

Лекция 3

Пространственные преобразования

$$[x' \quad y' \quad z' \quad h] = [x \quad y \quad z \quad 1] [T]$$

$$[x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1] = \left[\frac{x'}{h} \quad \frac{y'}{h} \quad \frac{z'}{h} \quad 1 \right]. \quad (3-1)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & i & j & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}. \quad (3-2)$$

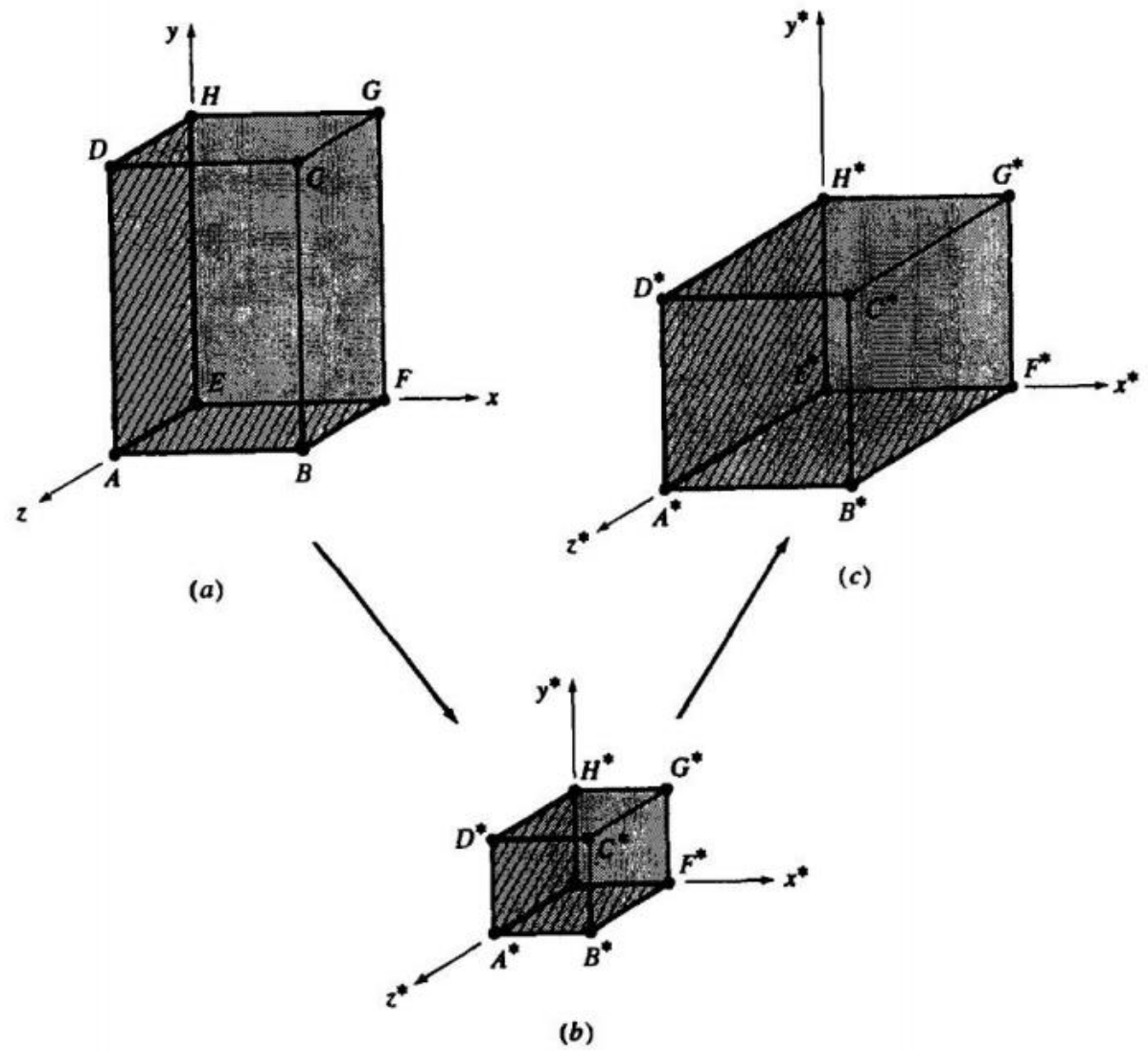
$$\begin{bmatrix} & & & \vdots & 3 \\ & 3 \times 3 & & \vdots & \times \\ & & & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & 1 \times 3 & & \vdots & 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерное масштабирование

$$\begin{aligned} [X][T] &= [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [ax \quad ey \quad jz \quad 1] = [x^* \quad y^* \quad z^* \quad 1], \end{aligned} \quad (3-3)$$

Пример 1. Локальное масштабирование

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X][T] = [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x' \ y' \ z' \ s]. \quad (3-4)$$

$$[x^* \ y^* \ z^* \ 1] = \left[\frac{x'}{s} \ \frac{y'}{s} \ \frac{z'}{s} \ 1 \right]$$

Пример 2. Общее масштабирование

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X'] = [X^*][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

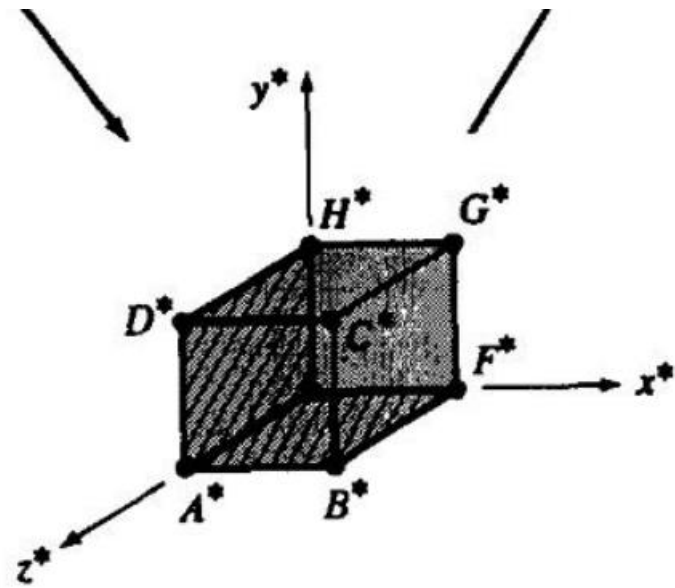
$$[X^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерные сдвиги

