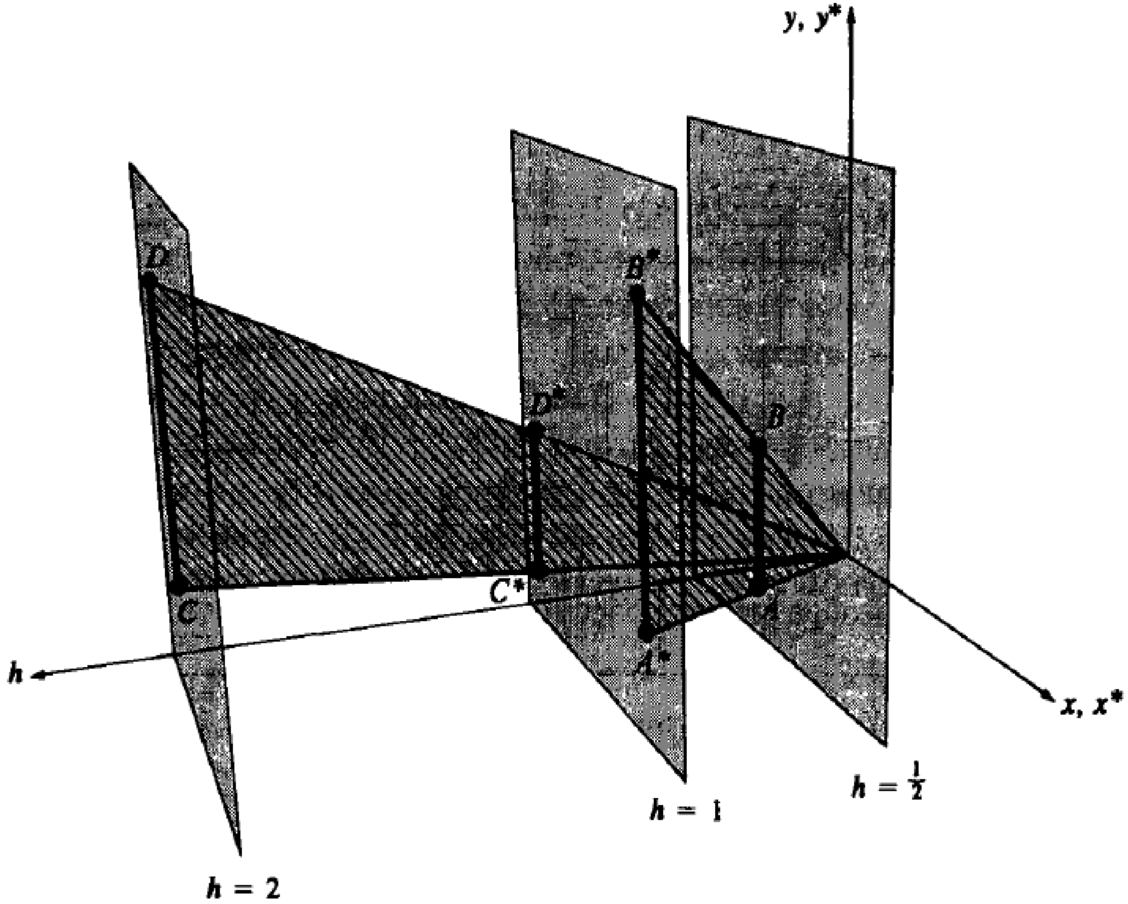
Пропорциональное масштабирование

$$[X \quad Y \quad h] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & s\end{bmatrix} = [x \quad y \quad s]\,. \qquad (2\text{-}58)$$

$X = x$, $Y = y$ и $h = s$.

$X^* = x/s$ и $Y^* = y/s$

$[x \quad y \quad 1]\,[T] = [x/s \quad y/s \quad 1]$



Точки бесконечности

$$x + y = 1,$$
$$2x - 3y = 0.$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y - 1 = 0,$$
$$2x - 3y = 0,$$
$$1 = 1,$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \\ 3/5 & 2/5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Точки бесконечности

$$x + y = 1,$$
$$x + y = 0.$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$x + y - 1 = 0,$$
$$x + y = 0,$$
$$x = x,$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & u \;\; 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -x & 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$