

Задачи включают параметры  $a, b, \omega, n, m$ . Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает специальный список.

1. Решите задачи Коши для волнового уравнения с произвольно заданным параметром  $\alpha > 0$ :

$$u_{tt} = u_{xx}, (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (1);$$

$$(a) \quad u|_{t=0} = a \sin^m(\alpha x) + b \cos^n(\alpha x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

$$(b) \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = a \sin^m(\alpha x) + b \cos^n(\alpha x).$$

1.1. Проконтролируйте визуально выполнение начальных условий обеих задач. Для этого выберите  $\alpha = 1$  и анимируйте на общей координатной плоскости графики

$$\{u(x, t), x \in (-2\pi, 2\pi)\}, \{u_t(x, t), x \in (-2\pi, 2\pi)\}, \{a \sin^m(\alpha x) + b \cos^n(\alpha x), x \in (-2\pi, 2\pi)\}, t \in (0, 4\pi),$$

где  $t$  – параметр анимации.

1.2. Визуализируйте влияние параметра  $\alpha$  на решения обеих задач. С этой целью 3D-анимируйте графики

$$\{u(x, t), x \in (-1, 1), t \in (-2\pi, 2\pi)\}, \{u_t(x, t), x \in (-2\pi, 2\pi)\}, \alpha \in \left(0, \frac{20}{\max(m, n)}\right) - \text{параметр анимации.}$$

2. Решите задачу Коши для уравнения Лапласа с произвольно заданным параметром  $\alpha > 0$ :

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad u|_{x=0} = a \sin^m(\alpha y) + b \cos^n(\alpha y), \quad u_x|_{x=0} = 0. \quad (2)$$

2.1. Проконтролируйте визуально выполнение начального условия. Для этого выберите  $\alpha = 1$  и анимируйте на общей координатной плоскости графики

$$\{u(x, y), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, \{a \sin^m(\alpha y) + b \cos^n(\alpha y), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, x \in \left(0, \frac{1}{\max(m, n)}\right),$$

где  $x$  – параметр анимации.

2.2. Визуализируйте влияние параметра  $\alpha$ . С этой целью 3D-анимируйте график

$$\{u(x, t), x \in (-1, 1), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, \alpha \in \left(0, \frac{5}{\max(m, n)}\right) - \text{параметр анимации.}$$

3. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа с произвольно заданным параметром  $\alpha > 0$ :

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad u|_{x=0} = a \sin^m(\alpha y) + b \cos^n(\alpha y), \quad \sup_{x>0} |u(x, y)| < \infty. \quad (3)$$

3.1. Проконтролируйте визуально выполнение граничного условия. Для этого выберите  $\alpha = 1$  и анимируйте на общей координатной плоскости графики

$$\{u(x, y), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, \{a \sin^m(\alpha y) + b \cos^n(\alpha y), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, x \in \left(0, \frac{1}{\max(m, n)}\right),$$

где  $x$  – параметр анимации.

3.2. Визуализируйте влияние параметра  $\alpha$ . С этой целью 3D-анимируйте график

$$\{u(x, y), x \in (-1, 1), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, \alpha \in \left(0, \frac{5}{\max(m, n)}\right) - \text{параметр анимации.}$$

Визуализируйте скин-эффект. С этой целью 3D-анимируйте график

$$\{u(x, y), x \in (0, 0.1), y \in (-2\pi, 2\pi)\}, \alpha \in (0, 50) \text{ – параметр анимации.}$$

Объясните причину сглаживания графика при  $x \rightarrow +\infty$ .

3.3. Ответьте на вопрос: может ли задача типа (2) с граничным условием  $u|_{x=0} = \varphi$ , где  $\varphi$  – тригонометрический многочлен положительной степени, иметь решение, ограниченное во *всей* плоскости?.

4. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1; \quad u|_{x^2+y^2=1} = ay^m + bx^n, \quad (4)$$

Проконтролируйте визуально выполнение граничного условия. Для этого анимируйте на плоскости полярных координат  $r, \theta$  графики

$$\{u(r, \theta), \theta \in (-\pi, \pi)\}, \{a \sin^m(\theta) + b \cos^n(\theta), \theta \in (-\pi, \pi)\}, r = 1..0 \text{ – параметр анимации,}$$

Объясните причину сглаживания графика при  $r \rightarrow +0$ .

5. Решите краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, \quad x^2 + y^2 > 1; \quad u|_{x^2+y^2=1} = ay^m + bx^n, \quad \sup_{x^2+y^2>1} |u|(x, y) < \infty. \quad (5)$$

Проконтролируйте визуально выполнение граничного условия. Для этого анимируйте графики

$$\{u(r, \theta), \theta \in (-\pi, \pi)\}, \{a \sin^m(\theta) + b \cos^n(\theta), \theta \in (-\pi, \pi)\}, r = 1..10 \text{ – параметр анимации,}$$

Объясните причину сглаживания графика при  $r \rightarrow +\infty$ .

*Рекомендации.*

1. См. рекомендации к ИЗ4 и рабочую дорожку 4.mw