УМФ
2-й семестр – весна 2019 г
Лекция 3
Циркуляционное обтекание. Подъёмная сила. Общая задача обтекания, краевые задачи для системы Коши-Римана и уравнения Лапласа во внешней области. Теорема Римана о конформном отображении.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

Контурный интеграл комплексной скорости

Пусть контур $c \subset \mathbb{C}$ параметризован, так что на c

$$z = z(s) = x(s) + iy(s), \ |\dot{z}(s)| = 1, \quad dz = dx + idy = (\dot{x} + i\dot{y})ds.$$

Рассмотрим комплексную скорость безвихревого несжимаемого течения $V(z) \overset{\text{def}}{=} u + iv$. Имеем

$$\int\limits_c V^*(z)dz = \int\limits_c (u - iv)(\dot{x} + i\dot{y})ds = \int\limits_c (udx + vdy) + i\int\limits_c (un_x + vn_y)ds,$$

где $n_x = \dot{y}$, $n_y = -\dot{x}$ – компоненты орта внешней нормали. С другой стороны, $V^* = w'(z)$, $w = \varphi + i\psi$, причём w -аналитическая функция. Поэтому

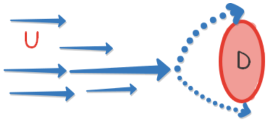
$$\int\limits_c V^*(z)dz = \int\limits_c w'(z)dz = 0,$$

если w аналитична внутри c. Если w аналитична в $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Sigma$, Σ – замкнутое множество, то интеграл по произвольному контуру $c \subset \Omega$ уже не равен нулю, но его значение не меняется при любой деформации контура c, такой, что c остается в Ω. Если внутренность контура c содержит лишь точечные особенности $\{\zeta_k\}$, то

$$\int\limits_c V^*(z)dz = 2i\pi \sum_k \mathrm{res}_{z=\zeta_k} w'(z).$$

Потенциальное обтекание цилиндра

Пример 1. Рассмотрим безвихревое обтекание круглого цилиндра однородной несжимаемой жидкостью. Пусть скорость набегающего потока вдали от цилиндра постоянна, перпендикулярна его образующей и равна U по абсолютной величине. Примем радиус цилиндра и плотность жидкости за 1.



Рассмотрим комплексный потенциал $w = U(z + 1/z)$, $z = x + iy$, ось Ox сонаправлена скорости набегающего потока. Имеем поле скорости потока $\mathbf{v} = (u, v)$, скорость $u + iv = V = w'^*$. Функция w регулярна на ∞, следовательно $\int_c w'(z)dz = 0$ для произвольной замкнутой кривой $c \in \mathbb{C} \setminus B_1$, где B_1 – единичный круг. В частности, $\int\limits_c udx + vdy = 0 \implies \exists\varphi : \ u = \phi_x \quad , v = \phi_y$, то есть поле скорости потока имеет потенциал φ.

Потенциал обтекания цилиндра произвольного сечения D имеет вид $w = U(Z + 1/Z)$, $Z = Z(\zeta)$, где $Z : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C} \setminus B_R$ – конформное отображение, причём $Z = \zeta + \mathrm{const} + (1/\zeta), \zeta \to \infty$. Поэтому скорость такого течения тоже имеет потеницал.

Точечный вихрь

Пример 2. Пусть $\Gamma = \partial\Omega, \ \Omega \ni 0$

$$W_0(z) = \frac{\ln z}{2i\pi}, \ W_0'(z) = \frac{1}{2i\pi z} \stackrel{\text{def}}{=} V_0^*(z); \quad \int\limits_\Gamma V_0^*(z)dz = \mathrm{res}_{z=0} z^{-1} = 1$$

$$V_0 = u + iv \implies \int\limits_\Gamma udx + vdy = 1, \quad \int\limits_\Gamma (un_x + vn_y)ds = 0, \quad .$$

Если бы u, v были гладкими, то два последних равенства были бы эквивалентны следующим

$$\int\limits_\Omega (v_x - u_y)dxdy = 1, \quad \int\limits_\Omega (u_x + v_y)dxdy = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

для *любой* площадки Ω, содержащей начало координат, то есть, интеграл $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \mathbf{e}_3), \ \mathbf{v} = (u, v)$ через Ω был бы равен 1, а интеграл от $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, и эти выводы сохранялись бы при стягивании площадки Ω к началу координат. Отсюда

Определение 1. Функцию $\kappa \in \mathbb{R}, \ \zeta \in \mathbb{C}$ называют потенциалом точечного вихря интенсивности κ, сосредоточенного в точке ζ.

