Общая программа курса «Математический анализ 3» (2018/2019 уч. г., 3 семестр, группы 1–3)

Составитель: М. Э. Абрамян

Часть 1. Мера Жордана в $\mathbf{R}^n$

Декартово произведение множеств. [1a] Попарно не пересекающиеся множества, разбиение множества, декартово произведение множеств: определения. Примеры декартовых произведений. Свойства декартовых произведений: критерий того, что декартово произведение является пустым множеством; вложение и пересечение декартовых произведений; **[1b]** разность декартовых произведений с двумя сомножителями и в общем случае; разбиение декартова произведения (все свойства без доказательства, за исключением свойства разности декартовых произведений с двумя сомножителями).

Клетки. [2a] Клетка I в $\mathbf{R}$ и ее мера $\mu(I)$: определения. Клетка Π в $\mathbf{R}^n$ и ее мера $\mu(\Pi)$: определения. Свойства клеток в $\mathbf{R}$ (без доказательства): клетки нулевой меры, замкнутые и открытые клетки, пересечение и разность клеток, мера внутренности и замыкания клетки, суммарная мера разбиения клетки. Свойства клеток в $\mathbf{R}^n$ (без доказательства): внутренность и замыкание клеток, их меры; пересечение клеток; стандартное разбиение декартова произведения клеток; суммарная мера произвольного разбиения клетки.

Клеточные множества. Клеточное множество A в $\mathbf{R}^n$ и его мера $\mu(A)$: определения и теорема о корректности определения меры клеточного множества **[2b]** (со схемой доказательства). Свойства клеточных множеств: объединение двух непересекающихся (и произвольного числа попарно непересекающихся) клеточных множеств; декартово произведение клеточных множеств; разность двух клеток как клеточное множество; разность, пересечение и объединение двух клеточных множеств; соотношения между мерами множеств A и B, если $A \subset B$; **[3a]** оценка для меры объединения p клеточных множеств.

Измеримые по Жордану множества. Множество Ω, измеримое по Жордану, и его мера $\mu(\Omega)$: определение и доказательство корректности определения меры измеримого по Жордану множества. Свойства множества жордановой меры нуль: критерий для множества жордановой меры нуль, **[3b]** объединение конечного числа множеств жордановой меры нуль, подмножество множества жордановой меры нуль. Критерий измеримости множества Ω в $\mathbf{R}^n$ (Ω ограничено, граница Ω имеет жорданову меру нуль; без доказательства). Свойства множеств, измеримых по Жордану: пересечение, разность, объединение измеримых множеств; оценка для меры объединения p множеств, измеримых по Жордану (конечная аддитивность меры Жордана). **[4a]** Пример неизмеримого по Жордану множества.

Часть 2. Кратные интегралы

Определение кратного интеграла. [4b] Разбиение измеримого по Жордану множества, диаметр множества, мелкость разбиения, продолжение разбиения: определения. Интегральная сумма $\sigma_T(f, \xi, G)$ функции f, определенной на измеримом множестве G, соответствующая разбиению T и выборке ξ: определение. Кратный интеграл Римана функции f по измеримому множеству $G \subset \mathbf{R}^n$: определение и связь данного определения при $n = 1$ с определением интеграла от функции, заданной на отрезке. Пример, показывающий, что при $n > 1$ неограниченная функция может быть интегрируемой. Функция, существенно неограниченная на измеримом множества: определение, свойство существенно неограниченных функций (без доказательства). **[5a]** Верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению T: определение. Два критерия интегрируемости ограниченной функции в терминах сумм Дарбу (без доказательства).

Свойства кратного интеграла и классы интегрируемых функций. Свойства кратного интеграла: интеграл от постоянной функции; интеграл от неотрицательной функции; линейность интеграла относительно подынтегральной функции; сравнение кратных интегралов; теорема о среднем для кратного интеграла от непрерывной функции; конечная аддитивность интеграла по области интегрирования; **[5b]** интегрируемость произведения; свойства интеграла от модуля функции (три последних свойства без доказательства). Теорема об интегрируемости функции, непрерывной на компактном измеримом множестве (без доказательства). Теорема об интегрируемости функции, ограниченной на компактном измеримом множестве G и имеющей множество точек разрыва меры нуль, **[6a]** следствие (в котором отсутствует условие компактности измеримого множества G).

Сведение кратных интегралов к повторным. Цилиндр в $\mathbf{R}^n$: определение и лемма о цилиндре с измеримым основанием (без доказательства). Теорема о том, что график интегрируемой функции имеет меру нуль, следствие об измеримости области, граница которой составлена из графиков непрерывных функций. **[6b]** Теорема о сведении двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу, **[7a]** следствия (о равенстве повторных интегралов по прямоугольнику для интегрируемой и для непрерывной функции). Элементарная область в $\mathbf{R}^2$ относительно оси y: определение и теорема о сведении двойного интеграла по элементарной области к повторному интегралу; следствие для непрерывных функций. Элементарные области в $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^n$: определения и теоремы о сведении тройного и кратного интеграла по элементарной области к повторному интегралу (без доказательства).