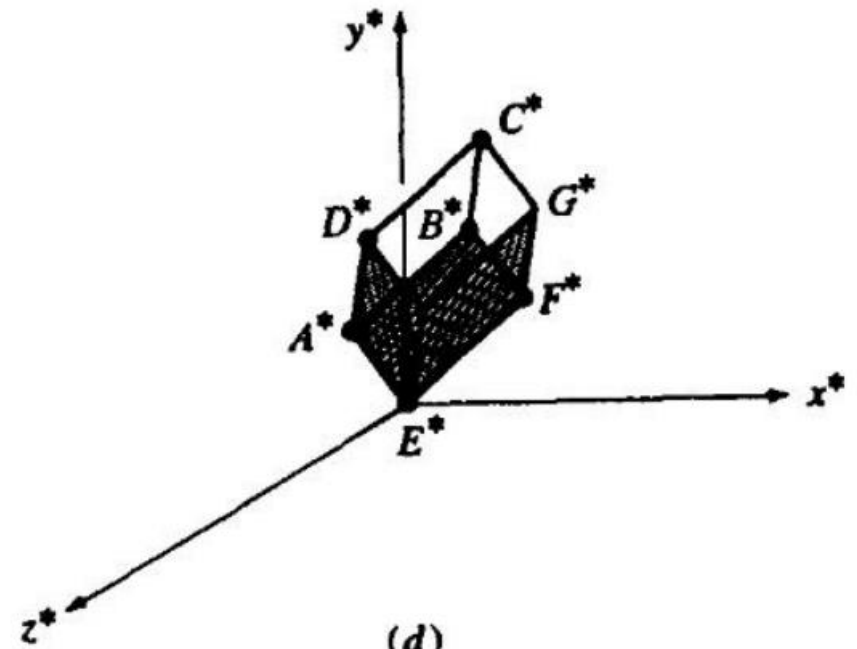
$$\begin{aligned} [X] [T] &= [x \ y \ z \ 1] \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [x + yd + gz \quad bx + y + iz \quad cx + fy + z \quad 1]. \end{aligned} \quad (3-5)$$

Пример 3. Сдвиги

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -0.85 & 0.25 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



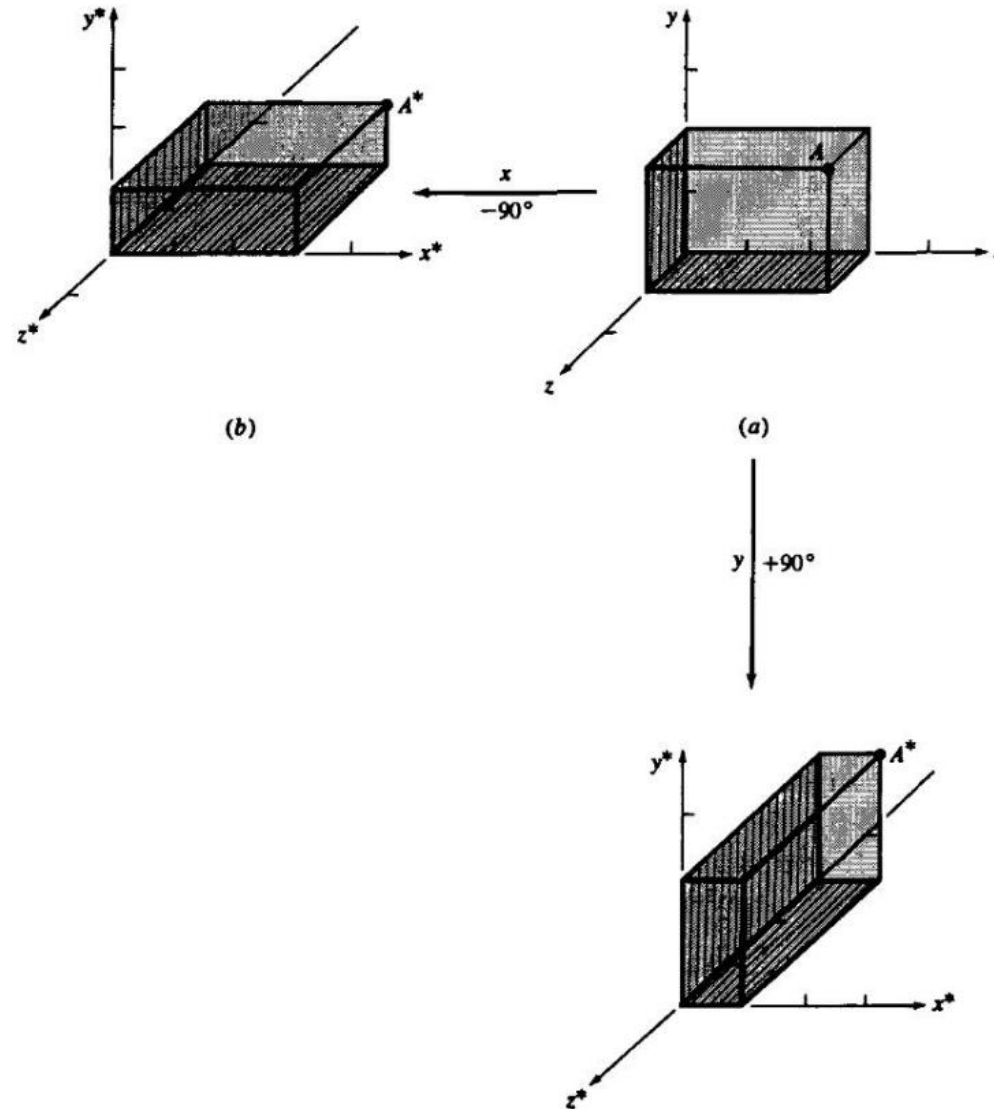
(b)



(d)

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.85 & 0.25 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 0.15 & 1.25 & 1 \\ 0.75 & 1.15 & 1.95 & 1 \\ -0.25 & 2 & 1.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -0.85 & 0.25 & 1 \\ 0.25 & 0.15 & 0.95 & 1 \\ -0.75 & 1 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

Трёхмерное вращение



Трёхмерное вращение

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-6)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-7)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-8)$$