Движение жидкости в поле точечного вихря

Замечание 1. Рассмотрим течение, создаваемое точечным вихрем. Полагаем $z - \zeta = re^{i\theta}$; тогда

$$W(z|\zeta) = \frac{\kappa \ln(z-\zeta)}{2i\pi} = \frac{\kappa(\theta - i\ln r)}{2\pi};$$

функция тока создаваемого вихрем потока $\Psi = -\frac{\kappa \ln r}{2\pi}$. Траектории материальных частиц – линии уровня $\{\Psi = h\}$ – окружности с центром в точке ζ радиуса $\exp(-2\pi h/\kappa)$. Чтобы найти скорость движения материальной частицы по своей траектории, запишем её уравнения движения в координатах r, θ:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta} r \sin\theta = \Psi_y \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta} r\cos\theta = -\Psi_x; \quad x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta.$$

Отсюда

$$\dot{r} = -\Psi_y\cos\theta + \Psi_x\sin\theta = \Psi_\theta/r, \quad -r\dot{\theta} = \Psi_y\sin\theta + \Psi_x\cos\theta = \Psi_r.$$

Итак, в случае точечного вихря,

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\Psi_r}{r} = \frac{\kappa}{2\pi r^2};$$

при $\kappa > 0 (< 0)$ – частица кружится вокруг вихря против (по) часовой стрелке.

Подъёмная сила

Введём комплексный потенциал обтекания цилиндра $w = U(z + 1/z) + iC \ln z$, $C \in \mathbb{R}$. Логарифимический член можно трактовать как вклад точечного вихря интенсивности $\Gamma = -2\pi C$, помещённого в центр круга – сечения цилиндра.

Хотя функция w неоднозначна в жидкой области, её производная $w' = u - iv$ однозначна. Поэтому скорость потока определена корректно, и силу, действующую на цилиндр со стороны потока, можно сосчитать по формуле Чаплыгина:

$$F^* = F_x - iF_y = \frac{i}{2} \int\limits_S w'^2(z)dz = \frac{i}{2} \int\limits_{|z|=r} \left(U \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{iC}{z} \right)^2 dz = -2\pi CU,$$

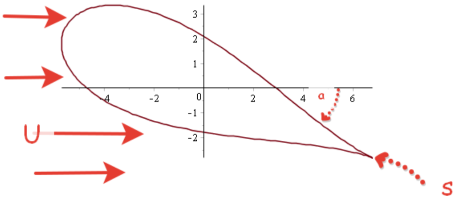
Отсюда заключаем

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho \Gamma U \tag{1}$$

(у нас – $\rho = 1$). Это – знаменитая формула Н.Е. Жуковского для подъёмной силы. Сила сопротивления получается нулевой, что указывает на необходимость учёта вязкости для её оценки.

Для цилиндра с произвольным сечением D, ограниченным гладкой кривой, формула (1) также имеет место. Это вытекает из выражения соответствующего комплексного потенциала через конформное отображение: $w = U(Z + R^2 Z^{-1}) + iC \ln Z, Z = Z(\zeta)$, где $Z : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C} \setminus B_R$ – конформное отображение, причём $Z = \zeta + (1/\zeta), \zeta \to \infty$.

Обтекание крыла



Крыло понимается как цилиндр с острой кромкой. Это означает, что кривая $S = \partial D$, содержит точку s, в которой направление нормали терпит разрыв первого рода. Конформное отображение $Z : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C} \setminus B_R$ существует и в этом случае, но комплексная скорость имеет, вообще говоря, разрыв в точке в точке s и не ограничена вблизи неё. Оказывается, скорость можно сделать ограниченной на острой кромке выбором циркуляции. С этой целью построим комплексный потенциал циркуляционного обтекания крыла D. Полагаем $w = W(Z(\zeta))$, $W(z) = U(z + R^2/z) + iC \ln z$, $Z : \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C} \setminus B_R$ – конформное отображение. Тогда

$$w'(z) = \frac{dW}{dZ}(Z(\zeta))\frac{dZ}{d\zeta}(\zeta) = \left(U\left(1 - \frac{R^2}{Z^2}\right) + \frac{iC}{Z}\right)\frac{dZ}{d\zeta}.$$

Подъёмная сила крыла. Общая задача обтекания.