Замена переменных в кратном интеграле. Вывод формулы замены переменных вида $x = \varphi(t)$ для интеграла по неориентированному отрезку в случае взаимно-однозначной дифференцируемой функции φ. **[7b]** Диффеоморфизм из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, его матрица Якоби и якобиан: определения. Формула замены переменных $x =$

φ(y) для кратного интеграла в случае диффеоморфизма φ (без доказательства). Применения формулы замены переменных: случай линейного преобразования, в том числе ортогонального преобразования и **[8a]** преобразования подобия; геометрический смысл определителя матрицы A как ориентированного объема параллелепипеда, определяемого линейно независимыми вектор-столбцами данной матрицы. Полярные координаты (ρ, φ) в $\mathbf{R}^2$: связь с декартовыми координатами (x, y), значение якобиана и формула замены переменных. Сферические координаты (ρ, φ, θ) в $\mathbf{R}^3$: связь с декартовыми координатами (x, y, z), значение якобиана и формула замены переменных.

Часть 3. Несобственные интегралы и числовые ряды

Определение и основные свойства несобственного интеграла. [8b] Несобственный интеграл по полубесконечному промежутку и по конечному промежутку от неограниченной функции: определения. Общее определение несобственного интеграла с особенностью в правом (левом) конце. Арифметические свойства несобственного интеграла: линейность относительно подынтегральной функции и аддитивность относительно промежутка интегрирования. Замена переменных и интегрирование по частям в несобственном интеграле (без доказательства). Совпадение собственного и несобственного интеграла в случае, если функция интегрируема на промежутке в обычном смысле. **[9a]** Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы: определение, лемма о том, что абсолютно сходящийся интеграл является сходящимся. Несобственные интегралы от неотрицательных функций: критерий сходимости, признак сравнения и следствие из него (следствие без доказательства), **[9b]** примеры. Условно сходящиеся несобственные интегралы: определение и пример. Признак Дирихле условной сходимости несобственного интеграла. **[10a]** Интегралы с несколькими особенностями. Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения по Коши: определение и пример.

Определение и основные свойства числового ряда. Числовой ряд, частичная сумма ряда, сходимость числового ряда: определения и пример (сумма геометрической прогрессии). Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимый признак сходимости. Абсолютно сходящиеся числовые ряды: определение, **[10b]** лемма о том, что абсолютно сходящийся рад сходится (со схемой доказательства). Арифметические свойства сходящихся рядов.

Числовые ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости неотрицательных числовых рядов (в терминах ограниченности сверху частичных сумм) и признак сравнения. Интегральный признак сходимости неотрицательных числовых рядов, **[11a]** примеры. Признак сходимости Даламбера, следствие (признак Даламбера в предельной форме; следствие без доказательства). Признак сходимости Коши, следствие (признак Коши в предельной форме; следствие без доказательства).

Знакопеременные ряды. [11b] Условно сходящиеся числовые ряды: определение. Знакочередующийся ряд (ряд Лейбница): определение, теорема о сходимости, оценка скорости сходимости ряда Лейбница. Признак сходимости Дирихле (без доказательства), **[12a]** примеры. Признак сходимости Абеля. Теоремы о перестановке членов для абсолютно и условно сходящихся рядов (без доказательства).

Часть 4. Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды

Определение и основные свойства функциональных последовательностей и рядов. Функциональная последовательность и ее сходимость в точке и на множестве: определения и примеры. Функциональный ряд и его сходимость в точке и на множестве: определения. **[12b]** Равномерная сходимость функциональной последовательности и ряда: определения. Критерий равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$ в терминах предела супремума разности $| f_n(x) - f(x) |$ (где $f(x)$ — предельная функция последовательности); следствие (критерий равномерной сходимости функционального ряда), примеры. **[13a]** Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности; следствие (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса, следствие. Признаки Дирихле и Абеля (оба признака без доказательства).

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов. [13b] Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности непрерывных функций; следствие о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными членами. Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности непрерывных функций; **[14a]** следствие о почленной интегрируемости равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными членами. Дифференцирование равномерно сходящейся функциональной последовательности; следствие о почленной дифференцируемости равномерно сходящегося функционального ряда с дифференцируемыми членами.

Степенные ряды. Степенной ряд: определение. **[14b]** Две теоремы об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда, радиус сходимости степенного ряда: определение. **[15a]** Верхний и нижний пределы числовой последовательности: определение. Теорема Коши-Адамара о нахождении радиуса сходимости степенного ряда (без доказательства), доказательство формулы для радиуса сходимости в случае обычного предела, примеры применения формулы в случае, когда обычного предела не существует. Теоремы о непрерывности, **[15b]** интегрируемости и дифференцируемости степенного ряда на интервале его сходимости.

Ряд Тейлора. Вещественная аналитическая функция: определение. Бесконечная дифференцируемость вещественной аналитической функции. Ряд Тейлора функции: определение. **[16a]** Пример, показывающий, что бесконечной дифференцируемости недостаточно для разложения функции в ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (без доказательства). Теорема о разложении в ряд Тейлора функции, все производные которой равномерно ограничены, следствия (разложение в ряд Тейлора функций e^x. $\sin x$. $\cos x$). **[16b]** Разложение в ряд Тейлора функции $(1 + x)^\alpha$ (без обоснования). Обоснование разложения в ряд Тейлора функции $\ln(1 + x)$, основанное на почленном интегрировании ряда Тейлора для функции $1/(1 + x)$. Разложение в ряд Тейлора функции $\arcsin x$.

