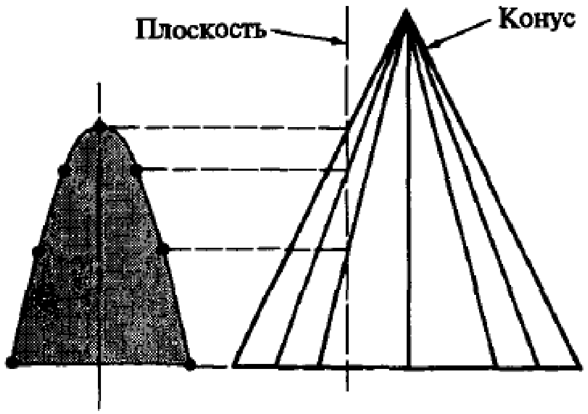
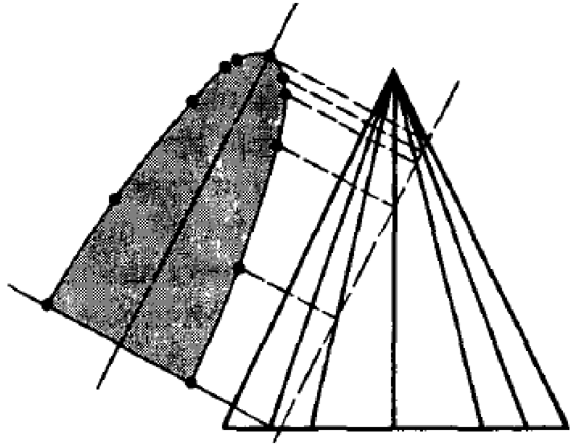
Плоские кривые



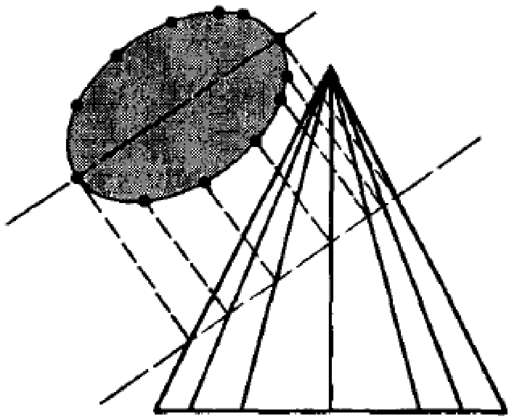
Гипербола

(*a*)



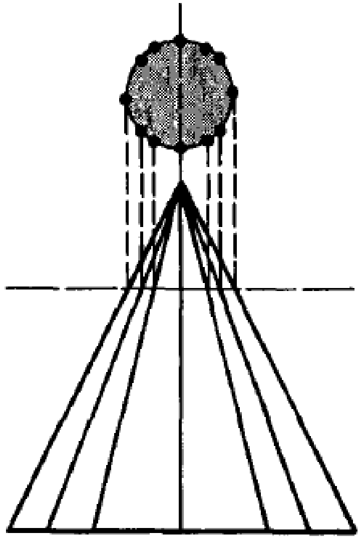
Парабола

(*b*)



Эллипс

(*c*)



Окружность

(*d*)

Пример. Параметрическое представление прямой

Найти параметрическое представление отрезка между точками $P_1[1 \quad 2]$ и $P_2[4 \quad 3]$, касательный вектор и наклон.

Параметрическое представление:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t = [1 \quad 2] + ([4 \quad 3] - [1 \quad 2])t, \qquad 0 \le t \le 1,$$
$$P(t) = [1 \quad 2] + [3 \quad 1]t, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Параметрическое представление составляющих x и y:

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t = 1 + 3t, \qquad 0 \le t \le 1,$$
$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t = 2 + t.$$

Дифференцируя $P(t)$, получим касательный вектор:

$$P'(t) = [x'(t) \quad y'(t)] = [3 \quad 1]$$

или

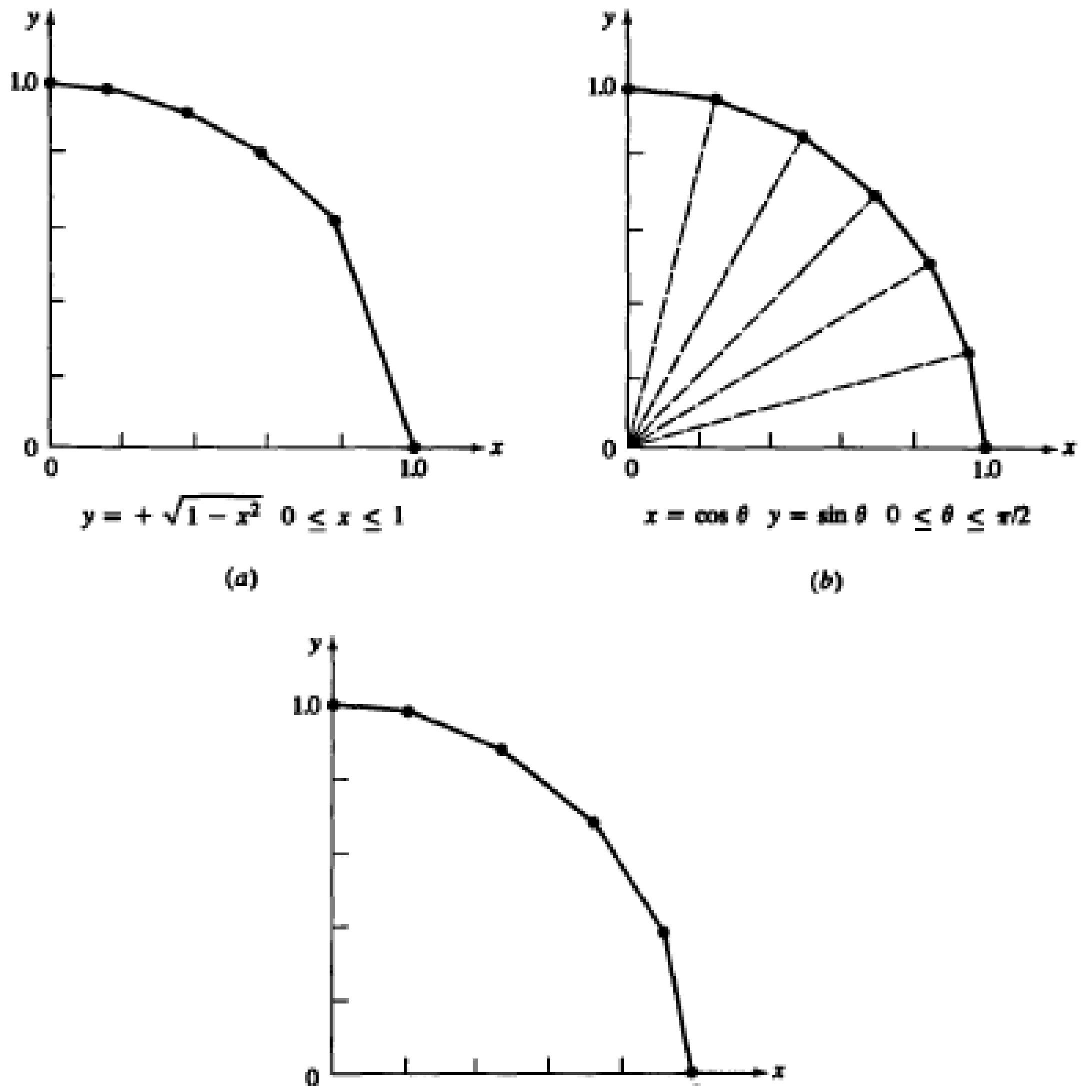
$$\overline{V}_t = 3\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

где $\overline{V}_t$ — касательный вектор, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — единичные векторы в направлениях x, y соответственно.

Наклон отрезка равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{3}.$$

Представление окружности



$y = +\sqrt{1 - x^2} \quad 0 \le x \le 1$

(a)

$x = \cos\theta \quad y = \sin\theta \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

(b)

$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad 0 \le t \le 1$

(c)

Стандартная параметрическая форма единичной окружности:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \\ y &= \sin\theta, \end{aligned}$$

или

$$P(\theta) = [x \quad y] = [\cos\theta \quad \sin\theta], \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

Параметрическом представление кривой не единственно, например,

$$P(t) = \left[\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \quad \frac{2t}{(1+t^2)}\right], \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad 0 \le \theta \le \pi/2, \qquad 0 \le t \le 1, \\ y &= \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad 0 \le \theta \le \pi/2, \qquad 0 \le t \le 1. \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

