УМФ
Лекция 5
1-й семестр – осень 2018 г
Разделение переменных в линейных уравнениях

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

30 октября 2018 г.

Линейные уравнения старших порядков

$$\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N},\ \mathbf{i} = (i_1, .., i_n) \in\ \mathbb{Z}_+^n \text{ – мультииндекс, } |\mathbf{i}| = i_1 + .. + i_n;$$

$$p_{\mathbf{i}}^k = \frac{\partial^k}{(\partial q_1)^{i_1} \dots (\partial q_n)^{i_n}},\ |\mathbf{i}| = k \in \mathbb{N},\ p_{\mathbf{0}}^0 = 1.$$

– частная производная порядка k по координатам $q_1, \dots, q_n$;

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\mathbf{i}|=k} c_{\mathbf{i}}(q_1, .., q_n) p_{\mathbf{i}}^k,$$

– линейный дифференциальный оператор порядка m (коэффициенты $c_{\mathbf{i}}$ заданы).

Пусть $u = u(q_1, ..q_n)$ – функция. Действие $u \mapsto \mathcal{L}u$ состоит в замене p_j^k соответствующими частными производными от u, чем и определяется функция-образ $\mathcal{L}u$. Отображение $u \mapsto \mathcal{L}u$ линейно.

Линейное уравнение имеет вид $\mathcal{L}u = f$ где f – заданная функция; если $f = 0$ уравнение однородно.

Введём обозначение $p_j^k = p_{(0,..,0,k,0,..,0)}^k$, где ненулевой элемент – на j–том месте, так что $p_j^k = \partial^k/(\partial q_j)^k$, $k = 1, 2, \dots$.

Разделение переменных. Элементарные решения.

Рассмотрим уравнения линейные однородные уравнения специального вида

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \lambda = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

Разделение переменных в таком уравнении состоит в определении значений параметра λ, при которых уравнение имеет так называемые *элементарные решения*, представимые произведениями

$$u = u_1(q_1) \cdots u_n(q_n) \tag{2}$$

и, конечно, в нахождении этих решений. Особо интересны семейства элементарных решений, зависящие от параметров, и выражения λ через эти параметры.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (1)

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}_j(p_j^1, ..., p_j^m, q_j), \;\; \mathcal{L}_j = \sum_{k=0}^{m} c_{jk}(q_j)p_j^k, \;\; p_0^0 = 1. \tag{3}$$

Ищем решение вида (2). Имеем

$$\mathcal{L}_j u = u_1(q_1) \ldots u_{j-1}(q_{j-1}) \left((\mathcal{L}_j u_j)(q_j) \right) u_{j+1}(q_{j+1}) \ldots u_n(q_n). \tag{4}$$

Отсюда, поделив уравнение (1) на u, находим

Принцип суперпозици

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathcal{L}_j u_j}{u_j} = \lambda \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\mathcal{L}_j u_j}{u_j} = 0 \qquad (5)$$

(так как каждое слагаемое в левой части уравнения, стоящего в (5) слева от знака импликации, зависит только от q_j), и уравнение (5) расщепляется на n уравнений

$$\mathcal{L}_j u_j = \lambda_j u_j, \ \lambda_j = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \ j = 1, ..n; \ \lambda = \lambda_1 + .. + \lambda_n. \qquad (6)$$

Итак, мы пришли от уравнения с частными производными и с n независимыми переменными к n независимым линейным однородным ОДУ, зависящим от параметров λ_j. Для конкретных классов уравнений возможно весьма детальное исследование решений этих ОДУ.

Важное отличие линейных уравнений от нелинейных заключено в так называемом *принципе суперпозиции:*
линейная комбинация любой системы решений любого линейного однородного уравнения есть решение этого уравнения.
Если уравнение допускает разделение переменных, то, в силу принципа суперпозиции, решением будет любая линейная комбинация элементарных решений, например, такая

Уравнение теплопроводности (диффузии, тепловое)

$$\sum_{\lambda} \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=\lambda} \varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) u_1(q_1,\lambda_1)\cdots u_n(q_n,\lambda_n), \tag{7}$$