Пример 4. Вращение

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A^*$$

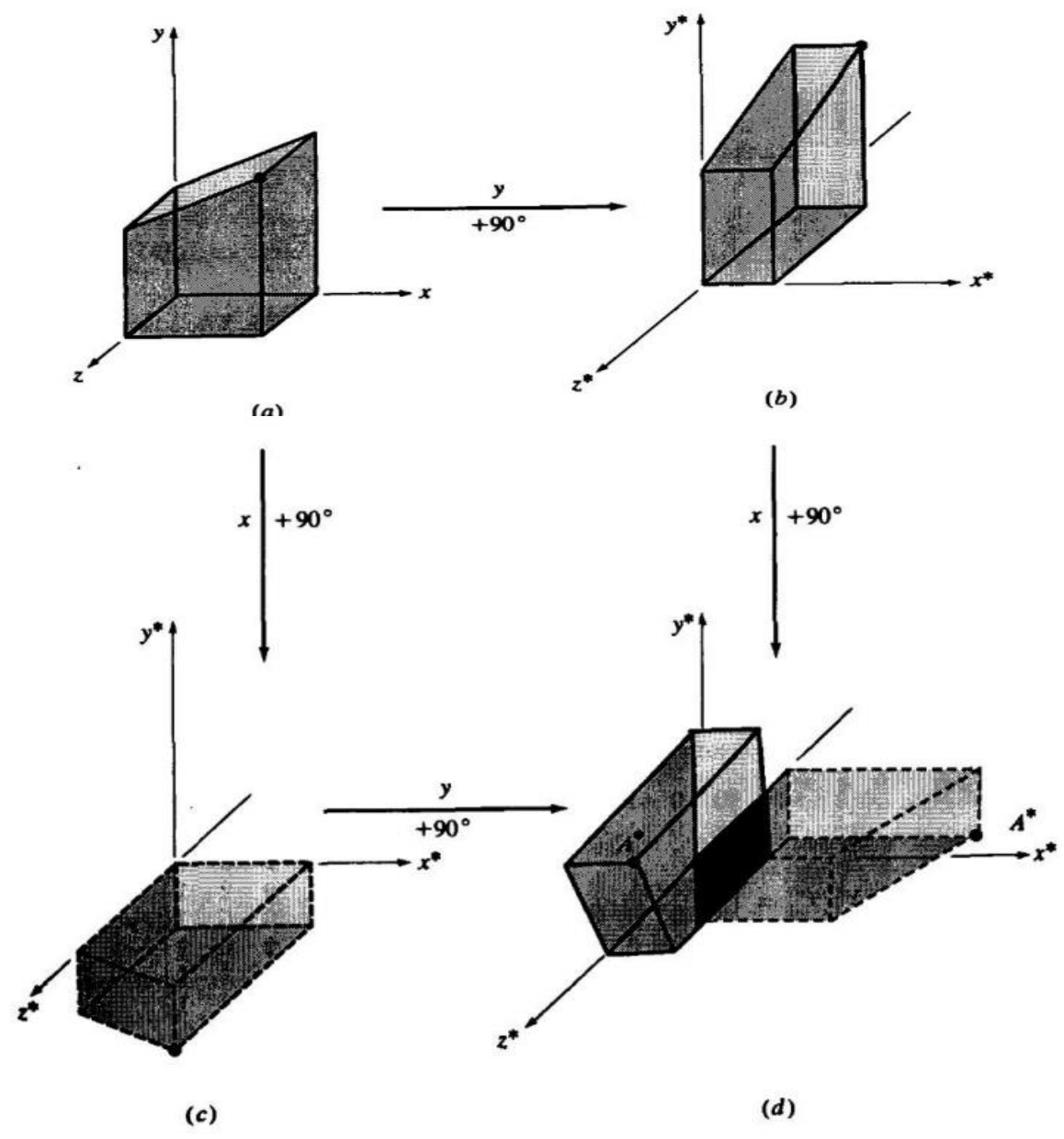
Пример 4. Вращение

$$[T'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X^{*'}] = [X][T'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A^*$$

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & -\sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3-9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3-10}
\end{aligned}$$



Пример 5. Комбинированные повороты

$$[X] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

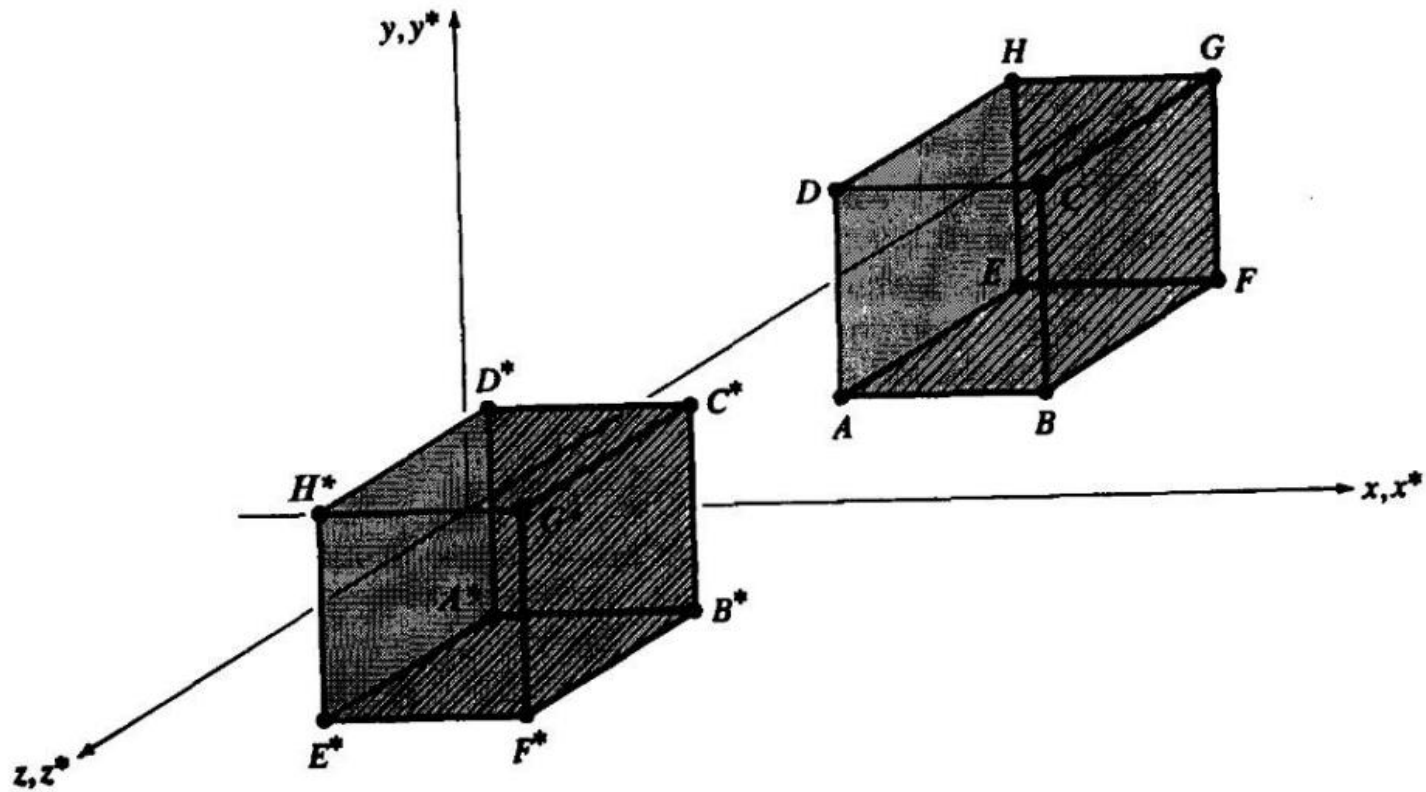
$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A^*$$