Подбираем $C: \ W'(z_0)=0$, где $z_0=Z(s)\in\partial B_R$, и наша цель достигнута. Полагаем $z_0=R\mathrm{e}^{i\theta_0}$, и находим $C=-2RU\sin\theta_0$. Отсюда, по формуле Жуковского, находим

$$F_y=4\pi R\sin\theta_0\rho U^2. \tag{2}$$

Полученная формула называется формулой Чаплыгина (Чаплыгина-Кутты). Она вытекает из формулы Жуковского при выборе циркуляции, обеспечивающем ограниченность скорости в окрестности острия границы сечения цилиндра. Это правило выбора циркуляции називаетя правилом Чаплыгина (Чаплыгина-Кутты).

Чтобы найти θ_0 нужно знать отображение $\zeta\mapsto Z(\zeta)$. Такие отображения известны для некоторых профилей. В частности, для внешности пластины $\theta_0=\alpha$, где α – угол между пластиной, ориентированной по потоку, и скоростью набегающего потока, отсчитанный от направления скорости против часовой стрелки. Так как ось Ox выбрана коллинеарной скорости, то угол α можно отсчитывать от неё.

Уточним постановку задачи плоской задачи безвихревого обтекания. Дана ограниченная односвязная область $D\subset\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей S, вектор $\mathbf{U}\subset\mathbb{R}^2$, и число $\Gamma\in\mathbb{R}$. Требуется найти векторное поле $\mathbf{v}\in\mathrm{C}^1(D^e)\cap\mathrm{C}(\overline{D^e})$, где $D^e=\mathbb{R}^2\setminus D$, такое что

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \text{ в } D^e;\ \oint_c \mathbf{v}\cdot\mathbf{dz}=\Gamma,\ \forall\, c=\partial\Omega\supset D;\ \mathbf{v}_n=0 \text{ на } S;\ \mathbf{v}(\infty)=\mathbf{U}; \tag{3}$$

Потенциал и функция тока безвихревого обтекания

где $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, и $\mathbf{n}$ – орт внешней нормали к $S = \partial D^e$ (т.е. $\mathbf{n}$ направлен в D). Координатная запись системы (2-3) такова:

$$v_x - u_y = 0,\ u_x + v_y = 0 \text{ в } D^e; \quad un_x + vn_y = 0 \text{ на } S; \tag{4}$$

$$\lim_{r\to+\infty} u = U; \ \lim_{r\to+\infty} v = 0; \quad \oint_c udx + vdy = \Gamma,\ \forall\, c = \partial\Omega \supset D. \tag{5}$$

где $(x, y) = z$, ось Ox декартовой системы координат Oxy коллинерна вектору $\mathbf{U}$, $(n_x, n_y) = \mathbf{n}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $U = |\mathbf{U}|$.
Рассмотрим случай $\Gamma = 0$, то есть, бесциркуляционное обтекание. Тогда имеется два способа сведения системы (4-5) к краевой задаче для уравнения Лапласа.
Первый способ. Вводим потенциал (вещественный) φ, полагая $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. В координатах имеем $\mathbf{U} = (U, 0)$, $u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y$, и система (2-3) принимает вид

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } D^e; \ \frac{d\varphi}{dn} = 0 \text{ на } S; \ \lim_{r\to+\infty} \varphi_x = U, \ \lim_{r\to+\infty} \varphi_y = 0; \tag{6}$$

при этом циркуляция скорости есть интеграл $d\varphi$, и потому равна нулю.
Второй способ. Вводим функцию тока ψ, полагая $\mathbf{v} = \nabla^{\perp}\psi$, то есть, $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$.

Условие бесциркуляционности для функции тока

Приходим к задаче Дирихле

$$\Delta\psi = 0 \text{ в } D^e; \quad \psi = 0 \text{ на } S; \quad \lim_{r\to+\infty} \psi_x = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \psi_y = U. \tag{7}$$

Непосредственно из определения функций ψ и φ видно, что они сопряжены системой Коши-Римана. Но мы пока забудем об этом.