где $\lambda, \lambda_1, \cdot, \lambda_n$ пробегают подмножество некоторой дискретной решетки в $\mathbb{C}^{n+1}$, возможно, содержащее бесконечное число точек, то есть, суммы (7), возможно, представляют собой ряды. Принцип суперпозиции распространяется и на континуальные аналоги линейных комбинаций, так что решение можно получить в виде интеграла:

$$\int\limits_{\substack{C_1\times\ldots\times C_n\times C \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=\lambda}} u_1(q_1,\lambda_1)\cdots u_n(q_n,\lambda_n)\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)d\lambda_1 d\lambda_2\ldots d\lambda_n d\lambda, \tag{8}$$

где $\lambda \in C$, $\lambda_j \in C_j$, C, C_j – контуры в $\mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 1. Уравнение теплопроводности (тепловое, диффузии):

$$u_t = \nu u_{xx}, \ \nu = \mathrm{const} > 0 \tag{9}$$

Пусть $\nu = 1$. Имеем уравнение (1) с $\mathcal{L} = p_1 - p_2^2$, $q_1 = t, q_2 = x$, $\lambda = 0$, и оно имеет вид (3), где $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 = p_1$, $\mathcal{L}_2 = -p_2^2$. Уравнения (6) пишутся так: $u_{1t} = \lambda_1 u_1$; $-u_{2xx} = \lambda_2 u_2$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Элементарные решения теплового уравнения.

Решаем полученные ОДУ при $\lambda_1 = z \neq 0$ и находим

$$u_1 = c_1 \mathrm{e}^{zt}; \quad u_2 = c_2 \mathrm{e}^{\mu x} + c_3 \mathrm{e}^{-\mu x} = \tilde{c}_2 \operatorname{ch} \mu x + \widetilde{c}_3 \operatorname{sh}^{\mu x}, \ \mu^2 = z, \ \mathrm{Re}\,\mu \geq 0.$$

последнее неравенство нужно лишь для того, чтобы определить μ однозначно.
Замечание 1. Однозначность достигается в комплексной плоскости с разрезом по отрицательному лучу вещественной оси. Берега разреза отображаются в верхний и нижний лучи мнимой оси

Итак, подстановка $z = \mu^2$ даёт 1-параметрическое семейство решений уравнения $u_t - u_{xx} = 0$:

$$u = \mathrm{e}^{\mu^2 t} \left(a \operatorname{ch} \mu x + \frac{b \operatorname{sh} \mu x}{\mu} \right), \ \mu \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\,\mu \geq 0; \tag{10}$$

где a, b – произвольные постоянные. Предельный переход отсюда при $\mu \to 0$ даёт решение

$$a + bx.$$

Решения общего уравнения (9) получаются заменой $t \mapsto \nu t$.

Замечание 2. Если $u = u(x, t)$ решение уравнения $u_t = u_{xx}$, то $v = u(\alpha\tau, \beta y)$ – решение уравнения $v_\tau = \nu v_{yy}$, где $\nu = \alpha/\beta^2$,

Задача о погребе (о температуре Земли, Океана...)

Задача о погребе (о температуре Земли, Океана...)

$$v_\tau = \nu v_{yy},\ y > 0,\ \tau \in \mathbb{R};\ v|_{y=0} = A_0 \cos(\Omega\tau + \chi_0) \qquad (11)$$

$$v(y, \tau + T) \equiv v(y, \tau + T),\ T\Omega = 2\pi,\ \sup_{y>0} |v(y, \tau)| < \infty, \qquad (12)$$

$v(y, \tau)$ – температура на глубине y в момент времени τ; граничные данные моделируют колебания температуры на поверхности. Период колебаний T и амплитуда A_0 заданы. Разыскиваем *решение, T–периодическое по времени.*

В (1-2) полагаем $v(y, \tau) = Au(y/h, \nu\tau/h^2)$. Находим

$$u_t = u_{xx},\ x > 0,\ t \in \mathbb{R};\ u|_{x=0} = \cos(\omega t + \chi_0); \qquad (13)$$

$$u(x, t + 2\ell) \equiv u(x, t),\ \ell\omega = \pi,\ \sup_{x>0} |u(x, t)| < \infty. \qquad (14)$$