Пример 5. Комбинированные повороты

$$[T'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X^{*'}] = [X][T'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} A^{*'}$$

Трёхмерное отражение



Трёхмерное отражение

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-11)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3-12)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-13)$$

Пример 6. Отражение

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Пространственный перенос

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-14)$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad h] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad h] = [(x + l) \quad (y + m) \quad (z + n) \quad 1]. \quad (3-15)$$

$$x^* = x + l,$$

$$y^* = y + m,$$

$$z^* = z + n.$$

Пример 7. Композиции преобразований

$$\begin{aligned}
 [T] &= [Tr][R_x][R_y] = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ l \cos \phi & m \cos \theta & -l \sin \phi & 1 \\ +m \sin \phi \sin \theta & -n \sin \theta & +m \cos \phi \sin \theta & \\ +n \sin \phi \cos \theta & & +n \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix}, \tag{3-16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X][T] &= [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ l \cos \phi & m \cos \theta & -l \sin \phi & 1 \\ +m \sin \phi \sin \theta & -n \sin \theta & +m \cos \phi \sin \theta & \\ +n \sin \phi \cos \theta & & +n \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (x+l) \cos \phi & (y+m) \cos \theta & -(x+l) \sin \phi & 1 \\ +(y+m) \sin \phi \sin \theta & -(z+n) \sin \theta & +(y+m) \cos \phi \sin \theta & \\ +(z+n) \sin \phi \cos \theta & & +(z+n) \cos \phi \cos \theta & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[X][T] = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 & 0 \\ 0.354 & 0.866 & 0.354 & 0 \\ 0.612 & -0.5 & 0.612 & 0 \\ -1.673 & -0.366 & -0.259 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X][T] = [1.768 \quad 0.866 \quad -1.061 \quad 1].$$

$$\begin{aligned}
[X'] &= [X] [Tr] = \\
&= [3 \quad 2 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= [2 \quad 1 \quad 0 \quad 1],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X''] &= [X'] [R_x] = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= [2 \quad 0.866 \quad 0.5 \quad 1],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X'''] &= [X''] [R_y] = [2 \quad 0.866 \quad 0.5 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.707 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
[X'''] &= [1.768 \quad 0.866 \quad -1.061 \quad 1],
\end{aligned}$$

Повороты вокруг оси, параллельной координатной оси

$$[X^*] = [X][T\tau][R_x][T\tau]^{-1}$$

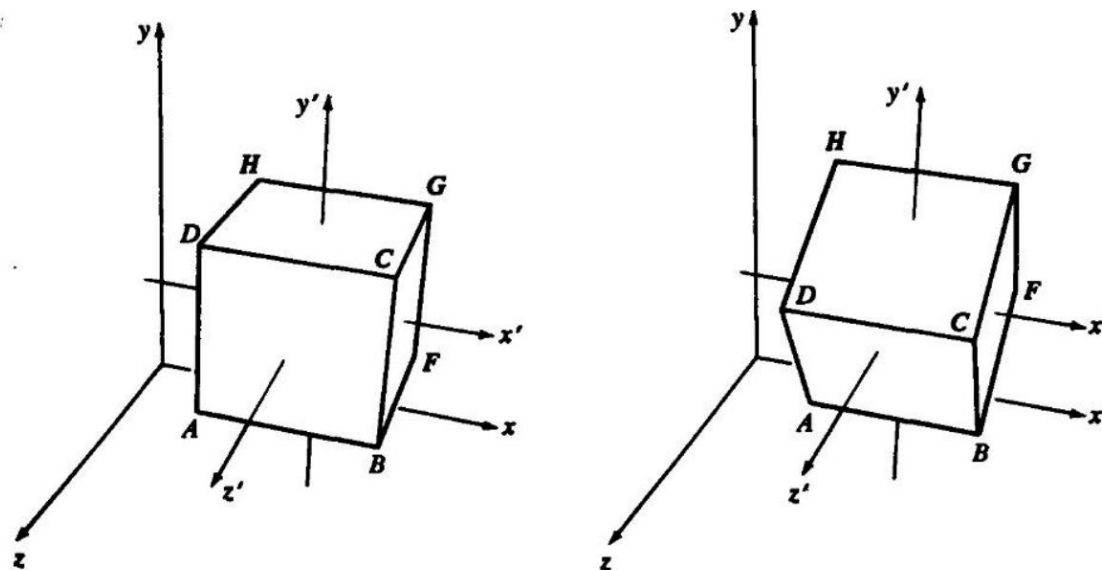
$[X^*]$ — преобразованное тело,

$[X]$ — исходное тело,

$[T\tau]$ — матрица перемещения,

$[R_x]$ — соответствующая матрица поворота,

$[T\tau]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице перемещения.



Пример 8. Единственное относительное вращение

$$[X^*] = [X][T_r][R][T_r]^{-1},$$

где

$$[T_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$[T_r]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_c & z_c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 [T] &= [T_r][R_x][T_r]^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & y_c(1 - \cos \theta) + z_c \sin \theta & z_c(1 - \cos \theta) - y_c \sin \theta & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[X'] = [X][T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0.951 & -0.549 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[X'] = \begin{bmatrix} 1 & 0.817 & 1.683 & 1 \\ 2 & 0.817 & 1.683 & 1 \\ 2 & 1.683 & 2.183 & 1 \\ 1 & 1.683 & 2.183 & 1 \\ 1 & 1.317 & 0.817 & 1 \\ 2 & 1.317 & 0.817 & 1 \\ 2 & 2.183 & 1.317 & 1 \\ 1 & 2.183 & 1.317 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix}.$$

Пример 9. Несколько относительных вращений

$$[X'] = [X] [T] = [X] [T_r] [R_y] [R_x] [T_r]^{-1}.$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_c & -y_c & -z_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