Найдём циркуляцию поля, заданного функцией тока ψ. Пусть c – произвольная кривая, НЕ охватывающая D, то есть, найдётся односвязная ограниченная область $\Omega \subset D^e$, такая, что $c = \partial\Omega$. Применяем формулу Грина с $P = u, Q = v$ и областью Ω. Находим

$$\oint\limits_c u dx + v dy = \int\limits_\Omega (v_x - u_y)\, dx dy = -\int\limits_\Omega \Delta\psi dx dy = 0. \tag{8}$$

Пусть теперь c – произвольная кривая, охватывающая D, то есть, найдётся односвязная ограниченная область $\Omega \supset D \cup S$, такая, что $c \cup S = \partial(\Omega \setminus D)$. Выбираем круг $B_R = \{r < R\}$, $B_R \supset \Omega$. Применяем формулу Грина с $P = u, Q = v$ и областью $B_R \setminus \Omega$, и принимаем во внимание равенства $n_x ds = \tau_y ds = dy$, $n_y ds = -\tau_x ds = -dx$ на граничных кривых. Имеем

$$\oint\limits_c u dx + v dy = \oint\limits_{r=R} u dx + v dy = \int\limits_{r=R} (\psi_y \tau_x - \psi_x \tau_y)\, ds = -\int\limits_{r=R} (\psi_x n_x + \psi_y n_y)\, ds.$$

Потеницал и функция тока гармонически сопряжёны

Таким образом, циркуляция поля $\mathbf{v} = \nabla^{\perp}\psi$, где $\Delta\psi = 0$ в D^e, будет нулевой в том и только в том случае, если

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{r=R} (\psi_x n_x + \psi_y n_y)\, ds = 0. \tag{9}$$

Замечание 2. Если функция ψ удовлетворяет этому условию, то функция $\psi + \mathrm{const}\ln r$ – нет, хотя обе функции – гармонические в D^e.

Вспоминаем о сопряжённости пары функций ψ и φ. Если функция ψ известна, то φ выражается криволинейным интегралом

$$\varphi(x, y) = \int^{(x,y)} \psi_y dx - \psi_x dy.$$

Так как область D^e неодносвязна, этот интеграл не обязан быть однозначным (несмотря на гармоничность ψ). Для его однозначности необходимо и достаточно гармоничности ψ и условия (9). В самом деле, необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint\limits_c \psi_y dx - \psi_x dy = 0$$

для любой замкнутой кривой $c \subset D_e$,

Плоская версия формулы Гаусса-Остроградского

но любое из этих равенств эквивалентно (9) в случае гармонической ψ.

Если известен потенциал φ, то ψ, как сопряжённую функцию, можно выразить криволинейным интегралом, и однозначность последнего сведётся к предельному равенству

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{r=R} (\varphi_x n_x + \varphi_y n_y)\, ds = 0. \tag{9'}$$

При этом равенство (9) будет следствием однозначности φ. В свою очередь, равенство (9′) – простое следствие условий задачи (6). При проверке этого утверждения, как и во многих других ситуациях, пригодится запись формулы Грина в виде

$$\oint\limits_{\partial\Omega} a dy - b dx = \int\limits_{S} (a n_x + b n_y) ds = \int\limits_{\Omega} (a_x + b_y)\, dxdy, \tag{10}$$

где область Ω и пара функций a, b, удовлетворяют условию теоремы о формуле Грина. Формула (10) сводится к обычной формуле Грина подстановкой $a = Q, b = -P$. Её можно также назвать плоской версией формулы Гаусса-Остроградского.

Вещественный и комплексный потенциалы

Применяем формулу (10) к $a = \varphi_x$, $b = \varphi_y$, и $\Omega = D^e \cap B_R$, где $B_R = \{r < R\}$, и $R: \ B_R \supset D \cup S$. Находим $an_x + bn_y = \varphi_x n_x + \varphi_y n_y = d\varphi/dn = 0$ на S (нормаль – внешняя к D^e), $a_x + b_y = \Delta\varphi = 0$ в D^e, так что

$$0 = \int\limits_{D^e \cap B_R} \Delta\varphi dxdy = \int\limits_{r=R} (\varphi_x n_x + \varphi_y n_y)\, ds,$$

что равносильно $(9')$.