Здесь h – единица длины (например, глубина погреба), A_0 – единица температуры, h^2/ν – единица времени; $\omega = \Omega h^2/\nu$ – безразмерная частота, ℓ – полупериод (безразмерный). Зависимые и независимые переменные в (13-14) также безразмерны. Так как $\cos(\omega t + \chi) = \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{i(\omega t + \chi_0)}$, в (13-14) полагаем $u = \mathrm{Re}\, w$. Приходим к задаче

$$w_t = w_{xx},\ x > 0,\ t \in \mathbb{R};\ w|_{x=0} = \mathrm{e}^{i(\omega t + \chi_0)},$$

$$w(x, t + 2\ell) \equiv w(x, t),\ \sup_{x>0} |w(x, t)| < \infty.$$

Скин-эффект и другие эффекты

На роль w подходит решение из семейства (10) с $\mu^2 = i\omega$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$, $b = -\mu a$, $a = \mathrm{e}^{i\chi_0}$. Итак, $\mu = (1+i)\sqrt{\omega/2}$, и решение задачи (13-14) записывается так

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i(\omega t - \chi(x))}\mathrm{e}^{-\alpha x}) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\omega t - \chi(x)),\ \chi(x) = \chi_0 - \alpha x;\ \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2}}. \quad (15)$$

Выводы:

1. Амплитуда колебаний сокращается вдвое при углублении на $d_* \stackrel{\text{def}}{=} \ln 2\sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}}$, и в 2^n раз – на глубине $y = hx : \alpha x = n\ln 2$, где $\alpha = h\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}},$.

2. Колебания в противофазе происходят на глубинах $d_k = \pi\sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}}(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$

3. Если есть какая-то характерная глубина h, то рост Ω/ν приведёт к $d_* << h$, то есть, высокочастотные колебания температуры будут сосредоточены в тонком поверхностном слое (*скин-эффект*).

Волновое уравнение. Разделение переменных.

Пример 2. Волновое уравнение имеет вид

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \;\; c = \mathrm{const} > 0. \tag{16}$$

Если u – решение (17) при $c = 1$, то $v(x,t) = u(x, ct)$. Поэтому полагаем $c = 1$. Оператор $\mathcal{L} = \partial_t^2 - \partial_x^2$ допускает представление (3) с $\mathcal{L}_1 = \partial_t^2$, $\mathcal{L}_2 = -\partial_x^2$. Следовательно, нахождение элементарных решений $U(t)V(x)$ уравнения (16) сводится к решению уравнений

$$U_{tt} = zU; \quad V_{xx} = zV, \;\; z = \mathrm{const} \in \mathbb{C}.$$

Пусть $z \neq 0$. Полагаем $z = -\omega^2$, $\mathrm{Re}\,\omega \geq 0$, и находим семейство элементарных решений волнового уравнения с параметром ω:

$$\left(a\cos\omega t + \frac{b\sin\omega t}{\omega}\right)\left(A\cos\omega x + \frac{B\sin\omega x}{\omega}\right), \tag{17}$$

где a, b, A, B – произвольные постоянные. Предельный переход от решения (17) при $\omega \to 0$ даёт особое решение $(a + bt)(A + Bx)$

Замечание 3. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы даёт представление решения (17) в виде $f(\omega\xi) + g(\omega\eta)$, $\xi = x - t$, $\eta = x + t$; особое решение принимает вид $c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3(\xi^2 - \eta^2)$.

Примеры задач Коши для волнового уравнения

Пример 3. Решаем задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}, \;\; u\big|_{t=0} = \sin^2 x; \;\; u_t\big|_{t=0} = \cos^2 x.$$

Так как $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, решением будет следующая линейная комбинация элементарных решений из списка (17):

$$a_0 + b_0 t + \cos 2x \left(a_1 \cos 2t + \frac{b_1 \sin 2t}{2} \right)$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, полагаем $a_0 = b_0 = 1/2$, $-a_1 = b_1 = 1/2$. Ответ: $u(x,t) = (1 + t + (\sin(2t)/2 - \cos 2t)\cos 2x)/2$.

Пример 4. Решаем задачу Коши

$$u_{tt} = u_{xx}, \;\; u\big|_{x=0} = \sin^2 t; \;\; u_x\big|_{x=0} = \cos^2 t.$$

Решение аналогично примеру 3. Ответ:
$u(x,t) = (1 + x + ((\sin 2x)/2 - \cos 2x)\cos 2t)/2$.