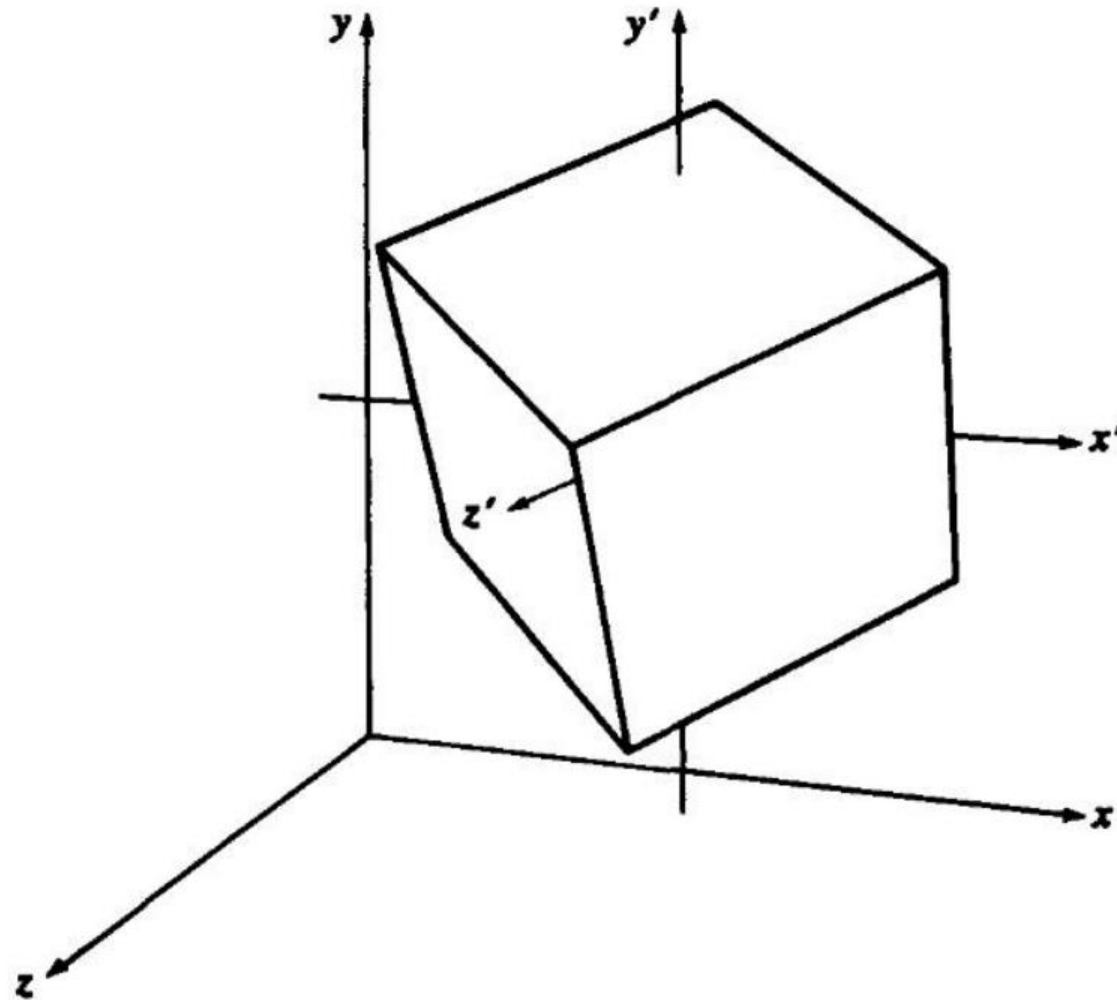
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_c & y_c & z_c & 1 \end{bmatrix}$$

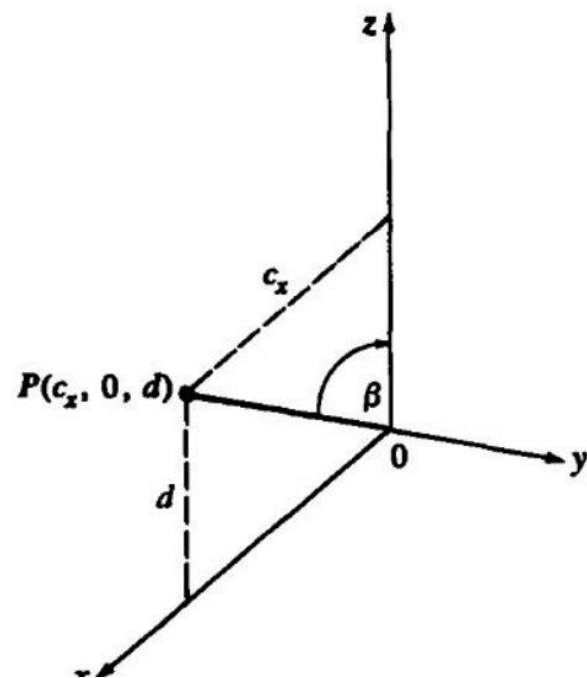
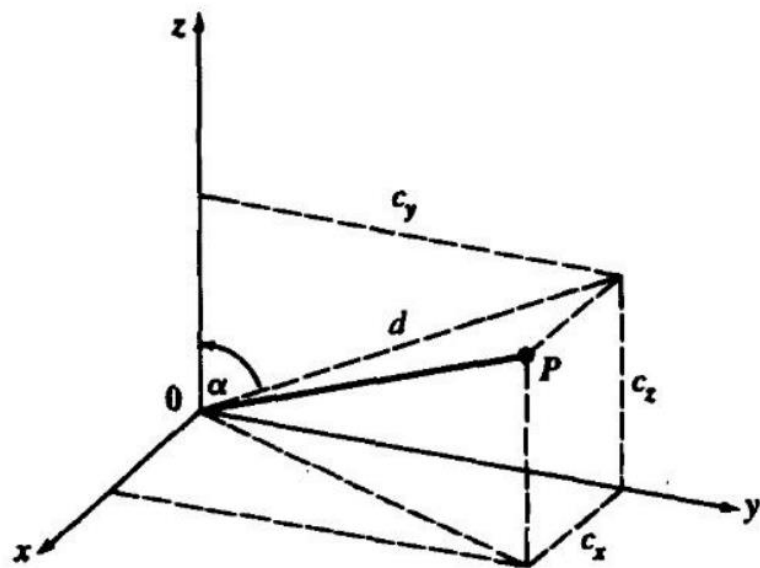
$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \sin \theta & -\sin \phi \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & 0 \\ x_c(1 - \cos \phi) & -x_c \sin \phi \sin \theta & x_c \sin \phi \cos \theta & 1 \\ -z_c \sin \phi & +y_c(1 - \cos \theta) & -y_c \sin \theta & \\ & +z_c \cos \phi \sin \theta & +z_c(1 - \cos \phi \cos \theta) & \end{bmatrix}. \quad (3-17)$$

$$[X'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.354 & 0.612 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.707 & -0.354 & 0.612 & 0 \\ 1.5 & 1.262 & -1.087 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[X'] = \begin{bmatrix} 0.793 & 1.067 & 1.25 & 1 \\ 1.5 & 0.713 & 1.862 & 1 \\ 1.5 & 1.579 & 2.362 & 1 \\ 0.793 & 1.933 & 1.75 & 1 \\ 1.5 & 1.421 & 0.638 & 1 \\ 2.207 & 1.067 & 1.25 & 1 \\ 2.207 & 1.933 & 1.75 & 1 \\ 1.5 & 2.287 & 1.138 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот относительно произвольной оси в пространстве