Итак, если задача (6) имеет решение φ, то и задача (7) имеет решение ψ, удовлетворяющее (9), причём функции φ, ψ гармонически сопряжены. Составляем комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$; w – аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Рассмотрим комплексную скорость $V(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u + iv = w'^*$. Имеем

$$0 = \int\limits_C V^*(z)dz = \int\limits_C (u - iv)(\dot{x} + i\dot{y})ds = \int\limits_C (udx + vdy) + i \int\limits_C (un_x + vn_y)ds =$$

$$i \int\limits_{r=R} (\varphi_x n_x + \varphi_y n_y)\, ds - \int\limits_{r=R} (\psi_x n_x + \psi_y n_y)\, ds$$

«Правильные» условия на бесконечности

Следовательно, условия (9),(9′) (взятые вместе с гармоничностью ψ и φ) эквивалентны аналитичности и однозначности комплексного потенциала.

На самом деле, условия на бесконечности, поставленные в задачах (6) и (7), можно немного модифицировать, так что существование решения каждой из них, равно как и выполнение условий (9),(9′) будут иметь место место независимо друг от друга. Именно, требуем

$$\sup_{D_e} |\varphi - Ux| < \infty; \quad \sup_{D_e} |\psi - Uy| < \infty. \tag{11}$$

Тогда подстановка $\varphi = \Phi + Ux$, $\psi = \Psi + Uy$ приводит к стандартным внешним задачам Неймана и Дирихле

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } D^e; \ \frac{d\Phi}{dn} = -Un_x \text{ на } S; \ \sup_{D^e} |\Phi| < \infty. \tag{12}$$

$$\Delta\Psi = 0 \text{ в } D^e; \ \Psi = -Uy \text{ на } S; \ \sup_{D^e} |\Psi| < \infty. \tag{13}$$

Из условий на бесконечности, поставленных в задачах (12) и (13), следуют разложения

$$\Phi = A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \dots, \quad \Psi = B_0 + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} + \dots. \tag{14}$$

Разложение гармонических функций на бесконечности

равномерно сходящиеся вне достаточно большого круга, и дифференцируемые любое число раз; при этом

$$\exists\, C_k \in \mathbb{C} : \; A_k r^{-k} = \mathrm{Re}(C_k z^{-k}), \; B_k r^{-k} = \mathrm{Re}(C_k z^{-k}), \; k = 0, 1, \dots .$$

Таким образом, члены рядов (14) – однородные функции (x, y) степени $-k$. Поэтому

$$\nabla\Phi = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \; r \to \infty, \quad \nabla\Psi = \left(\frac{1}{r^2}\right), \; r \to \infty. \tag{15}$$

Ввиду оценок (15), предельные равенства (9),(9′) имеют место при $\varphi = \Phi + Ux$, $\psi = \Psi + Uy$, так как они имеют место при $\varphi = Ux$, $\psi = Uy$ (последнее утверждение проверяется непосредственным вычислением).

Доказательство разложений (14) решений задач (12) и (13) будет дано позже.

Замечание 3. Ввиду (14), комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ имеет простой полюс на бесконечности: $w = Uz + C_0 + O(1/z)$, $z \to \infty$, что согласуется с конкретными примерами, разобранными выше.

Замечание 4. Так как явное решение задачи обтекания кругового цилиндра известно, общая задача безвихревого обтекания цилиндра сечения D сводится к построению конформного отображения $D^e = \mathbb{C} \setminus D$ на внешность круга.

Общая теорема о конформном отображении

Приведём основную теорему о конформном отображении.
Теорема Римана. Пусть D и $\widehat{D}$ односвязные области (с границами, состоящими более, чем из одной точки), $z_0 \in D$, $\zeta_0 \in \widehat{D}$, и $\alpha \in [0, 2\pi]$. Существует ровно одно конформное отображение $f : D \to \widehat{D}$: $f(z_0) = \zeta_0, \arg(f'(z_0)) = \alpha_0$.

Хотя внешняя область D^e и и внешность круга неодносвязны,существование конформного отображения между ними – простое следствие приведённой теоремы Римана. В самом деле, Обозначим B_ρ, B_ρ^e круг радиуса ρ и его внешность, соответственно, и пусть $\check{D} = \{1/z,\ z \in D^e\}$. Область $\check{D}$ ограничена и односвязна. По теореме Римана найдётся конформное отображение

$$g : \check{D} \to B_1;\ g(0) = 0,\ g'(0) = \rho > 0.$$

Тогда искомое конформное отображение $f : D^e \mapsto B_\rho^e$ определено равенством

$$f(z) = \frac{\rho}{g\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

При этом $f(z) = z + \mathrm{const} + O(1/z),\ z \to \infty$.