Пример 5. Решаем задачу (это *НЕ* задача Коши)

$$u_{tt} = u_{xx}, \;\; u\big|_{x=t} = \sin x; \;\; u\big|_{x=-t} = 0.$$

Из элементарных решений (17) составляем линейную комбинацию $\sin(\frac{x+t}{2})$. Это и есть ответ.

Замечание 4. Данные задачи из примера 5 согласованы в том смысле, что их значения в точке пересечения прямых $x = \pm t$ совпадают. В противном случае задача не имеет решения, понимаемого в обычном смысле.

Пример 6. Уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{18}$$

Оператор $\mathcal{L} = \partial_y^2 + \partial_x^2$ допускает представление (3) с $\mathcal{L}_1 = \partial_y^2$, $\mathcal{L}_2 = \partial_x^2$. Следовательно, нахождение элементарных решений $U(y)V(x)$ уравнения Лапласа (18) сводится к решению уравнений

$$U_{yy} = zU; \quad V_{xx} = -zV, \; z = \mathrm{const} \in \mathbb{C}.$$

Пусть $z \neq 0$. Полагаем $z = \mu^2$, $\mathrm{Re}\,\mu \geq 0$, и находим семейство элементарных решений уравнения Лапласа с параметром μ:

$$\left(a \operatorname{ch} \mu y + \frac{b \operatorname{sh} \mu y}{\mu}\right)\left(A \cos \mu x + \frac{B \sin \mu x}{\mu}\right), \tag{19}$$

где a, b, A, B – произвольные постоянные. Предельный переход от решения (19) при $\mu \to 0$ даёт особое решение $(a + bt)(A + Bx)$. Перестановка $x \rightleftarrows y$ в (19) дает ещё одно семейство решений.

Задачи с уравнением Лапласа

Пример 7. Решаем задачу Коши для уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ \ u|_{x=0} = \sin^2 y;\ \ u_x|_{x=0} = \cos^2 y.$$

Так как $2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$, $2\cos^2 y = 1 + \cos 2y$, решением будет следующая линейная комбинация элементарных решений из списка (19) (где $x \rightleftarrows y$):

$$a_0 + b_0 x + \cos 2y \left(a_1 \operatorname{ch} 2x + \frac{b_1 \operatorname{sh} 2x}{2} \right) \tag{20}$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, полагаем $a_0 = b_0 = 1/2$, $-a_1 = b_1 = 1/2$. Ответ: $u(x, y) = (1 + x + ((\operatorname{sh} 2x)/2 - \operatorname{ch} 2x) \cos 2y)/2$.

Пример 8. Решаем так называемую краевую задачу (НЕ задачу Коши)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ \ u|_{x=0} = \sin^2 y;\ \ \sup_{x>0} |u| < \infty.$$

Снова берём линейную комбинацию (20). Так как $2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$, $2\cos^2 y = 1 + \cos 2y$, решением будет следующая линейная комбинация элементарных решений из списка (19) (где $x \rightleftarrows y$):

$$a_0 + b_0 x + \cos 2y \left(a_1 \operatorname{ch} 2x + \frac{b_1 \operatorname{sh} 2x}{2} \right)$$

Чтобы удовлетворить условию ограниченности, полагаем $b_0 = 0$, $b_1 = -2a_1$; чтобы удовлетворить граничному условию,полагаем $a_0 = 1/2$, $a_1 = -1/2$. Ответ: $u(x, y) = (1 - \exp(-2x)\cos 2y)/2$.

Замечание 5. Если заменить условие $u|_{x=0} = \sin^2 y$ на условие $u_x|_{x=0} = \sin^2 y$, то и такому условию мы сможем удовлетворить подбором линейной комбинации элементарных решений (19); именно,

$$a_0 + (2x + \exp(-2x)\cos 2y)/4$$

(постоянная a_0 произвольна). Однако, это решение не удовлетворяет условию ограниченности $\sup\limits_{x>0} |u| < \infty$, и не видно линейной комбинации элементарных решений (19), удовлетворяющей обоим условиям. На самом деле решения, удовлетворяющего обоим условиям, не существует. Вместе с тем, при $u_x|_{x=0} = \sin y$ имеется бесконечно много решений, ограниченных при $x > 0$:

$$a_0 - \exp(-x)\sin y$$

Пример 8. Решаем краевую задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;\ \ u|_{x=0} = \frac{1 + \varepsilon\cos y}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos y};\ \sup_{x>0} |u| < \infty; \quad |\varepsilon| < 1.$$