$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2}$$

(3-18)

$$\cos \alpha = \frac{c_z}{d}, \quad \sin \alpha = \frac{c_y}{d}$$

(3-19)

$$\cos \beta = d, \quad \sin \beta = c_x. \quad (3-20)$$

$$[M] = [T] [R_x] [R_y] [R_\delta] [R_y]^{-1} [R_x]^{-1} [T]^{-1}, \quad (3-21)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-22)$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & c_y/d & 0 \\ 0 & -c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

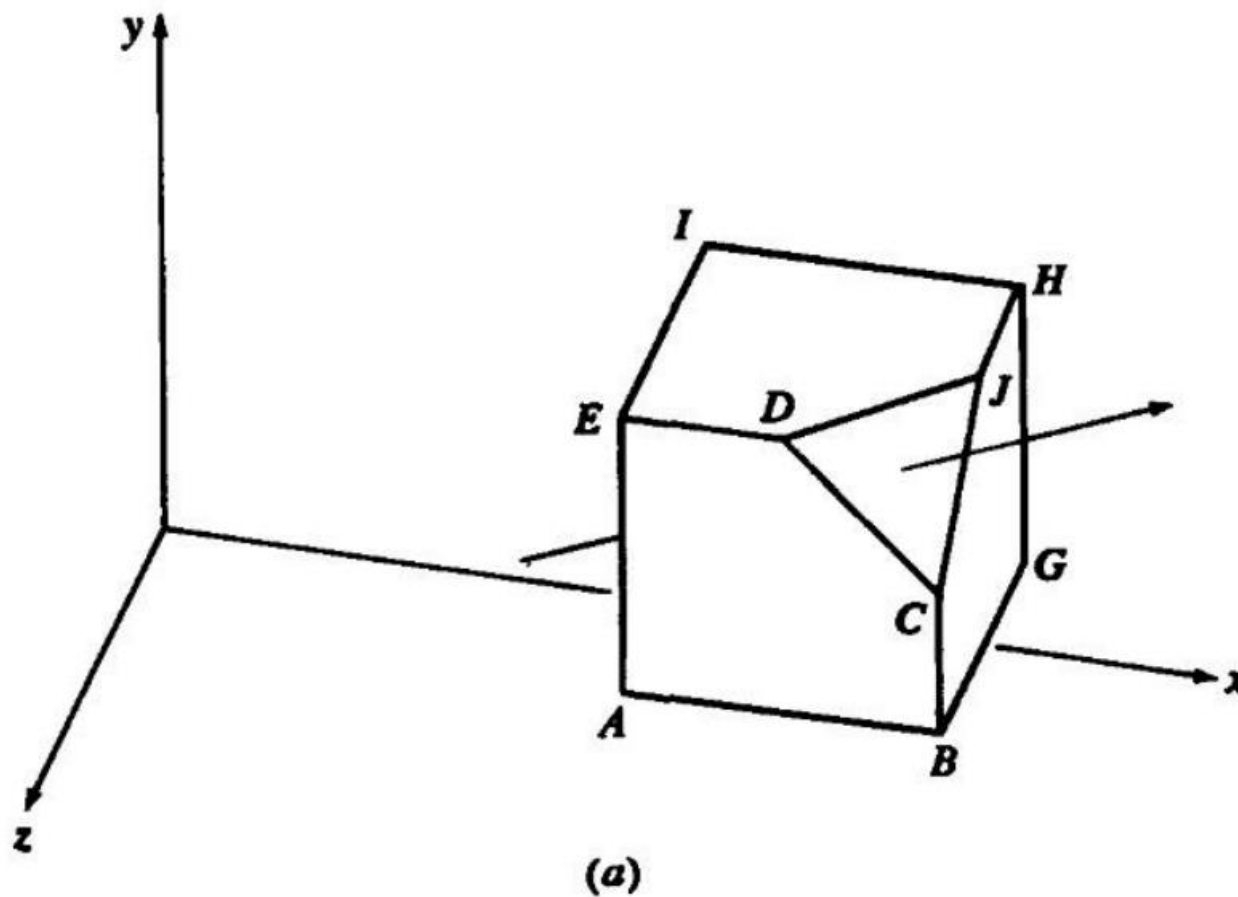
$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-24)$$

$$[R]_{\delta} = \begin{bmatrix} -\cos \delta & \sin \delta & 0 & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-25)$$

$$[V] = [(x_1 - x_0) (y_1 - y_0) (z_1 - z_0)].$$

$$[c_x \quad c_y \quad c_z] = \frac{[(x_1 - x_0) \quad (y_1 - y_0) \quad (z_1 - z_0)]}{[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3-26)$$

Пример 10. Поворот вокруг произвольной оси



$$[X] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{matrix}$$

$$[c_x \quad c_y \quad c_z] = \frac{[(3-2) \quad (2-1) \quad (2-1)]}{((3-2)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2)^{1/2}} =$$

$$= [1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3}].$$

$$d = \sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{2/3}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(1/\sqrt{3}/\sqrt{2/3}) = \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = 45^\circ,$$

