Задачи включают параметры a, b, ω, m, n. Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает специальный список.

Полагаем
$$P(\rho) = P_*\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^\gamma, \quad P_* = a,\ \rho_* = b,\ \gamma = 1 + \frac{2}{5}\frac{\omega + m + n + a + b}{\max(\omega, m, n, a, b)}. \tag{1}$$

1. Рассмотрите уравнения баротропной (изоэнтропической) газовой динамики
$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad \rho(u_t + uu_x) + (P(\rho))_x = 0,$$
где зависимость давления от плотности задана в (1), с двумя различными начальными разрывами
$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ u_0, x < 0 \end{cases} \qquad \rho|_{t=0} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \tag{A}$$
$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1, x < 0 \\ u_0, x > 0 \end{cases} \qquad \rho|_{t=0} = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} \tag{B}$$
1.1. Докажите, что автомодельные обобщённые решения задачи Римана (A-B) непрерывны. Найдите эти решения. Постоянную u_0 считайте дополнительной неизвестной, и определите её в процессе решения. Постройте график $u_0 = u_0(t)$, $t \in (0, 1)$.
1.2. Визуализируйте решения задач (A) и (B) и на этой основе проконтролируйте выполнение начальных условий. С этой целью анимируйте на общей плоскости графики
(а) плотности и её начального значения;
(б) непостоянного инварианта Римана и его начального значения
рассматриваемых как функции $x : |x| < 1$, зависящие от параметра $t \in (0, 1)$ (то есть, время t – параметр анимации).

Замечание. Физический смысл дополнительной неизвестной u_0 – скорость скорость границы газа с вакуумом. Причина введения этой дополнительной неизвестной – вырождение уравнений газодинамики при $\rho \to +0$.

Рекомендации.
1.1. Перепишите исходные задачи Коши в инвариантах Римана r, s. В инвариантах Римана автомодельные решения представляют собой волны Римана. В системе двух уравнений баротропной газодинамики две волны Римана: в одной постояннен s (r-волна), в другой r (s-волна). При этом один инвариант Римана всегда больше другого (так как $\rho > 0$). Для данных (A) надо использовать одну волну, для данных (B) – другую. **Убедительная просьба вводить обозначения инвариантов Римана так, что $r > s$.**
1.2. Нужное обощённое решение кусочно-линейно по z: постоянно вне некоторого конечного интервала (z_0, z_1), а внутри него – линейно (правая и левая постоянные различны и соответствуют начальным условиям, поставленным по разные стороны от нуля).
1.3. В вакууме $\rho = 0$ и $r = s$. Следовательно, переход к вакууму в r-волне состоит в уменьшении r до совпадения с $s \equiv \text{const}$, а в s-волне – в увеличении s до совпадения с $r \equiv \text{const}$.
1.4. После того, как построено решение выражено в инвариантах r, s, выразите через них плотность.
1.5. Непрерывность автомодельного решения следует из того, что разрывы, заданные в (A-B), не могут

распространяться в виде автомодельных ударных волн. С целью доказательства этого факта запишите уравнения газодинамики в виде законов сохранения см. `Рождественский`, гл. 2, § 2, п. 3,5, и установите нарушение условий Гюгонио, см. `Рождественский`, гл. 4, § 1.

2. Предположим, что следующая задача Коши для уравнений баротропной (изоэнтропической) газовой динамики, где зависимость давления от плотности задана в (1), имеет разрывное автомодельное обобщённое решение (ударную волну)

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, x > X(t) \\ 1, x < X(t) \end{cases} \qquad \rho(x,t) = \begin{cases} 1, x > X(t) \\ \rho^-, x < X(t) \end{cases} \tag{C}$$

где $\rho^- = \text{const},\ X(0) = 0$.

2.1. Найдите $\rho^-,\ X(t)$, и проверьте устойчивость данного разрыва с помощью условия Лакса (см. `Рождественский`, гл. 4, § 1).

2.2. Нарисуйте график $X = X(t)$. Анимируйте ударную волну, как функцию от $x = -1..1$ для $t \in (0,1)$, где t – параметр анимации.

Рекомендации.

2.1. Если разрывное автомодельное решение есть, то условия Гюгонио выполнены, см. `Рождественский`, гл. 4, § 1. Из них можно найти $\rho^-,\ D = \dot{X}(t)$.

Источники: (i) М.Ю. Жуков «Квазилинейные гиперболические уравнения» (учебное-методическое пособие), `http://www.mmcs.sfedu.ru/_old/docmanupload/doc_details/322----q--q--`.

(ii) Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко и др. «Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике», гл. 2, § 2, п. 3,5; гл. 4, § 1, пп.1-3.

(iii) Горицкий А.Ю., Кружков С.Н. и др. Уравнения с частными производными первого порядка. М.:1999, 96 стр.