Представление решений уравнения Лапласа рядами

Замечаем, что

$$2\frac{1+\varepsilon\cos y}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos y}=\frac{1}{1-\varepsilon z}+\frac{1}{1-\varepsilon z^*}=2\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-\varepsilon z},\qquad z=\mathrm{e}^{iy},\ z^*=\mathrm{e}^{-iy}.$$

Поэтому $u=\mathrm{Re}\,v$, где v – решение краевой задачи

$$v_{xx}+v_{yy}=0;\ \sup_{x>0}|v|<\infty;\ \ v|_{x=0}=\frac{1}{1-\varepsilon\mathrm{e}^{iy}}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathrm{e}^{kiy},$$

где разложение граничной функции в ряд произведено по формуле геометрической прогрессии. Для построения решения задействуем бесконечное число элементарных решений (19), где $x\leftrightarrows y$, и $\mu=k$, $a=1$, $b=-k$, $A=1$, $B=-ik$. Получаем

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathrm{e}^{-k(x-iy)}\implies \text{Ответ: } u=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathrm{e}^{-kx}\cos ky. \tag{20}$$

При $|\varepsilon|<1$, $x>s>0$ члены ряда (20) мажорируются величинами $\varepsilon^k\mathrm{e}^{-ks}$, и потому этот ряд сходится равномерно по $x\geq 0$, его можно почленно дифференцировать, и в нём можно перейти к пределу при $x\to+0$. Поэтому ряд (20) действительно определяет решения уравнения Лапласа, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Представление решений теплового уравнения рядами

Пример 9. Решаем краевую задачу

$$u_t - u_{xx} = 0;\ u|_{x=0} = \frac{1+\varepsilon\cos t}{1+\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos t};\ \sup_{x>0}|u| < \infty; \quad |\varepsilon| < 1.$$

Идём по пути примера 8. Полагаем $u = \operatorname{Re} v$, где v – решение краевой задачи

$$v_{xx} - v_t = 0;\ \sup_{x>0}|v| < \infty;\ v|_{x=0} = \frac{1}{1-\varepsilon e^{it}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^{ikt}.$$

Для построения решения задействуем бесконечное число элементарных решений (10), где полагаем $\mu = \sqrt{ik}$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $a = 1$, $b = -k$. Получаем

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^{ikt - \sqrt{\frac{kx}{2}}(1+i)} \Longrightarrow \text{Ответ: } u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^{-\sqrt{\frac{kx}{2}}} \cos\left(kt - \sqrt{\frac{kx}{2}}\right). \qquad (21)$$

При $|\varepsilon| < 1$, $x > s > 0$ члены ряда (21) мажорируются величинами$\varepsilon^k e^{-s\sqrt{\frac{k}{2}}}$, и потому этот ряд сходится равномерно по $x \geq 0$, его можно почленно дифференцировать, и в нём можно перейти к пределу при $x \to +0$. Поэтому ряд (20) действительно определяет решения теплового уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Представление решений теплового уравнения рядами-II

Пример 10. Решаем задачу Коши

$$u_t - u_{xx} = 0; \;\; u|_{t=0} = \frac{1+\varepsilon\cos x}{1+\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos x}; \qquad |\varepsilon| < 1, \;\; t \geq 0.$$

Идём по пути примера 8. Полагаем $u = \mathrm{Re}\, v$, где v – решение задачи Коши

$$v_{xx} - v_t = 0; \quad v|_{t=0} = \frac{1}{1-\varepsilon e^{ix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^{ikx}.$$

Для построения решения задействуем бесконечное число элементарных решений (10), где полагаем $\mu = ik$, $a = 1$, $b = -k$. Получаем

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^{-k^2 t - ikx} \Longrightarrow \text{Ответ: } u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k e^{-k^2 t} \cos(kx). \tag{22}$$

Ряды (22) при $|\varepsilon| < 1, t > s > 0$ мажорируются величинами$\varepsilon^k e^{-sk^2}$, и потому этот ряд сходится равномерно по $t \geq 0$, его можно почленно дифференцировать, и в нём можно перейти к пределу при $t \to +0$. Поэтому ряд (22) действительно определяет решения теплового уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Задача Коши для уравнений Лапласа и диффузии

Замечание 6. При $x > s > 0$ сходимость рядов (20),(21) при любом $s > 0$ значительно улучшается. Например, можно положить $\varepsilon = 1$, или заменить ε^k на k^n, где n – любое число. Это касается и поведения ряда (22) в областях $t > s > 0$.