Часть 5. Ряды Фурье

Ряды Фурье в евклидовом пространстве. [17a] Вещественное евклидово пространство E: определение, неравенство Коши-Буняковского. Норма вектора в евклидовом пространстве: определение, неравенство треугольника. Ортогональная и ортонормированная система: определение. Коэффициенты Фурье, частичная сумма Фурье и формальный ряд Фурье элемента евклидова пространства по ортонормированной системе: определения. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм Фурье, **[17b]** следствие (неравенство Бесселя). Полная система в евклидовом пространстве E: определение. Равенство Парсеваля для коэффициентов ряда Фурье по полной ортонормированной системе в E; следствие о сходимости по норме E ряда Фурье по полной ортонормированной системе.

Ряды Фурье в пространстве интегрируемых функций. **[18a]** Скалярное произведение на классах эквивалентности функций, интегрируемых по Риману, евклидово пространство $R([-\pi, \pi])$: определения. Тригонометрическая система функций $\{(2\pi)^{-1/2}, (\pi)^{-1/2}\cos(kx), (\pi)^{-1/2}\sin(kx), k = 1, 2, \ldots\}$, доказательство ее ортонормированности в $R([-\pi, \pi])$. Ортонормированные тригонометрические системы функций в $R([-l, l])$ и $R([a, b])$. **[18b]** Коэффициенты Фурье, формальный ряд Фурье по тригонометрической системе функций, неравенство Бесселя (два представления). Теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими полиномами, следствие о равномерной аппроксимации непрерывной на сегменте функции алгебраическими полиномами (теорема и следствие без доказательства). **[19a]** Теорема об аппроксимации в $R([-\pi, \pi])$ кусочно-непрерывной функции тригонометрическими полиномами. Следствие о сходимости по норме $R([-\pi, \pi])$ ряда Фурье кусочно-непрерывной функции. Кусочно-непрерывно дифференцируемая функция: определение. Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье кусочно-непрерывно дифференцируемой функции (без доказательства). **[19b]** Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции с кусочно-непрерывной производной. Асимптотическое свойство коэффициентов ряда Фурье функции, имеющей n производных.

Часть 6. Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы, зависящие от параметра. [20a] Равномерная по параметру x сходимость функции $f(x, y)$ к предельной функции $\varphi(x)$ при $y \to y_0$: определение, критерий Коши равномерной сходимости по параметру (без доказательства). Теорема о предельном переходе под знаком собственного интеграла; **[20b]** следствие о непрерывности собственного интеграла с фиксированными пределами от непрерывной функции, определенной на компакте. Теорема о непрерывности собственного интеграла с переменными непрерывными пределами от непрерывной функции (без доказательства). **[21a]** Теорема о дифференцировании собственного интеграла с фиксированными пределами от дифференцируемой функции, теорема о дифференцировании собственного интеграла с переменными дифференцируемыми пределами от дифференцируемой функции.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. [21b] Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра: определение, критерий Коши (без доказательства), признак Вейерштрасса (без доказательства), примеры. Лемма о перестановке предельных переходов. **[22a]** Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла; следствие о непрерывности равномерно сходящегося (по параметру y) несобственного интеграла от непрерывной функции, определенной по параметру y на компакте. Теорема о собственном интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра. **[22b]** Теорема о перестановке несобственных интегралов. Теорема о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Функции Эйлера. [23a] Гамма-функция $\Gamma(x)$: определение в виде несобственного интеграла, непрерывность гамма-функции $\Gamma(x)$ для $x > 0$. Бесконечная дифференцируемость гамма-функции. Основное соотношение для гамма-функции ($\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$) и его следствия: связь гамма-функции и факториала, **[23b]** поведение гамма-функции $\Gamma(x)$ при $x \to +0$, **[23c]** определение гамма-функции для $x < 0$. Бета-функция $\mathrm{B}(x, y)$: определение в виде несобственного интеграла, непрерывность бета-функции $\mathrm{B}(x, y)$ для $x > 0$, $y > 0$. Свойства бета-функции: (1) $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$; (2) $\mathrm{B}(x, 1 - x) = \pi / \sin(x\pi)$ при $0 < x < 1$; (3) $\mathrm{B}(x, y) = \Gamma(x)\,\Gamma(y) / \Gamma(x + y)$ (свойства 2 и 3 без доказательства), следствие (значение интеграла Пуассона). Применение бета-функции для вычисления интегралов от тригонометрических функций вида $\sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi$ ($a > 0$, $b > 0$) на промежутке от 0 до $\pi/2$, следствие (значение интеграла от функции $\mathrm{tg}^c\varphi$ при $|c| < 1$ на промежутке от 0 до $\pi/2$).

Литература

1. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. 1, 2. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1981.
3. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1983.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2 (любое издание).