$$\beta = \cos^{-1}(\sqrt{2/3}) = 35, 26^\circ.$$

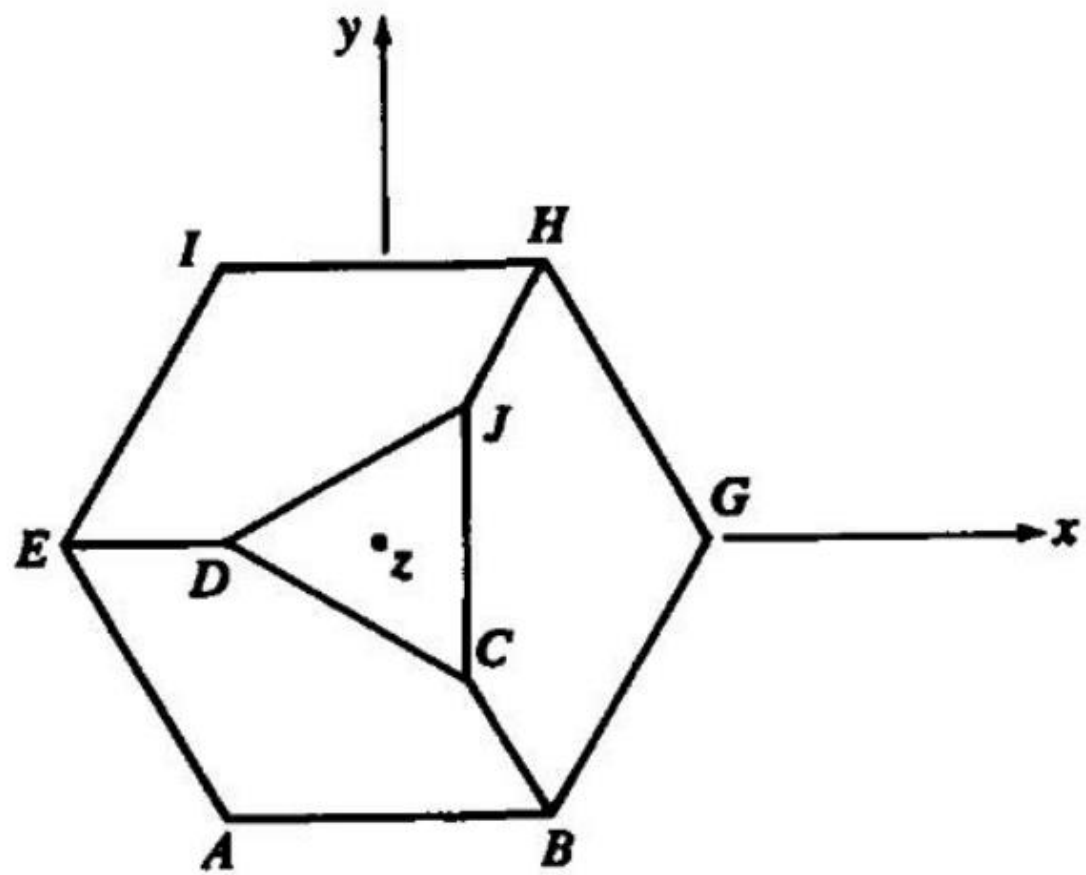
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[M] = [T][R_x][R_y] = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -4\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[X][M] = \begin{bmatrix} -0.408 & -0.707 & 0.577 & 1 \\ 0.408 & -0.707 & 1.155 & 1 \\ 0.204 & -0.354 & 1.443 & 1 \\ -0.408 & 0 & 1.443 & 1 \\ -0.816 & 0 & 0.155 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.816 & 0 & 0.577 & 1 \\ 0.408 & 0.707 & 1.155 & 1 \\ -0.408 & 0.707 & 0.577 & 1 \\ 0.204 & 0.354 & 1.443 & 1 \end{bmatrix}.$$

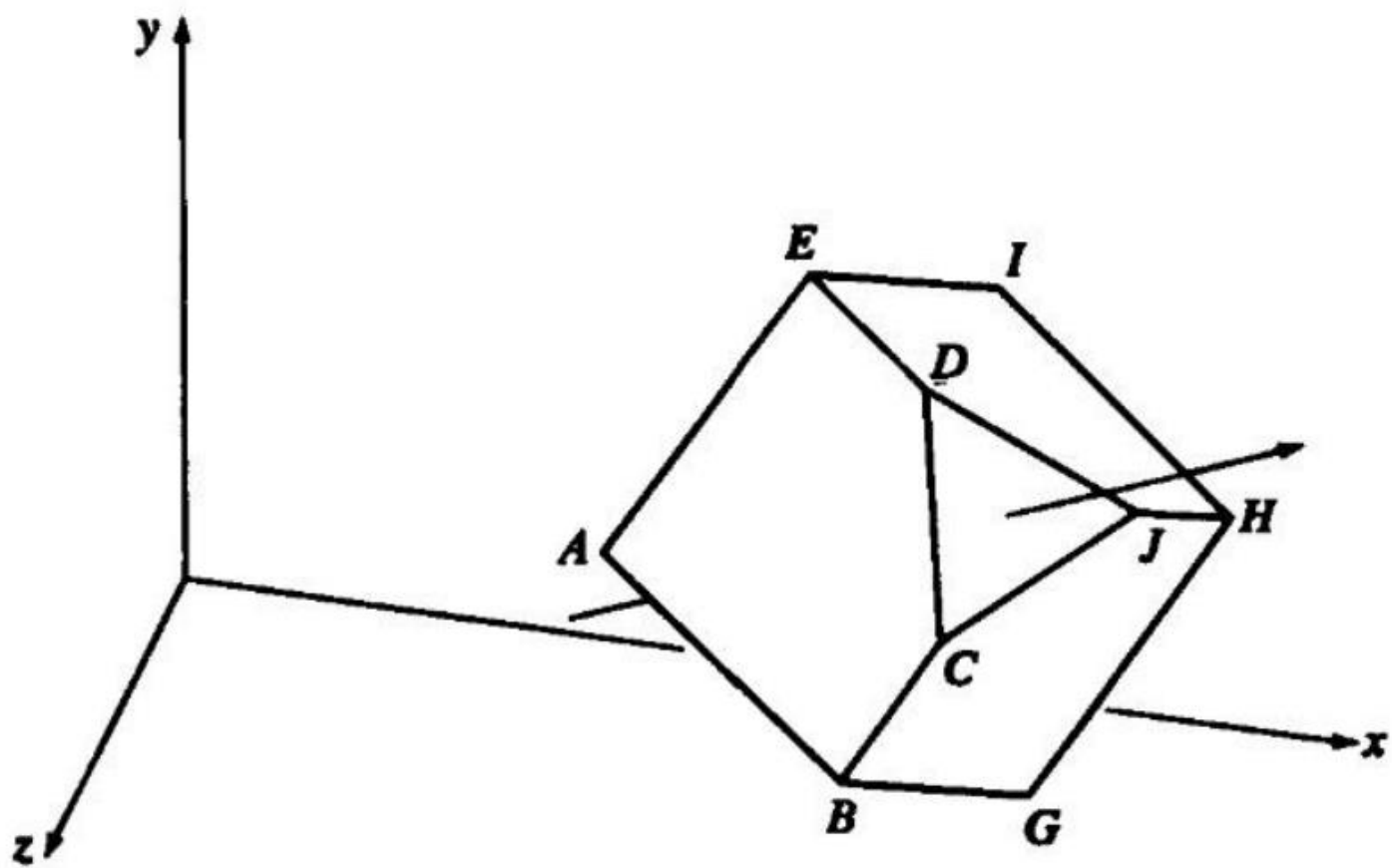


(b)

$$[R_\delta] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [M]^{-1} = [R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X][M][R_\delta][M^{-1}] = \begin{bmatrix} 1.689 & 1.506 & 1.805 & 1 \\ 2.494 & 1.195 & 2.311 & 1 \\ 2.747 & 1.598 & 2.155 & 1 \\ 2.598 & 2.155 & 1.747 & 1 \\ 2.195 & 2.311 & 1.494 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2.805 & 0.689 & 1.506 & 1 \\ 3.311 & 1.494 & 1.195 & 1 \\ 2.506 & 1.805 & 0.689 & 1 \\ 3.155 & 1.747 & 1.598 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M][R_\delta][M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.805 & -0.311 & 0.506 & 0 \\ 0.506 & 0.805 & -0.311 & 0 \\ -0.311 & 0.506 & 0.805 & 0 \\ 0.195 & 0.311 & -0.506 & 1 \end{bmatrix}$$