Замечание 7. Попытаемся решить задачу Коши

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \;\; u|_{x=0} = \frac{1 + \varepsilon \cos y}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos y}; \;\; u_x|_{x=0} = 0; \quad |\varepsilon| < 1.$$

Пойдем по пути примера 8. Имеем

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathrm{ch}(kx) \mathrm{e}^{-iky} \implies \text{Ответ: } u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathrm{ch}(kx) \cos(ky). \tag{23}$$

Ряд (23), однако, сходится лишь при $|x| < -\ln \varepsilon$, так как при больших $|x|$ его члены уже не стремятся к нулю. Таким образом, чтобы решение задачи Коши было определено в области $|x| < \delta$, нам нужно взять $\varepsilon = \mathrm{e}^{-\delta}$. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении рядов (20), (21) в полуплоскости $x < 0$.

Решение теплового уравнения (22) вовсе непродолжаемо в область отрицательных t, каким бы мал не был параметр ε.

Некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа

Начальным данным $\bar{u}|_{x=0} = 1$, $\bar{u}_x|_{x=0} = 0$ отвечает решение $\bar{u} = 1$, а начальным условиям $u|_{x=0} = 1 + \varepsilon\cos(kx)k^{-2}$, $u_x|_{x=0} = 0$ – решение $u = 1 + \frac{\varepsilon \operatorname{ch}(kx)\cos(kx)}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |(u-\bar{u})|_{x=0}| \le \varepsilon, \quad \sup_{y\in\mathbb{R}} |\partial_y (u-\bar{u})|_{x=0}| \le \varepsilon, \quad \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\partial_y^2 (u-\bar{u})|_{x=0}\right| \le \varepsilon.$$

Однако, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\delta > 0$ $\exists\, k : \sup_{y\in\mathbb{R}} |(u-\bar{u})|_{x=|\delta|}| > 1$.

Таким образом, как бы ни были малы числа ε, δ и, найдутся решения, отклоняющиеся друг от друга на величину, большую 1 в некоторой точке, находящейся на расстоянии δ от начальной кривой, и при этом отклоняющиеся друг от друга на начальной кривой не более чем на ε, вместе с производными до второго порядка включительно.

Это явление известно как некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.

Некорректность НЕ свойственна ни задаче Коши для волнового уравнения, ни краевой задаче для уравнения Лапласа, ни задаче Коши для теплового уравнения (речь идёт о задачах типа разобранных в примерах 3,4,8,9). При этом задача Коши для теплового уравнения должна рассматриваться при $t > 0$, а краевая задача для уравнения Лапласа – при $x > 0$.

Уравнения Гельмгольца в полярных координатах.

Уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\Delta u + \sigma^2 u = 0,\ \ \sigma^2 \in \mathbb{C},\ \ \Delta = u_{xx} + u_{yy}.$$

Перепишем это уравнение в полярных координатах. Имеем

$$\partial_x = r_x\partial_r + \theta_x\partial_\theta = \frac{x\partial_r}{r} - \frac{y\partial_\theta}{r^2} = \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta\partial_\theta}{r};\ \partial_y = r_y\partial_r + \theta_y\partial_\theta = \sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta\partial_\theta}{r}.$$

$$\partial_x^2 = \cos^2\theta\partial_r^2 + \frac{\sin\theta\cos\theta\partial_\theta(\frac{1}{r} - \partial_r)}{r} - \frac{\sin\theta(\cos\theta\partial_\theta - \sin\theta)\partial_r}{r} - \frac{\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta\partial_\theta)\partial_\theta}{r^2}$$

$$\partial_y^2 = \sin^2\theta\partial_r^2 + \frac{\sin\theta\cos\theta\partial_\theta(\frac{1}{r} + \partial_r)}{r} + \frac{\cos\theta(\sin\theta\partial_\theta + \cos\theta)\partial_r}{r} + \frac{\cos\theta(\cos\theta\partial_\theta - \sin\theta)\partial_\theta}{r^2}$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\theta^2}{r^2};\ \Delta + z = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\theta^2}{r^2} + \sigma^2$$