Параметрическое представление окружности

$$x = r\cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$
$$y = r\sin\theta,$$

$$x_{i+1} = r\cos(\theta_i + \delta\theta),$$
$$y_{i+1} = r\sin(\theta_i + \delta\theta),$$

$$x_{i+1} = r(\cos\theta_i\cos\delta\theta - \sin\theta_i\sin\delta\theta),$$
$$y_{i+1} = r(\cos\theta_i\sin\delta\theta + \cos\delta\theta\sin\theta_i).$$

$$x_{i+1} = x_i\cos\delta\theta - y_i\sin\delta\theta,$$
$$y_{i+1} = x_i\sin\delta\theta + y_i\cos\delta\theta,$$

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{(n-1)}$$

Параметрическое представление эллипса

$$x = a\cos\theta,$$
$$y = b\sin\theta,$$

$$x_{i+1} = a\cos(\theta_i + \delta\theta),$$
$$y_{i+1} = b\sin(\theta_i + \delta\theta),$$

$$x_{i+1} = a(\cos\theta_i \cos\delta\theta - \sin\theta_i \sin\delta\theta),$$
$$y_{i+1} = b(\cos\theta_i \sin\delta\theta + \cos\delta\theta \sin\theta_i).$$

$$x_{i+1} = x_i \cos\delta\theta - \left(\frac{a}{b}\right) y_i \sin\delta\theta,$$
$$y_{i+1} = \left(\frac{b}{a}\right) x_i \sin\delta\theta + y_i \cos\delta\theta,$$

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{(n-1)}$$

Параметрическое представление параболы

$$x = a\theta^2,$$
$$y = 2a\theta,$$

$$\theta_{\min} = \sqrt{\frac{x_{\min}}{a}}, \quad \theta_{\max} = \sqrt{\frac{x_{\max}}{a}}.$$

$$\theta_{\min} = \frac{y_{\min}}{2a}, \quad \theta_{\max} = \frac{y_{\max}}{2a}.$$

$$x_{i+1} = a\theta_i^2 + 2a\theta_i\delta\theta + a(\delta\theta)^2,$$
$$y_{i+1} = 2a\theta_i + 2a\delta\theta.$$

$$x_{i+1} = x_i + y_i\delta\theta + a(\delta\theta)^2,$$
$$y_{i+1} = y_i + 2a\delta\theta.$$

Параметрическое представление гиперболы 1

$$x = \pm a \sec \theta,$$
$$y = \pm b \operatorname{tg} \theta,$$

$$x_{i+1} = \pm a \sec(\theta + \delta\theta) = \pm \frac{ab/\cos\theta}{b\cos\delta\theta - b\operatorname{tg}\theta\sin\delta\theta},$$
$$y_{i+1} = \pm b \operatorname{tg}(\theta + \delta\theta) = \pm \frac{b\operatorname{tg}\theta + b\operatorname{tg}\delta\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\delta\theta}.$$

$$x_{i+1} = \pm \frac{bx_i}{b\cos\delta\theta - y_i\sin\delta\theta},$$
$$y_{i+1} = \pm \frac{b(y_i + b\operatorname{tg}\delta\theta)}{b - y_i\operatorname{tg}\delta\theta}.$$

Параметрическое представление гиперболы 2

$$x = a \operatorname{ch} \theta,$$
$$y = b \operatorname{sh} \theta.$$

$$\operatorname{ch}(\theta + \delta\theta) = \operatorname{ch}\theta \operatorname{ch}\delta\theta + \operatorname{sh}\theta \operatorname{sh}\delta\theta,$$
$$\operatorname{sh}(\theta + \delta\theta) = \operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\delta\theta + \operatorname{ch}\theta \operatorname{sh}\delta\theta.$$

$$x_{i+1} = a(\operatorname{ch}\theta \operatorname{ch}\delta\theta + \operatorname{sh}\theta \operatorname{sh}\delta\theta),$$
$$y_{i+1} = b(\operatorname{sh}\theta \operatorname{ch}\delta\theta + \operatorname{ch}\theta \operatorname{sh}\delta\theta)$$

$$x_{i+1} = x_i \operatorname{ch}\delta\theta + \left(\frac{a}{b}\right) y_i \operatorname{sh}\delta\theta,$$
$$y_{i+1} = \left(\frac{a}{b}\right) x_i \operatorname{sh}\delta\theta + y_i \operatorname{ch}\delta\theta.$$

$$\theta_{\min} = \operatorname{Arch}\left(\frac{x_{\min}}{a}\right),$$
$$\theta_{\max} = \operatorname{Arch}\left(\frac{x_{\max}}{a}\right),$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$