(c)

Отражение относительно произвольной плоскости

- перенести точку P , принадлежащую плоскости отражения, в начало системы координат;
- повернуть вектор нормали к плоскости отражения в начале координат до совпадения с осью $+z$ (теперь плоскость отражения будет совпадать с координатной плоскостью);
- отразить объект относительно координатной плоскости $z = 0$;
- выполнить обратные преобразования.

$$[M] = [T][R_x][R_y][Rflt_z][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}$$

$Rflt_z$ — матрица отражения относительно плоскости $z = 0$,

$(x_0, y_0, z_0) = (P_x, P_y, P_z)$ — координаты точки P на плоскости отражения

$$[\hat{n}] = [c_x \quad c_y \quad c_z] = \frac{[a \quad b \quad c]}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ — вектор нормали к плоскости отражения}$$

Пример 11. Отражение куба относительно плоскости CDJ

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3/2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

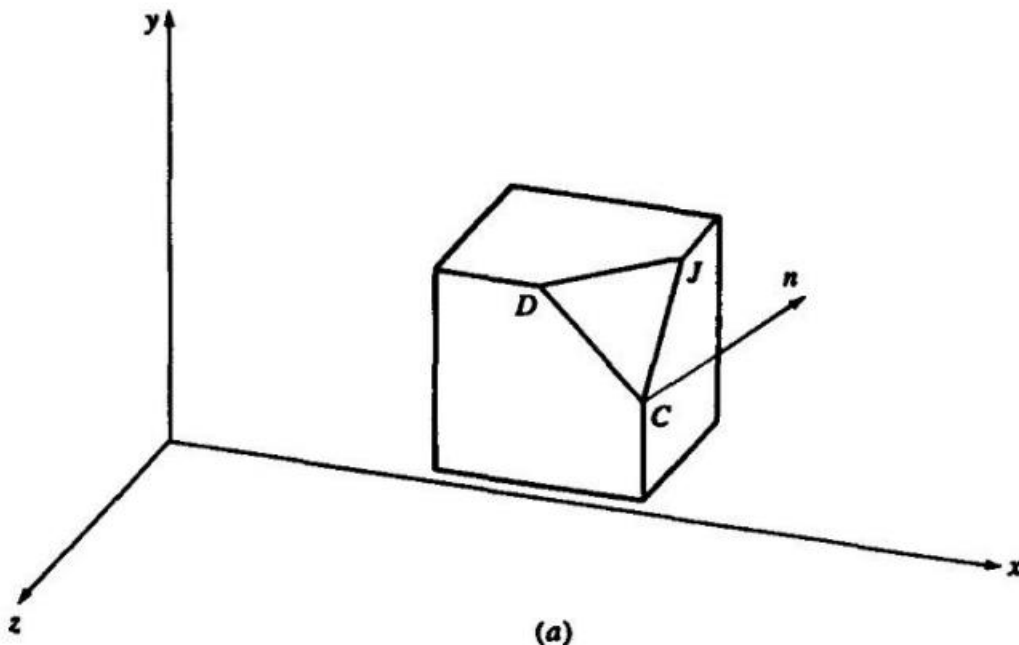
$$\begin{aligned} n &= ([J] - [C]) \times ([D] - [C]) = \\ &= [(3 - 3) \quad (2 - 1.5) \quad (1.5 - 2)] \times [(2.5 - 3) \quad (2 - 1.5) \quad (2 - 2)] = \\ &= [0 \quad 1/2 \quad -1/2] \times [-1/2 \quad 1/2 \quad 0] = [1/4 \quad 1/4 \quad 1/4]. \end{aligned}$$

-нормаль до переноса

$$\hat{n} = [1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3}].$$

$$d = \sqrt{n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2} = \sqrt{2/3}$$

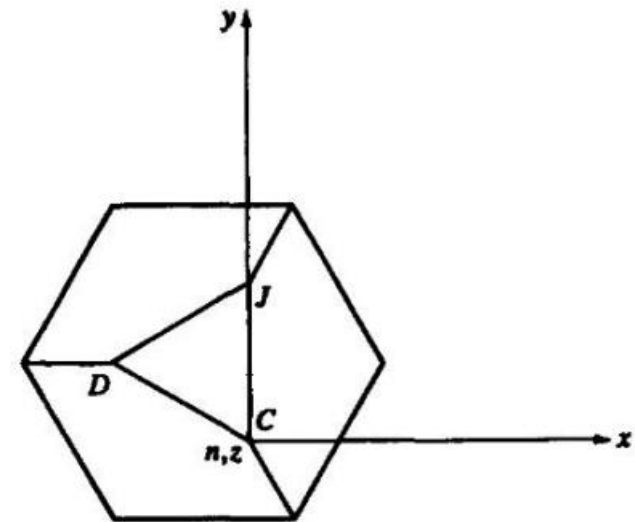
$$\alpha = 45^\circ, \beta = 35.26^\circ$$



$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R_y] = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = [T][R_x][R_y] = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -5/2\sqrt{6} & 1/2\sqrt{2} & -13/2\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X][M] = \begin{bmatrix} -0.612 & -0.354 & -0.876 & 1 \\ 0.204 & -0.354 & -0.287 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.612 & 0.354 & 0 & 1 \\ -1.021 & 0.354 & -0.287 & 1 \\ -0.204 & 0.354 & -1.443 & 1 \\ 0.612 & 0.354 & -0.876 & 1 \\ 0.204 & 1.061 & -0.287 & 1 \\ -0.612 & 1.061 & -0.876 & 1 \\ 0 & 0.707 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[Rflt] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [M]^{-1} = [R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 3 & 3/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[X][M][Rflt][M]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 10/3 & 4/3 & 7/3 & 1 \\ 3 & 3/2 & 2 & 1 \\ 5/2 & 2 & 2 & 1 \\ 7/3 & 7/3 & 7/3 & 1 \\ 11/3 & 8/3 & 8/3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 10/3 & 7/3 & 4/3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M][Rflt][M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 13/3 & 13/3 & 13/3 & 1 \end{bmatrix}$$