Переменные разделяются в операторе $\mathcal{L} = r^2(\Delta + \sigma^2)$ с $\mathcal{L}_1 = r^2\partial_r^2 + r\partial_r + r^2\sigma^2$, $\mathcal{L}_2 = \partial_\theta^2$, что приводит к уравнениям

$$V_{\theta\theta} + \nu^2 V = 0,\ \ r^2 U_{rr} + rU_r + (\sigma^2 r^2 - \nu^2)U = 0. \qquad (24)$$

Уравнение Бесселя

Заменой $z = \sigma r$ второе уравнение в (24) приводится к *уравнению Бесселя:*

$$U(r) = J(\sigma r),\ z^2 \frac{d^2 J}{dz^2} + z\frac{dJ}{dz} + (z^2 - \nu^2)J = 0. \tag{25}$$

Так как $\sigma \in \mathbb{C}$, уравнение Бесселя следует рассматривать в комплексной плоскости.

Функции, выражающие решения уравнения Бесселя, называются *функциями Бесселя или цилиндрическиими функциями.* Они не выражаются через элементарные функции (кроме полуцелых ν), но изучены вполне детально.

Величина ν^2 называется индексом или порядком функции Бесселя. Вообще говоря, индекс – комплексная величина, но чаще вещественная или даже целая. Целые значения индекса естественны, когда мы ищем элементарные решения, определённые в круге, или в иной области, содержащей кривую, охватывающую начало координат. Действительно, θ – азимутальная координата, и прибавление к ней 2π оставляет точку плоскости на месте. Следовательно, элементарное решение должно быть $2\pi-$периодическим по θ, но только целым индексам соответствуют $2\pi-$периодические по θ решения 1-го уравнения в (24).

Уравнение Лапласа в полярных координатах

Уравнение Лапласа получается из уравнения Гельмгольца при $\sigma = 0$. В этом случае уравнение Бесселя переходит в уравнение Эйлера

$$V_{\theta\theta} + \nu^2 V = 0, \;\; r^2 U_{rr} + rU_r - \nu^2 U = 0. \tag{26}$$

Имеем $U = ar^{\nu} + br^{-\nu}$, $\nu \neq 0$, $U = a_0 + b_0 \ln r$, $\nu = 0$. Семейство элементарных решений можно записать так

$$\left(A\cos\nu\theta + \frac{B\sin\nu\theta}{\nu} \right) \left(a\,\mathrm{ch}(\nu\ln r) + \frac{b\,\mathrm{sh}(\nu\ln r)}{\nu} \right) \tag{27}$$

Предельный переход при $\nu \to +0$ дает особое решение $(A + B\theta)(a + b\ln r)$. Это решение определено лишь на плоскости с разрезом по лучу, исходящему из начала.

Пример 11. Решаем краевую задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \;\; x^2 + y^2 < 1, \;\; u|_{x^2+y^2=1} = x^2.$$

Переписываем задачу в полярных координатах.

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \;\; r < 1, \;\; u|_{r=1} = \cos^2\theta = (\cos(2\theta) + 1)/2$$

Пример решения краевой задачи в круге

Поскольку мы ищем решение, определённое внутри круга, нам нельзя брать ни отрицательные степени r, ни $\ln r$. Поэтому ответ должен иметь вид $a_2 r^2 \cos 2\theta + a_0$. Окончательно, ответ

$$\frac{r^2 \cos 2\theta + 1}{2} = \frac{x^2 - y^2 + 1}{2}.$$

Пример 12. Решаем краевую задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x^2 + y^2 > 1,\ u|_{x^2+y^2=1} = x^2,\ \sup_{x^2+y^2>1} |u| < \infty.$$

Переписываем задачу в полярных координатах.

$$u_{rr} + r^{-1} u_r + r^{-2} u_{\theta\theta} = 0,\ r > 1,\ u|_{r=1} = \cos^2\theta,\ \sup_{r>1} |u| < \infty.$$

Решение вполне аналогично примеру 11, но на этот раз нельзя брать ни положительные степени r, ни $\ln r$. Ответ:

$$\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2r^2} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2+y^2)^2} + 1/2.$$