

Экзаменационная программа по курсу УМФ (лектор А. Моргулис).

Зимняя сессия 2019 г.

1. Линейное уравнение переноса и его решение методом характеристик. Постановка и решение задачи Коши. Причины несуществования решения задачи Коши и возникновения областей тени. Уравнение переноса с источниками. Уравнение неразрывности и его свойства.
2. Диффеоморфизмы. Векторные поля. Действие диффеоморфизмов на векторные поля и уравнения. Выпрямление векторного поля и его связь с решением задачи Коши.
3. Поток векторного поля. Контактные векторные поля и потоки. Характеристический поток общего УрЧП порядка 1. Характеристики. Уравнения Хопфа и эйконала, их характеристические потоки и характеристики.
4. График и 1-график функции. Уравнение как поверхность в области струй. Преобразование 1-графика характеристическим потоком. Построение интегрального многообразия (= поверхности 1-графика решения) по начальному интегральному многообразию (НИМ).
5. Постановка задачи Коши для общего УрЧП порядка 1. Построение НИМ по данным Коши, поднятие данных Коши в уравнение. Нехарактеристические точки. Решение задач Коши для уравнений Хопфа и эйконала. Градиентная катастрофа в уравнении Хопфа, её причины. Волновые фронты, эквидистанты, функция расстояния и связь всего перечисленного с уравнением эйконала. Возникновение особенностей волновых фронтов.
6. Диффеоморфизмы, точечные и контактные преобразования. Производящая функция. Преобразование Лежандра. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби, его характеристический поток. Гамильтоновы системы ОДУ, и связь таких систем с уравнением Гамильтона-Якоби. Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби. Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и интегрирование гамильтоновых систем ОДУ (метод Якоби). Интегрирование задачи о движении материальной точки, притягивающейся двумя неподвижными центрами.
7. Разделение переменных в линейных уравнениях. Уравнения теплопроводности (диффузии), уравнение Лапласа, волновое уравнение на плоскости. Разделение переменных в этих уравнениях и списки их элементарных решений. Задача о погребе (температура Земли).
8. Задача Коши для волнового уравнения. Представление решений теплового уравнения рядами. Задача Коши для уравнения Лапласа и теплового уравнения. Некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.
9. Уравнение Гельмгольца и разделение переменных в нём, в декартовых и полярных координатах. Уравнение Бесселя. Разделение переменных в уравнении Лапласа в полярных координатах. Элементарные решения уравнения Лапласа в полярных координатах. Решение простейших краевых задач для уравнения Лапласа в круге и в его внешности.

10. Системы уравнений. Линейные и квазилинейные системы. Волновая система и волновое уравнение. Система Коши-Римана и уравнение Лапласа. Формула Даламбера для волнового уравнения и её комплексный аналог. Гармонические и аналитические функции. Связь между граничными значениями компонент решения уравнения Коши-Римана. Интеграл Коши и интеграл типа Коши.
11. Системы уравнений газовой динамики и тепломассопереноса в электрическом поле. Квазилинейность этих систем. Точечные преобразования, их поднятия и преобразование годографа. Запись квазилинейной системы в инвариантах Римана. Запись уравнений изэнтропической газовой динамики в инвариантах Римана. Применение преобразования годографа к интегрированию уравнений газодинамики.
12. 1-параметрические группы преобразований. Системы инвариантные относительно таких групп. Вычисление инвариантных решений. Скейлинг-инвариантность и автомодельные решения. Вычисление автомодельных решений. Условия нелинейности. Автомодельные решения и понятие характеристик системы УрЧП порядка 1. Волны Римана и их вычисление. Автомодельные решения и волны Римана уравнений газовой динамики. Волны сжатия и разрежения.
13. Вещественная и комплексная аналитичность. Аналитическая задача Коши для нормальных систем. Теорема Коши-Ковалевской. Проблема корректной постановки краевых задач для уравнения Лапласа и системы Коши-Римана.
14. Гиперболические системы. Гиперболичность в узком смысле. Эллиптические системы. Эллиптичность системы Коши-Римана. Гиперболичность системы газовой динамики, волновой системы. Существование решений неаналитической задачи Коши. Волновая система и звуковые волны.
15. Гиперболические системы законов сохранения. Интегральная форма законов сохранения. Обобщённые решения. Обобщённая постановка задачи Коши. Задача Римана о распаде разрыва. Автомодельные решения задачи Римана. Сильно и слабо разрывные решения. Вычисление сильно и слаборазрывных автомодельных решений. Условия Гюгонио. Неединственность решения обобщённой задачи Коши. Селекция разрывов. Характеристические ломаные. Условия Лакса. Селекция разрывов в уравнении Хопфа. Условия Лакса в случае двух законов сохранения.
16. Гладкие дуги, их ориентации и границы. Цепи и их границы. Криволинейный интеграл (интеграл по цепи). Формула Грина. Решение вопроса о представлении плоского векторного поля в виде градиента некоторой функции двух переменных. Односвязные и неодносвязные области. Расширение определения обобщённого решения закона сохранения. Формулировка и вывод условий Гюгонио для произвольного (неавтомодельного) разрыва.